This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ACA7836
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 41032871//r84
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B110886
035/2: : |a (CaOTULAS)160330417
040: : |a DLC/ICU |c ICU |d MiU
050/1:0 : |a QA36 |b .B6
082/1:0 : |a 510
100:1 : |a Bólyai, Farkas, |d 1775-1856.
245:00: |a Wolfgangi Bolyai de Bolya Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, |b cum appendice triplici.
250: : |a Ed. 2 ...
260: : |a Budapestini, |b sumptibus Academiae scientiarum hungaricae, |c 1897-1904.
300/1: : |a 2 v. |b incl. front. (port.) plates (diagrs.) and |e atlas of diagrs. |c 30cm.
500/1: : |a With reproduction of original title-pages.
505/2:0 : |a I. Conspectus arithmeticæ generalis. Mandato Academiæ scientiarum hungaricæ suis adnotationibus adiectis ediderunt Julius König et Mauritius Réthy.--II. Elementa geometriæ et appendices ... ediderunt Josephus Kürschák,

---

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google

WOLFGANGI BOLYAI DE BOLYA

TENTAMEN.

EDITIO SECUNDA.

TOMUS II

Hosted by Google

TYPIS SOCIETATIS FRANKLINIANÆ.

Hosted by Google

WOLFGANGI BOLYAI DE BOLYA

TENTAMEN

IUVENTUTEM STUDIOSAM IN ELEMENTA MATHESEOS PURÆ ELEMENTARIS AC SUBLIMIORIS METHODO INTUITIVA EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA INTRODUCENDI, CUM APPENDICE TRIPLICI.

EDITIO SECUNDA.

TOMUS II.

ELEMENTA GEOMETRIÆ ET APPENDICES.

MANDATO ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SUIS ADNOTATIONIBUS ADIECTIS EDIDERUNT

IOSEPHUS KÜRSCHÁK, MAURITIUS RÉTHY,
BÉLA TŐTÖSSY DE ZEPETHNEK
ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SODALES.

PARS PRIMA. TEXTUS.

BUDAPESTINI.
SUMPTIBUS ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ.
MCMIV.

Hosted by Google

Hosted by Google

PRAEFATIO EDITORUM.

Cum infra scripti, quibus renuntiante JULIO KŐNIG, Academia Scientiarum Hungarica Tomum II. Tentaminis edendum mandavit, eum in publicum prodimus, facere non possumus, quin mærentes in memoriam revocemus luctum, quo Academia nostra anno post editum Tomum I. mortuo HENRICO FINÁLY DE KEND, eruditissimo doctissimoque viro et sodali, afflicta est. Amissi viri, peritissimi Latinitatis classicæ antistitis, cuius opera etiam conatus nostri prospere promovebantur, vicem supplere filius defuncti, GABRIEL FÍNÁLY DE KEND summo studio enisus est. Quod grato animo accepimus.

Omnibus, quæ ad arithmeticam spectant, in Tomo I. editis, in secundo continentur ea, quæ ad geometriam pertinent, ita etiam «Appendix» IOANNIS BOLYAI. Huic Tomo inseruimus etiam paginam «Recensio per auctorem ipsum facta» inscriptam, de qua in Præfatione Editionis II. Tomi I. mentio facta est. Paginas ad Tomum I. Editionis I. alligatas,

Hosted by Google

quæ inscribuntur «Egy kis toldalék a deák I. kötethez» («Additamenta quædam ad Tomum I. Latinum» — hoc est non ad opus Hungaricum ARITHMETICA ELEJE = Initia Arithmeticæ, quod anno 1830 editum est) huic quoque Tomo subiecimus. Quia autem res, quæ in iis tractantur, potissimum linguæ Hungaricæ peritorum legere interest, integras eas in Latinum convertere alienum putavimus, argumenta tamen in Adnotationibus huius Tomi breviter exposuimus.

Rationes, in edendo Tomo I. constitutas, in secundo edendo sine ulla mutatione conservavimus. Signa insolita in hoc Tomo neque ipse WOLFGANGUS BOLYAI adhibuit, sed signa diversarum æqualitatum et diversorum parallelismorum re ipsa adhibenda fuerunt: quæ, ut prorsus signa omnia auctorum retinuimus, excepto signo perpendicularitatis Bolyaiano ∟, in cuius locum signo solito ⊥ usi sumus.

At figuræ haud leviter immutatæ sunt. Ex figuris stereometricis WOLF-

Hosted by Google

GANGI BOLYAI charta plicata compositis eas solum retinuimus, quæ ad «Conspectum generalem geometriæ» pertinent: his enim ad discendum utiliter illustrantur, quæ iis illustranda sunt. Pro ceteris figuris charta formatis figuras quæ dicuntur axonometricas adhiberi, cum intuentibus ad perspiciendum, tum præcipue typographis ad persequendum melius putavimus. Nonnullas etiam ex reliquis figuris correximus. Sed naturam figurarum ad geometriam absolutam pertinentium sine ulla mutatione retinendam esse censuimus. Quod nonnullas figuras, exempli gratia 14-tam Appendicis, ex integro composuimus sectione conica absoluta Cayleyana adhibita, earum naturam minime adulteratam esse putavimus, quia hoc modo imago rectæ lineæ æque recta est ac in figuris Bolyaianis.

De mutationibus, quæ in contextu operis evitari non potuerunt, ratio redditur in adnotationibus, quo etiam animadversiones nonnullas ad rem spectantes reiecimus.

Hosted by Google

Opere tandem perfuncti libenti animo commemorare debemus munificientiam Academiæ Scientiarum Hungaricæ, quod ad diem natalem centesimum Ioannis Bolyai concelebrandum Appendicem eius æternitate dignam in usum eorum, qui se studiis literarum dedidere, separatim ediderat.

Cum diligentissime enisi essemus, ut opus quam emendatissimum prodiret, menda typographica, quæ in contextu nihilominus invenientur, nobis lector benevolus ignoscet.

Budapestini 1904

Kürschák, Réthy, Tőtössy.

Hosted by Google

HOC TOMO CONTINENTUR:

	Pag.
Præfatio Editorum	V
Signa a Wolfgango Bolyai inventa	X
Arbor Arithmeticæ Geometriæque	XI
Index rerum in tomo primo ed. I. contentarum	XXI
Index rerum in tomo secundo ed. I. contentarum	XLIII
Simulacrum tituli editioni primæ præfixi	LV
Præfatio ipsius Auctoris	LVII
Subdivisiones geometriæ	LIX
Sectio I. Conspectus Geometriæ generalis	1
Sectio II. Planimetriæ pars prima	57
Sectio III. Planimetriæ pars secunda	148
Sectio IV. Reditus e plano in abyssum spatii	219
Appendix triplex	308
I. De perspectiva	308
II. De gnomonica	314
III. De chronologia	326
Recensio per auctorem ipsum facta	357
Simulacrum tituli editioni primæ Appendicis præfixi	359
Ioannis Bolyai Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens	361
Wolfgangi Bolyai Additamentum ad Appendicem	395
Egy kis toldalék a' déák első kötethez	401
Megigért jelentés	416
Adnotationes Editorum	417
Errata	439

Hosted by Google

SIGNA

A BOLYAI INVENTA, QUAE IN TOMO PRIMO NON REPERIUNTUR
IPSIS AUCTORIS VERBIS EXPLICATA.

$\widetilde{ab}$ denotatur linea ab utrinque infinita.
$a\widetilde{b}$ « ex a incipiendo infinita in plaga illa, in qua b est.
$\widetilde{a}b$ « e b incipiendo in plaga illa, in qua a est, infinita.
$\widetilde{P}$ « P (ex. gr. planum) totum infinitum (iuxta definitionem pag. 8).

Hosted by Google

ARBOR

ARITHMETICAE GEOMETRIAEQUE

corradicata coronisque confluentibus.

E repræsentationibus externis internisque, via abstractionis pervenitur ad loca primaria omnium, quæ in mundo externo sunt, et quæ in externo internoque fiunt: SPATIUM et TEMPUS; quæ partim seorsim, partim coniunctim considerantur: abstrahendo nimirum e mundo externo corpus omne, e loco, quem occupare videtur, et quærendo quid reliquum, quidve ultra sit, oritur *intuitus spatii puri*, atque ex eodem in diversis locis, vel diversis in eodem loco, aut diversis repræsentationibus in eodem repræsentante, nascitur *intuitus temporis*. (Tom. II. pag. 2.)

Ex *A* et tali Non *A* quod ex *A* est, fit conceptus *partis*; et *continui*, si quid partes commune habeant. *A* comparando cum *B* oritur *aequalitas (absoluta* et *respectiva)*. Ex æqualitate et parte *quantitas (absoluta* et *respectiva)*. (Tom. I. pagg. 22—25.)

Quantitas cum quantitate parit *homogeneitatem* et *maioritatem minoritatemque*. Et hinc reflectendo ad tempus atque spatium (quum in priore quantitatis maioris excessus illico pateat, in spatio vero sæpe aliter se res habeat), de omnibus *quantitatibus ad formam simplicem prioris reducendis cogitatur*. (Tom. I. pag. 27.)

Hosted by Google

Atque talis *quantitas*, nempe ad *formam* TEMPORIS *reducta*, OBIECTUM ARITHMETICAE est. (Tom. I. pag. 27.)

His præmissis SPATIUM *purum* OBIECTUM GEOMETRIAE est, applicatis, ubi necesse est, veritatibus in Arithmetica deductis: ut arbor utraque fraterna corradicata, altera alteri opem ferente, coronis inter lucidas Spatii Temporisque connubii æterni orbitas in abysso cœlorum confluat. (Tom. II. pag. 1.)

I. *Quantitas cum qualitate* (nempe *certa determinatione*) parit positivum et negativum (mox imaginaria quoque). (pagg. 28, 121.)

I. E *spatio puro*: nascitur prius *superficies*, *linea*, *punctum*, *forma*, et *sectio*. (pag. 2.)

II. Quantitatum P et Q certa cum determinatione positarum *resultatum certa sub conditione acceptum* parit *summam* S; et ex S et P quærendo *socium* ipsius P, oritur *differentia ipsius* P *ab* S. (pag. 30—31.)

II. *Reditu in mundum externum*, cum reflexione ad corpus idem in diversis locis: oritur *Axioma congruentiae*, et *constructio mobilis geometrici*, *motusque geometricus* (coniunctio, in idea non in concreto, spatii et temporis). (pag. 3.)

III. *Differentia eadem* ipsius S ab S', atque porro ipsius S' ab S'' et ita porro, parit S, S', S'', S''' . . . *seriem arithmeticam*. (pag. 32. et 152.)

Atque si series eiusmodi U a 0 incipiat, et differentia cuiusvis termini a sequente sit $= u$, oritur *numerus* quoad u; et serie tali V item a 0 incipiente, cuius termini cuiusvis a sequente diffe-

III. *Reditus in spatium purum cum mobili geometrico. Motus sine quiete (Operatio motus prima)*; *Motus cum quiete*; *cum quiete unius puncti* (*Operatio motus secunda*); *cum quiete duorum punctorum* (*Operatio motus tertia*). (pagg. 5, 6, 7.)

Hosted by Google

rentia $= v$ sit, si o ipsius V cum o ipsius U simul ponatur, ac quilibet terminus sive in U sive in V sequens simul ponatur cum eo, qui in altera sequitur: oritur *nomen numericum* idem terminorum simultaneorum, in U *quoad* u, *in* V *quoad* v. (pag. 32.)

IV. *Quaestiones* hinc variæ exortæ: ex. gr. præter alias, num B numerus sit quoad A? si non; num tale u detur, quoad quod tam A quam B numeri sint? et si detur, cuiusnam nominis numerus sit A, et cuius sit B? Hinc *mensuratio* ipsius B per A, ubi A *mensura*, et B *mensum* ipsius A dicitur; atque hic oritur etiam idea *incommensurabilitatis* (adhucdum subiective tantum possibilis); atque hinc u semper minus cogitando, *limitis* idea. Venientibus talibus a et b autem, ut ad quæstionem, qualenam mensum sit b ipsius a, eadem responsio sit, quam ad eam, qualenam mensum sit B ipsius A; oritur *proportio*. Tum mensurando quoad A non solum B sed C quoque, oritur *fractio*; atque hinc passus fit omnes quantitates homogeneas quoad idem A mensurare; A *unitatem* appellando;

IV. Spatii filia primogenita *punctum* est, dein *sphaera* quasi media inter duo extrema (inextensum et quaquaversum infinitum). Sphæræ per operationem tertiam filia circulus est; et ex his, adhibitis reliquis operationibus quoque, generatur *recta*, atque e recta et circulo *planum*. (pagg. 8, 13, 26)

Hosted by Google

qua minus *fractio vera* dicitur, et numerus quoad *A integer* audit. (pagg. 33—37, 41.)

V. Hinc reflectendo ad IV, si ibidem *A* unitas sit, quærere *b* ex *a* et *B*, dicitur *multiplicare a* per *B*, et *b factum quoad unitatem A e factoribus a* et *B* audit. (pag. 40.)

Hinc ex *b* tanquam facto supposito, et uno e factoribus *a* et *B*, quærere factorem socium eius, dicitur *dividere b* per illum, cuius socius quæritur, et hic *quotus* audit. (pag. 41.)

Atque prouti unitas (in IV.) ⊢⊣ vel ⊢⊣ accipitur; oriuntur *realia quoad* +1, et *realia quoad* —1. (pag. 42.)

V. *Rectis ex eodem puncto* ꝑ *ad omnia puncta cuiuspiam F*,

1. Omnibus *per idem* (sive 1 sive aliud, dummodo non 0 sit) *multiplicatis*: *complexus extremitatum* parit *similitudinem*, et *homologa*; atque *contrarie aequalia*, et conceptum generalem *aequalitatis geometricae*. (pagg. 10 &.)

2. *Rectarum* dictarum *ipsarum* autem *complexus* fit (sensu generali) *pyramis*; et forma ad ꝑ apicata parit conceptum *anguli* generalem. (pagg. 10, 15.)

3. Hinc forma *excluso angulo* fit *fluens*; et hæc *exclusis recta planoque* fit *curva*, *admissis* vero *recta planoque* parit conceptum generalem *tangentis*, et *perpendicularitatis*. (pagg. 16, 17.)

4. Remoto (in V) ꝑ in infinitum, oritur *angulus* 0, *vel prima non sectio*; et e *rectarum dictarum*, si finitæ et æquales reddantur, *complexu* fit *prisma* (sensu generali, et tum adhuc generaliore). Et si *F* recta sit, et rectæ dictæ æquales ad angulum æqualem ponantur in plano; exinde oritur

Hosted by Google

VI. Si *factores aequales* esse contigerit, *multiplicatio cum divisione* parit *potentiam*, *radicem*, *logarithmum*, *(elementares)*. (pag. 50.)

Atque *quantitas* item *cum certa determinatione* (uti in I.), realitate eius, multiplicationi quoad —1 innixa, parit *imaginarium*, et conceptum multiplicationis latiorem. (pag. 121.)

Imo potentia logarithmusque *(elementares)* per binomii elevationem ad tales series deducunt, quæ conceptum *potentiae logarithmi* altiorem pariunt, ubi et *imaginaria in exponentem* ascendunt. (pagg. 192—193.)

parallelismi conceptus generalis. (pagg. 17—20.)

VI. *Motus geometricus simplex*, id est ut in quovis tempore una tantum trium operationum (in III dictarum), et quævis numero certo, etsi non eodem, eveniat: recta planoque heic iam ex IV suppositis. (pagg. 20, 21.)

Cum duabus prioribus operationibus, et semper certo præterea rectarum numero adhibito, *descendendo in planum* (omnibus eo restrictis) fit *Planimetria*: ubi prius *de lineis* (neglecta area), earumque *sectione* (0 aut aliqua); tum *de areis* agitur. *Constructionis geometricae sensu stricto ambitus.*

Admissa operatione tertia quoque, nec restringendo ad planum, redeundo in spatium universum fit *Solidometria*, *constructione geometrica sensu lato accepta.* (pag. 22.)

Notandum autem, in motu dicto simplici operationem quamvis seorsim peragi, nec ulla alia lege restringi, nisi quod mobile e dato loco in datum perveniat. Unde duæ priores operationes, sola restrictione ad planum accedente, reducuntur: Primo ad *motum*

Hosted by Google

puncti a *rectam* ab *secum ferentis, usquequo* a *in* p perveniat. Secundo ad *rectae* ab *motum circa* a *in plano, donec in certam rectam datam, cuius una extremitas* a *est, perveniat.*

VII. Ex omnibus his quasi in oceanum confluentibus, oritur, per quarumvis quantitatum, quibusvis operationibus affectarum qualemvis compositionem, conceptus ita dictæ FUNCTIONIS. Ubi item (ut in IV) variæ oriuntur quæstiones: e quibus CORONA *arboris Arithmeticae* exsurgit. (pag. 204.) Nempe

VII. MOTUS GEOMETRICUS COMPOSITUS: nempe ubi plures operationes (trium dictarum primitivarum coniunguntur) in eodem tempore; lege quoque, qua durante motu viæ simultaneæ per singulas operationes factæ a se invicem dependeant, data; e quo CORONA *arboris Geometriae* excrescit. Suntque hæ operationes coniunctæ. (pagg. 22 &)

21) *Pro certa functionis conditione (qualitateve)*, certa functionem constituentia *quae, quanta, qualiave* sint, quærere.

21) *Aut numero finito*; et quidem:

1. Aut duæ tantum; ex. gr. si recta ab in plano P circa a mota, interea punctum p ita moveatur in ab, ut via y eius sit $= f(u)$ (denotante u viam puncti b); et quæratur via puncti p. (pag. 23.)

Aut $\widetilde{ab}$ quiescat, et p in $\widetilde{ab}$ motum perpendicularem B ad ab secum ferat, atque interea ita moveatur punctum p′ in B, ut via y eius sit $= F(x)$ (denotante x viam puncti p); et quæratur via puncti p′. Prodeunt hoc modo talia quoque, quorum etsi non

Hosted by Google

omne, quodvis punctum tamen (nempe pro dato quovis x simultaneum y) geometrice (sensu stricto) construi potest.

2. Aut tribus coniunctis: ex. gr. si punctum $\mathfrak{p}$ describat in plani P recta $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ viam x, secum ferendo planum p perpendiculare ad P e recta B perpendiculari ad $\mathfrak{ab}$, atque interea $\mathfrak{p}'$ in B motum rectam C ex $\mathfrak{p}$ ad B perpendicularem, in p secum ferat; et punctum $\mathfrak{p}''$ in C viam z describat; sitque puncti $\mathfrak{p}$ in B via $y = a(x)$, et $z = b(y)$; et quæratur via puncti $\mathfrak{p}''$ in spatio.

Aut planum P circa rectam fixam A plani P moveatur, via certi eius puncti u dicta; atque interea $\mathfrak{p}$ describat in A viam x, secum ferens in P perpendicularem B ad A, atque simul describat $\mathfrak{p}'$ in B viam y; sitque $x = k(u)$, et $y = h(x)$; et quæratur via puncti $\mathfrak{p}'$. (pag. 23).

Ita plures quoque operationes (numero certo) coniungi possunt.

23) Pro *certa* certorum *functionem constituentium conditione (qualitateve)* quæri qualitas functionis valoresque possunt; (imo etiam simul certa functionis conditio poni potest).

23) Aut *innumerabiles* eiusmodi operationes coniunguntur: ex. gr. si recta A in plano P sit, et recta B perpendiculare ad A, atque planum Q secet planum P in B, et rectam A in $\mathfrak{b}$; ac mo-

Hosted by Google

Ex. gr. Ex 𝔄) Si conditio ea sit, ut functionis valor o sit: quæri *valor variabilium* potest *(problema aequationum)*, aut *valor coefficientium*; potest etiam conditio esse, ut functionis valor *maximus* vel *minimus* sit, et pro hoc variabilis quæri. (pagg. 205, 345, 372.)

Ita aliæ conditiones esse possunt; imo variabilis vicem genus certarum functionum subire potest, (ut in *calculo variationum* dicto). (pagg. 206, 360.)

Potest vero conditio ea quoque esse, ut quantitates certæ, quarum genus dicatur x, nulla alia operatione affectæ, nonnisi sub certa conditione ordinentur: et resultata quærantur. *(Analysis combinatoria)*. (pagg. 159, 205, 556.)

In 𝔅) quoque variæ conditiones esse possunt: ex. gr. ut variabili nonnisi integer substituatur; imo ut etiam functio certa qualitate gaudeat (ut in *theoria numerorum*) (pag. 206), ubi tamen sive functionem constituentia, sive functionis qualitas quantitasve quæri possunt.

Si ipsi x substituatur $x+i$, oritur *Problema Taylorianum*. (pag. 208, 321.)

veatur 𝔟 in A, planum Q secum ferens; atque interea certa lege, a via puncti 𝔟 dependente, moveantur certa puncta generaliter 𝔭 dicta (innumerabilia quoque, prouti per legem determinantur) in perpendicularibus ad rectam B in Q erectis: et quæratur complexus ipsorum 𝔭 in omnibus temporis punctis expertibus usque ad motus finem. (pagg. 24, 25.)

Hosted by Google

Si vero ipsi x substituatur $m\dot{x}$ (pro $\dot{x}$ denotante $\frac{x}{n}$), atque ipsi m substituantur integri ab 1 incipiendo; et valores functionis exorti post se invicem ponantur: oriuntur *series* (ipso x imo ipso n quoque sive 1 sive aliud denotante); estque pro certo valore ipsius x (ex. gr. $x = 1$), aut n quoque constans, et ipsi m numeri omnes ab 1 incipiendo etiam ultra n substituuntur; aut n (quamvis semper finitum determinatum, sed post quamvis seriem productam novum valorem accipiens) $\backsim \infty$, atque ipsi m semper numeri ab 1 usque ad n substituuntur. (pagg. 208 &, 472).

Si in casu posteriore terminus quilibet cum sequente comparetur: prodit *series incrementorum*; et si duarum functionum F et f eiusdem x, unius F valor notus sit; atque termini generales T et t, serierum incrementorum ex utraque functione deductarum æquipolleant (id est $\frac{t}{T} \backsim 1$, si $n \backsim \infty$): prodit et alterius functionis f valor. Reperire t (in forma simplicissima) docet *calculus differentialis*, et ex t functionem f quærit *calculus integralis*. (pagg. 209, &, 301 &, 371.)

Hosted by Google

$\mathfrak{C}$) Denique quælibet horum sub qualivis conditione componi: et sub aliqua conditione resultatum, aut pro resultato illa, per quæ id fieri queat, quæri possunt. Et de n-tupla via sub eodem tempore, conceptum n-tuplæ caussæ formando; oritur *Mechanica pura*.

Hosted by Google

INDEX

RERUM IN TOMO PRIMO ED. I. CONTENTARUM.

	Ed. II. Tom.	pag.
Conspectus arboris utriusque breviter est sequens:		
Fundus communis exponitur usque ad (pag. 22) quo etiam (pag. 442) pertinet.	I II	27 1
I. RADICEM *arboris Arithmeticae* constituit conceptuum primariorum genesis, prouti quilibet e prioribus orti se invicem excipiunt (pag. 22 usque pag. 43, §. 35).	I	27—51
TRUNCUM constituunt *primaria*, quæ e conceptibus dictis per axiomata sequuntur: utpote resultata operationum, quot, qualiave sint, si cum commensurabilibus, incommensurabilibus, cum fractionibus, potentiis, logarithmisque suscipiantur; quo etiam operatio elevationis (ex. gr. binomii) pertinet; unde *potentiae logarithmique sublimioris* conceptus oritur. Continentur hæc in (§. 35, a pag. 43 usque pag. 178).	I	51—203
CORONAM *arboris* constituunt quæstiones, quæ e conceptu FUNCTIONIS, ex omnibus præcedentibus confluentibus, prodeunte oriuntur (a pag. 178 usque 442).	I	204—478
II. Ita RADICEM *arboris Geometriae* efficiunt: specialior spatii intuitus, et conceptuum primariorum genesis, atque *sphaerae, rectae, planique generatio*; horumque combinationes primariæ (a pag. 442 usque ad finem tomi).	II	1—56
TRUNCUM faciunt e *motu simplici* oriunda: *Planimetria* et *Solidometria*.		
CORONAM efficit MOTUS COMPOSITUS.		
III. Demum (coronis iam antea confluentibus) actione spatii cum tempore unione, de *n*-tupla via sub eodem tempore *n*-tuplæ caussæ conceptum formando: oritur *Mechanica pura*.		

Notandum autem est:

1. quod dum tale aliquod, quod in omni tempore est, dicitur *possibile*; ex. gr. dum dicitur quartam proportionalem, aut potentiam expo-

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

nentis q, aut formam aliquam in spatio, *possibilia* esse: ea *reipsa dari* intelligendum sit. Aliud est, si de eventu, qui in aliquo tantum tempore est, dicatur: e complexu enim omnium, quæ sunt, unicum in quovis temporis puncto experte resultatum est. At si ex $a, b, \ldots$ reipsa existentibus, (certo modo tali suppositis, ut abstrahendo a reliquis, nulla contradictio sit), eveniat B; tum B *respective* quoad $a, b, \ldots$ *possibile* dici potest; etsi e complexu omnium, quæ sunt (ita uti sunt), nunquam prodeat. *Absolute possibile*, id est si $a, b, \ldots$ complexum omnium quæ sunt, eo modo quo sunt, denotet; *reipsa etiam fit aliquando*.

2. Dum (pag. 62) *possibilitas mensurationis* per A ipsius B asseritur: I 71
demonstratur quidem *(ibidem)* dari talia $u, u', \ldots$ et $n, n', \ldots, m, m', \ldots$; ut pro $\frac{A}{n} = u$, $\frac{A}{n'} = u'$ &c. et $n' = 2n$, $n'' = 2n'$ &c. (nempe $u' = \frac{u}{2}$, $u'' = \frac{u'}{2}$ &c.); in casu commensurabilitatis (substituendo ipsi n integros ab 1 se invicem excipientes) prodeat aliquando tale n, ut $A = nu$, $B = mu$ sit; secus autem pro dictis $n, n', \ldots$ sit $A = nu$, $B = mu + \omega$ $(\omega < u)$, et $A = n'u'$, $B = m'u' + \omega'$ $(\omega' < u')$ &c. ...; at si reipsa exhibenda $u, u', \ldots$ et numeranda in B fuerint; supponi divisio ipsius A per quemvis integrum n debet; quod, si A quantitas ad rectam reducta sit, Geometria sine tentatione præstat, uti et quartam proportionalem exacte exhibet, posteaquam Arithmetica pro quantitatibus, etsi nonnisi in concreto expositæ essent, dari hæc demonstret, quamvis non semper exhibere valeat. Aliud est, si quantitates iam mensuratæ supponantur, atque ita expressæ proponantur: et aliud, si nonnisi in concreto datis lineis, ex. gr. linea b per lineam a dividenda esset (pag. 33), et quæratur B *tale mensum* unitatis, I 40
quale mensum b ipsius a est; aut b dividendum per lineam B esset, quærendo a, nempe cuius tale mensum est b, quam B est datæ unitatis; Arithmetica dari in hoc quoque casu resultatum probat, sed illud nonnisi peracta antea mensuratione exhibere potest, exacte in casu commensurabilitatis, secus vero cum errore dato quovis minore.

SPECIALITER vero *continentur in tomo primo* sequentia.

IN INTRODUCTIONE.

1. *Prospectus cognitionum* humanarum. *Propositio*, eiusque *formae*, *definitio*, *theorema*, *axioma*, *demonstratio*, *vocabula et veritates ultimae*, *scientia*, *systema*.

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
Historia, *philosophia*, *mathesis*, *physica* (externa, interna), *psychologia* (pura, empyrica), *aesthetica*, *scientia moralis* (pura, applicata), *Officium*, *ius*, *iura*, *Theologia* (a pag. 1 usque 6).	I	5—10
Axiomata (pagg. 6 et 7, *ubi ex* IV *deducitur modus apogogice concludendi*). *Logica* ad mathesim requisita: nempe præter prius dicta, *genus*,		11—12
species, *subdivisionesque* (pagg. 8 et 9); aliquod fundamentale (pag. 10, §. *C*);		13—14, 14
tum propositiones, *quae ex una sequuntur* (pag. 11, 1-mo); dein *conceptus aequivalentes* quid et quando sint (pag. 11, 2-do); atque (pagg. 12, 13)		15, 1. 16, 2.; 16—18
e duabus propositionibus quando et qualis fiat conclusio? (relatis omnibus casibus possibilibus, et (pagg. 14, 15) per axiomata demonstratis); *sorites*		18—20
(pag. 15); *conclusio* de n ad $n+1$ (pag. 16, §. *F*), *fundamentum limitis*		20, 21
(pag. 15, §. *E*).		20

IN CONSPECTU ARITHMETICAE GENERALE.

I. RADIX *e fundamento communi.*

Complexus, *pars*, *totum*, *pars indivellibilis*, nempe si complexus omnis eius, quod præterea est, in concreto sisti nequeat, nisi ea quoque adsit; *portio* (pag. 17).	22
* *Indivellibile partis*, *indivellibile totius est. Pars partis indivellibilis*, *indivellibile totius est. Portio portionis*, *portio totius est. Si p portio ipsius T sit: et reliquum ipsius T portio ipsius T est.* (pagg. 18, 19).	23, 24
Nihilum mathematicum, et *expers*, *punctum temporis*, *continuum* (pag. 19)	24
Aequalitas (absoluta, respectiva); quantitas (absoluta, respectiva) æqualitas respectiva *quoad contentum* (pagg. 20, 21).	25, 26
Quantitas cum quantitate: unde *maius*, *minus*, *demtio*; hinc *reductio ad formam temporis* (pag. 21). *Notio Arithmeticae* (pag. 22). Hinc	26—28
Quantitas cum qualitate parit ⊢⊣, ⊢⊣, et ⊣⊢, — (pag. 22—24). Hinc	28—30
Additio (quantitas complexa); ex additione *subtractio* (pag. 25). Hinc	31
Series arithmetica, *numerus*; *variae quaestiones* (pag. 27, 28). Hinc	33, 34
Mensuratio, *incommensurabilitas* (pag. 28) *limes; quantitas variabilis* (pag. 29). Hinc	34
	35
Fractio (pag. 29), tum *Unitas* (pag. 30). Annotatio *de multiplicatione linearum* (ibidem), *fractio vera*, numerus *integer; distinctio inter*	36
	37
> et ⊳, et quædam hoc concernentia (pag. 31). Ex his	37
Multiplicationis, ex hac *divisionis* conceptus (pag. 33), (extensus	40—41
pag. 106).	123
Et *proportionis geometricae* conceptus (pag. 34, aut pag. 65).	41, 75

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
In multiplicatione signa ⊢⊣, ⊢⊣, pariter in proportione (pag. 34).	I	42
Signa +, — in multiplicatione et divisione (pag. 35).		43
Specialia multiplicationis schemata (pag. 36, . . .); ubi (pagg. 37 et 38) de $\frac{0}{0}$ et $\frac{1}{\infty}$ prævia annotatio est.		43 &, 45—46
An semper detur factum, quotus? et aliæ quæstiones (pag. 39).		46—47
Quid si factores permutentur prius homogenei, tum heterogenei; *conceptus celeritatis*, et expositio conceptus quantitatum analogarum (pagg. 39, . . ., 41).		47—49
Duo divisionis schemata (pag. 42).		49
Per plures factores æquales, *multiplicationis* cum *divisione, filiae: potentia, radix, logarithmus* (sensu elementari) (pagg. 42, 43).		50, 51
II. TRUNCUM *arboris* constituit §. 35, pag. 43 incipiens, usque ad pag. 178, §. 36.		51 203
E resultatis æqualibus ad eorum æqualitatem, unde prodierunt, non concluditur (pag. 43).		51
Reductio quantitatum ad formam *temporis, rectaeve*; (imo quarundem ad circulum). * *Quantitas finita (absolute, respective)* (pag. 44).		52
Constat, continetur (pag. 45).		52
* Addita, etsi ⊢⊣, ⊢⊣ adfuerint quocunque ordine, *summam eandem praebent* (ibidem usque ad pag. 47).		53, 54
Datur *limes* (ibidem VI).		55
* Tempus quodvis continuum *gaudet dimidio* (pag. 48) et si dimidii semper dimidium accipiatur, dabili quovis tempore minus prodit (pag. 49).		55 56
* Si u multiplicetur per factum e factoribus numero n, quorum quivis $=2$: factum numerus quoad u erit (pag. 49. IX).		57
* Temporis continui Q, quod inter 2 puncta est, *quaevis portio certo numero accepta, superat ipsum* Q (pag. 50).		57
* Tempus tale (ut prius) *per quemvis integrum dividi potest* (pag. 50); omniaque dicta ad rectam applicari possunt (pag. 51).		58 59
Pro n integro, et α, β positivis, est $n(\alpha+\beta)=n\alpha+n\beta$ (pag. 51).		59
Ita $\frac{\alpha+\beta}{n}=\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}$; applicatio ad $\alpha-\beta$ (pag. 52).		59, 60
* Si e tempore T (vel recta) possit u numero n accipi, ita ut $\omega=0$ vel $<u$ supersit: ex eodem T $(n+1)u$ accipi nequeunt (pag. 52).		60
* *Quaevis quantitas ad unicum reduci potest* (pag. 53).		60
* Si $A=B$, est etiam $A=B$, id est $A'\doteq B'$ (per A', B' reducta A et B intelligendo); et conversa (pag. 53)		61

Hosted by Google

Ed II.
Tom. pag.

* Si A constet ex $a, b, \ldots$: est $A' = a' + b' + \cdots$ (etsi interminata sit reductio) (pagg. 54, 55). I 62, 63

Resultatum additionis subtractionisque quantitatum reductarum, *unicum*. Imo etsi $C \doteq Q$ et $a \doteq c$ uti sunt considerentur, undevis dematur a ex C et c ex Q: residua erunt $\doteq$-lia (pag. 55). 63

* Quantitatibus item ita ut sunt, sine reductione consideratis, et $\doteq$-litate terminata intellecta:

1. Si $A \doteq B \doteq C$: est etiam $A \doteq C$, (pag. 56). 64

2. Si $P \doteq Q$, et $p \doteq q$; ac p (portio ipsius P) ex P, et q (portio ipsius Q) ex Q, *undevis dematur*: erunt *illa, quae* ex P et Q *remanent*, æqualitate terminata *aequalia* (pagg. 57 usque 59). 64—67

Ut *resultatum multiplicationis divisionisque unicum* esse probetur: prius *de fractionibus* (mensuratione supposita expressis); et prius pro casu commensurabilitatis (a pag. 59 usque 62): nempe 67—70

1. *fractio, forma quoti exprimi potest* (pag. 59). 67

2. Si *per integrum multiplicetur numerator*, valor toties augetur, si *denominator*, valor toties minuitur; *si uterque (per eundem)* multiplicetur, valor manet.

3. Regula hinc *ad denominatorem eundem reducendi* (vide etiam pag. 396); (nota, unde *quae fractionum sit maior* dignosci queat). 429

4. *Multiplicatio fractionum*; unde *fractio fractionis*, et modus quo fractio, unius rei in fractionem rei alius mutari queat.

5. *Divisio fractionum.*

6. Fractio et pro casu terminorum non integrorum quotus est.

7. *Reductio ad datum numeratorem* vel *denominatorem.*

8. Etsi per fractionem eandem multiplicentur termini fractionis, valor idem manet.

Possibilitas mensurationis (pag. 62, XXI). 71

Datur quarta proportionalis (pag. 64. XXII). 72

Proportionis alia definitio (pag. 65). *In proportione duo priora, et duo posteriora sunt simul commensurabilia vel simul incommensurabilia* (pag. 66). 75

Proportionalis quarta unica est (pag. 66). 75

Definitio proportionis Euclidea, eiusque *cum dictis aequivalentia* (pag. 11 et pag. 67). 16

Quaedam de limitibus praevie necessaria (a pag. 68 usque 70). 77

1. Si $\omega \sim 0$: et $k\omega \sim 0$; imo e quotvis factoribus, quorum aliquis 0, factum ~ 0. *Quantitas omni dabili minor non existit* (pag. 69). 79—82

2. Si $\omega, \lambda \sim 0$: et $\omega \pm \lambda \sim 0$ (nisi $\omega \pm \lambda = 0$ sit). 80

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

3. Si $x \backsim a$, et $y \backsim b$: tum $x \pm y \backsim a \pm b$; et summa quotvis quantitatum ad limitem *tendentium tendit ad summam limitum.*

4. Si $x - y \backsim 0$, et $x \backsim a$, $y \backsim b$: tunc $a = b$.

5. Si $p > x > q$, et $p - q \backsim 0$: tum etiam $p - x \backsim 0$, et $x - q \backsim 0$.

6. Si $n \backsim \infty$: tum $\frac{n \pm 1}{n} \backsim 1$. Ita

7. $\frac{n}{n \pm 1} \backsim 1$.

8. Si a constans sit, et $s \backsim \infty$, atque $\frac{r+1}{s} a > x > \frac{ra}{s}$: tum $x - \frac{ra}{s} \backsim 0$.

De *resultato multiplicationis (atque certo sensu divisionis) unico* (a pag. 70 usque 75). I 82—87

9. *Ordo factorum (etsi* omnes *incommensurabiles fuerint, utcunque discerpta factorum imagine) non mutat factum.*

10. *Factor b cum nullo factore a + c (pro c non* 0) *factum illi, quod cum a efficit, aequale producit.*

11. Si $x \backsim a$, et $y \backsim b$: tum $xy \backsim ab$; et *limes facti e quotvis eiusmodi factoribus est factum limitum.*

12. *A divisum per B dat quotum unicum q*; et $\frac{A}{q} = B$, atque $A = Bq$, et $\frac{A}{B} B = A$, item $\frac{A}{q} = A \frac{1}{q}$.

13. Si $mu =$ vel $\backsim B$, et $nu = A$, atque $mv =$ vel $\backsim D$, et $nv = C$: tum $A : B = C : D$, adeoque *proportio ita designari potest.* Atque si $B : A = Q$ sit: B per AQ, et D per CQ exprimi poterit. *Conversim quoque*, si $A : B = C : D$, aut $B = AQ$ et $D = CQ$: *proportio est* (pagg. 75, 76). 87

14. Si $x \backsim a$, $y \backsim b$, et nec y nec $b = 0$: tum quodvis ipsorum $\frac{x}{y}$, $\frac{x}{b}$, $\frac{a}{y} \backsim \frac{a}{b}$ (pag. 77). 89

* In præc. 0 e valoribus divisoris excludebatur: quidsi divisor $\backsim 0$? (pag. 79). 91

* *Quidsi tam dividendus quam divisor* $\backsim 0$? quædam *de quoto simul variatorum praevie* (a pag. 80 usque 82). 92—94

1. Si $\frac{u}{u'} \backsim 1$: tum pro utvis magno N datur $u - u' < \frac{u'}{N}$.

2. Si $\frac{u}{u'} \backsim 1$: tum etiam $\frac{u'}{u} \backsim 1$.

3. Si ω' pro dato quovis N potest $< \frac{u}{N}$ fieri, ac $\frac{u}{u'} \backsim 1$: tunc etiam $\frac{u + \omega'}{u'} \backsim 1$.

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

4. Imo etiam $\frac{u'}{u+\omega'} \backsim 1$, et $\frac{u'+\lambda}{u+\omega'} \backsim 1$, si $\lambda < \frac{u'}{N}$ fieri potest.

5. Si $\frac{u}{u'} \backsim 1$, ac $\frac{v}{v'} \backsim 1$: etiam $\frac{u+v}{u'+v'} \backsim 1$.

6. Si $\frac{u}{u'} \backsim 1$, ac $\frac{v}{v'} \backsim 1$: etiam $\frac{uv}{u'v'} \backsim 1$.

7. Si $\frac{u}{u'} \backsim 1$, ac $\frac{u'}{v} \backsim 1$: etiam $\frac{u}{v} \backsim 1$.

Quotus formæ $\frac{\alpha\beta\gamma\ldots}{abc\ldots}$ utcunque discerpi valore incolumi potest (pagg. 82, 83). I 94—96

De potentiis et operationibus earum primariis (a pag. 84 usque 94); 96—109
additis (pagg. 105 . . . 107, 121—124,
et 128, 129). 147—149

Quod *potentia possibilis* sit, *sive commensurabilis sit exponens q sive non, et sive* ⊢⊣ sive ⊢ fuerit:

1. Si q *integer* ⊢⊣ et >1 sit.

2. Si $q=1$.

3. Si $q=0$.

4. Si q integer ⊢; deinde *non integer*, prius ⊢⊣, tum ⊢, *sed quantitas commensurabilis* fuerit (pagg. 84, 85). 96—98

5. Sed quæritur (ad præc.) *num detur* tale A, ut $aa = AAA$? (pag. 85). 98

6. *Maius ad idem elevatum, et idem ad maius elevatum fit maius* (pagg. 86, 87); et pro *exponentis valore eodem, potentia eadem est*; unde 99, 100
potentiae ad exponentes denominatoris communis reduci possunt (pag. 87). 100

7. Si q *incommensurabilis*, et prius tam q quam a ⊢⊣ fuerit (pag. 87). 101
Casus, si $a=1$; si $a<1$ (pag. 88). Si q ⊢ fuerit (pagg. 88 et 89); unde 101, 102
potentia e divisore in dividendum poni, exponente in oppositum mutato potest (pag. 89). 102

8. Quodvis N sive $>$ sive <1 fuerit: $\sqrt[m]{N} \backsim 1$, si $m \backsim \infty$ (pag. 89). 102

9. $a^q\, a^\varrho = a^{q+\varrho}$ (pag. 89). Et $a^q : a^\varrho = a^{q-\varrho}$ (pag. 90). 103, 104

10. Si $a^n = B^m$: non solum $a^{\frac{n}{m}} = B$, sed etiam $B^{\frac{m}{n}} = a = B^{\frac{1}{q}}$ (pro $q = \frac{n}{m}$). Et si $\frac{n}{m} \backsim q$, et $a^q = B$, est etiam $B^{\frac{1}{q}} = a$, atque si $B^{\frac{1}{q}} = a$, est etiam $a^q = B$; et sive $\sqrt[q]{B}$, sive $B^{\frac{1}{q}}$ scribatur, perinde est (pag. 90). 104, 105

11. $(\sqrt[m]{B})^n = \sqrt[m]{B^n}$; et

12. $\left(\frac{b}{c}\right)^q = \frac{b^q}{c^q}$ (pag. 91). 105

13. $(a^q)^p = a^{pq}$ (pagg. 91 et 92). 106, 107

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
Hinc $\sqrt[k]{a^q} = a^{\frac{q}{k}}$ (pag. 92).	I	107
14. Si $a < 1$, aut exponens uterque (aut unus tantum) $\mapsto$ fuerit; (pagg. 92 et 93).		107, 108
Si $\frac{\alpha}{\beta} = q$, et $a^\alpha = b^\beta$: est $a^q = b$; et si $a^{\frac{\alpha}{\beta}} = b$, est $a^\alpha = b^\beta$ (pag. 93).		107, 108
15. $(abc\ldots)^q = a^q . b^q . c^q$. Et $\sqrt[k]{abc\ldots} = \sqrt[k]{a} . \sqrt[k]{b} . \sqrt[k]{c}\ldots$		
16. Si $\frac{n}{m} = q$, consideratur potentia pro a positivo et negativo, prouti m par aut impar accipitur. Origo imaginarii (pag. 94).		108, 109
De compendiis operationum per logarithmos (pagg. 95, 96).		109—111
De expressionis valore, mutata unitate, et de expressionibus quoad diversas unitates factis, ad eandem reducendis; (quum omnia dicta hucusque certæ determinatæ unitati positivæ innixa sint) (pagg. 96 usque 105).		111—121
Exempla aequationis sectionum conicarum (pagg. 101 usque 103); ubi *nomina primaria sectiones conicas concernentia* (pagg. 101, 102) definiuntur.		116—118 116, 117
Quantitas *concreta* et *abstracta* (pag. 97).		111
De imaginariis, atque (his admissis) calculo radicalium, (a pag. 105 usque 118: cui addendum pagg. 128, 129, 9. 10. 11. et 12.).		121—136 147—149
Hucusque Unitas positiva ponebatur: sed prouti superius quantitas cum quantitate (nempe certa cum determinatione) produxit positivum et negativum; ita si quantitatem a, ut radicem e quovis B spectare libeat: oriuntur *pure imaginaria*, quorum realitas multiplicationi quoad -1 innixa est (pag. 105).		121
Regulae admissis imaginariis, atque *conceptus multiplicationis extensus* (pag. 106).		122—123
Expressionum aequalitas varia (pag. 107).		123—124
Porro significatio signi $\sqrt{}$; tum		
1. $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\ \sqrt{-1}$; atque $\sqrt{a}\ \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (pag. 108).		124
2. Radix pure imaginaria exprimitur (pro P positivo) per $\sqrt[2n]{-P} = \sqrt[2n]{P}\ \sqrt[2n]{-1}$; atque $\sqrt[2n]{-1}$ (pro a, b, realibus quoad $+1$) potest per $a + b\sqrt{-1}$ exprimi (a pag. 108 usque 110, prima tantum Trigonometriæ elementa requirens). Nempe pag. 109 radices n-ti gradus tam ipsius $+1$ quam ipsius -1 exhibentur omnes, numero n. Et (pag. 110) exemplis illustratur.		125—127 125, 126 126, 127
Hinc (item pag. 110) si $\sqrt[m]{P}$ sit p, erit $\sqrt[m]{-P} = p(a + b\sqrt{-1})$;		126, 127
$\sqrt[m]{-P} . \sqrt[m]{Q} = \sqrt[m]{-PQ}$ (pagg. 111, 112).		128, 129
$\sqrt[n]{A}\ \sqrt[n]{B}\ \sqrt[n]{C}\ldots = \sqrt[n]{ABC}$ (etsi imaginaria adfuerint).		
At si id tantum constet, quod $z = \sqrt[m]{P}$, et $y = \sqrt[m]{Q}$; ex eo $yz = \sqrt[m]{PQ}$ tantum sequitur.		

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
3. Si $\sqrt[m]{a} = x$: est x (= sed non (=) $\sqrt[mn]{a^n}$ atque si $x = \sqrt[m]{a}$, est $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[mn]{a^n}$; et hinc $\sqrt[2.5]{-1} = \sqrt{\sqrt[5]{-1}} = \sqrt{-1}$, atque $(-1)^{\frac{1}{2}} =$ sed non (=) $(-1)^{\frac{2}{4}}$ (pagg. 112, 113).	I	130
* *De elevatione imaginariorum* (a pag. 113 usque 118).		130—136
4. Quæstio ad $\sqrt[2n]{-1}$ redit. Est vero $2n$, aut potentia ipsius 2 integra, aut factum e tali, et numero impari; $\sqrt[2p]{-1}$ nonnisi ad $m2^p$ elevatum (pro m integro) dat reale, et quidem $+1$ pro m pari, et -1 pro m impari (pag. 113).		130, 131
5. Etiamsi $p < q < r < \ldots$ potentiæ integræ ipsius 2 fuerint: $\sqrt[p]{-1}\ \sqrt[q]{-1}\ \sqrt[r]{-1} \ldots$ nullum reale dat (pag. 114).		131, 132
6. Radices exponentis 2^n ipsius -1, eædem sed via a pag. 108 diversa, item sub formam $a + b\sqrt{-1}$ venientes, exhibentur (pagg. 115, ..., 118).		125 132—135
7. *Pure imaginaria a realibus nonnisi determinatione* (uti ⊢⊣ et ⊢⊣) *differunt*; *nec scientia, quae praecisione evidentiaque gloriatur, meris imaginibus nullo originali gaudentibus contenta esse potest* (pag. 118). *Et aeque visibiles sunt, etsi imaginarium in exponentem ascendat* (pag. 168). *Exemplum, quo in Geometria visibilia fiunt imaginaria, exhibetur* (pag. 177, 7.).		135, 136 193 202
De regulis additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionisque quantitatum complexarum (etsi imaginaria adfuerint) (a pag. 118 usque 130).		136—150
[1.—3.] *Regula additionis* traditur (pag. 118.) Quod hoc pacto summa quæsita prodeat, demonstratur prius de realibus (pag. 119,) tum etsi imaginaria adfuerint (pagg. 120, 121.)		136 136—138 138—140
[4.] *Subtractio demonstratur* pag. 122. Quod oppositum subtrahendi ita dicto minuendo addendum sit, demonstratum est (pag. 26).		140 31
[5.] *Multiplicatio demonstratur* (pagg. 122 ... 126).		140—146
[6.] *Divisio demonstratur* (pag. 126).		146
Exempla quaedam.		
7. $(a+b)(a+b)$ et $(a-b)(a-b)$; dein $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$; $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$; $[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ (pag. 127). Et ibidem		146, 147
8. demonstratur summam qualiumvis realium et pure imaginariorum, per qualemvis eiusmodi summam divisam, dare quotum.		

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

9. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^3$, seu $\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right]^3$ (pag. 128), ubi α radicem ex -3 denotat sensu (pag. 108). I 147—148 124

10. Si $a\sqrt[p]{P^n}+\frac{1}{b\sqrt[q]{Q^m}}$ multiplicandum sit per $b\sqrt[q]{Q^m}-\frac{1}{a\sqrt[p]{P^n}}$: erit factum

$$ab\sqrt[pq]{P^{nq}Q^{mp}}-\frac{1}{ab\sqrt[pq]{P^{nq}Q^{mp}}}=$$
$$=ab\sqrt[pq]{P^{nq}Q^{mp}}-(ab)^{-1}P^{\frac{-nq}{pq}}\cdot Q^{\frac{-mq}{pq}};$$

(pag. 128). Unde etiam regula liquet: nempe 148

$$a\sqrt[p]{P^n}.b\sqrt[q]{Q^m}=ab\sqrt[pq]{P^{nq}Q^{mp}}.$$

11. Modus factorem signo $\sqrt{\ }$ præpositum introducendi, aut illum, qui signo subest, educendi (pag. 129). 149

12. $A\sqrt[p]{P^n}:B\sqrt[q]{Q^m}=\frac{A}{B}\sqrt[pq]{\frac{P^{nq}}{Q^{mp}}}$ (ibidem).

13. Divisio ipsius x^n-1 per $x-1$, et

14. ipsius $1-x$ per $1-x$. Et

15. hinc *summa seriei geometricae*, et casus, ubi formula summæ fit $\frac{0}{0}$; tum limes summæ, si exponens <1 sit, nec non complementum quoti in exemplo posteriore (pagg. 131 et 132). 151, 152

16. *Seriei Arithmeticae terminus generalis et summa.* Ex. gr. numerorum imparium summa usque ad n-tum inclusive, est n^2 (pag. 132). 152, 153

[17. Series Arithmetica ordinis m-ti (pag. 133).] 153, 154

18. Si $(a+b)$ per se multiplicatum item per $a+b$ multiplicetur, atque hoc continuetur, donec $(a+b)^n$ fiat: quæritur productum (pag. 134). 154

Transformatio ipsius $(a+b)^n$ in $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n a^n$. Et simili modo *tollitur quivis factor e quovis termino binomii ad exponentem elevati* (pag. 134). 155

Demonstratio binomii pro n integro positivo (pagg. 135 . . . 137).* *Alia demonstratio* (qua etiam *numerus combinationum* exhibetur) (pagg. 137 . . . 140). 156—158 158—161

Demonstratio formulae binomialis pro exponente qualivis (adhucdum *excluso imaginario*), (a pag. 141 usque 150). Prius [1.—2.] lex, qua terminorum signa pro $+x$ et $-x$ cum $+e$ et $-e$ combinatis prodeunt, exponitur; tum [3.—5.] *exponente coefficientis* ab *exponente seriei* distincto, demonstratur seriem eiusmodi, pro $x<1$, ad limitem tendere, atque limitem esse $(1+x)^e$. 161—172

6. Si $x>1$, tum $(1+x)^e$ ita exprimi nequit (pagg. 151 et 152). Pro $x=\pm 1$ videatur (pagg. 303 et 304). 172—174 333, 335

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

7. Aliquid *de seriebus infinitis, quarum incrementa terminorum* tendunt ad 0, cum exemplis quibusdam (pagg. 152, 153). I 175—177

8. Si $\frac{n}{m} \backsim q$: *de* $(a+b)^q$ *quoque valet formula binomialis.* 178—181

9. *Etsi binomium imaginarium contineat, valet* (pag. 156). 181

10. *Si exponens binomii vera fractio* $\frac{n}{n+\nu}$ *sit,* formula coefficientis μ-ti (pag. 157). 181

De logarithmi expressione per seriem, et potentiae logarithmique conceptu sublimiore, atque quantitatis imaginariæ *ascensu in exponentem* (a pag. 157 usque 178). 182—203

* Si in $(1+x)^n$ ponatur $x=\frac{1}{m}$, atque $n \backsim \infty$: tum $\left(\frac{m}{m+1}\right) \backsim 0$. At

1. si etiam $m \backsim \infty$, et ab n certo modo dependeat; ex. gr. sit $m=n$; tum $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ gaudet certo limite, in posterum e dicto, *basi* logarithmorum, qui *naturales* vocantur. Etsi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ad q elevetur, series, quæ prodit, $\backsim e^q$ (pagg. 158, 159). 183

2. Etiam e quantitate reperitur logarithmus (pagg. 159..., 162). 183—187

3. *Modulus systematis* logarithmici reperitur (pag. 162). 187

Si vero *duae bases* fuerint B et C, et log. N quoad B sit b, ac log. N quoad C sit c; est $\frac{b}{c}=\frac{\log. C}{\log. B}$.

Log. $0=-\infty$ (pag. 163). 188

* Porro in serie ipsum e^{cb} (per præc.) exprimente substituatur $\alpha+\beta$ aut $\alpha-\beta$, aut $\alpha\beta$, vel $\frac{\alpha}{\beta}$, prius pro α, β realibus (pag. 163); tum etsi 188, 189
imaginaria contineant (pagg. 164 ... 167): animadvertitur, has series analogis subesse operationibus, ac si exponentes ipsius e reales essent; generaturque *conceptus potentiae logarithmique (sensu sublimiore)* (pagg. 167, 168). 189—192 192, 193

Logarithmus realis hoc sensu quantitati negativae haud competit (pag. 169), *sed elementaris competit* (pag. 170). 194, 195

Datur pro quibusvis realibus A, B tale x, ut $x=\log. (A+B\sqrt{-1})$ (pagg. 170 ... 173). 195—198

Ubi etiam *series sinum et cosinum arcus* n-tupli *exprimens exhibetur.* Et si $K(\cos. a+\sqrt{-1}.\sin. a)=A+B\sqrt{-1}=e^{k+a\sqrt{-1}}$ (pro A, B, K, k, et a realibus): tum $K^2=A^2+B^2$ (pagg. 172 et 173). 197, 198

Logarithmi imaginarii quantitatis negativae innumerabiles (pag. 173). 198

Pro quovis K positivo datur tale k, ut $e^k=K$ (pag. 174). 199

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

Exempla.

1. Logarithmi ipsius 1 innumerabiles, inter quos solum zero est realis.

2. $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, et $\pi\sqrt{-1}$ est unus logarithmorum naturalium ipsius -1.

3. Valor ipsius $e^{\sqrt{-1}}$.

4. $\sqrt{-1} = e^{a\sqrt{-1}}$, et $a\sqrt{-1} =$ log. nat. $\sqrt{-1}$.

5. Valor ipsius $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ (pag. 176). I 201

6. Quid per cos. $a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$, et sin. $a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ 201, 202
intelligatur (pagg. 176, 177, 456). II 14

* 7. *Applicatio certa imaginariorum ad Geometriam* (pag. 177). I 202

8. Log. (-2) — log. (-3) certo sensu $= \log. \frac{-2}{-3} = \log. \frac{2}{3}$
(ibidem).

III. CORONA *arboris Arithmeticae* incipit a §. 36, pag. 178, et desinit pag. 442. 204—478

Functio, variabilis, constans (pag. 178). Rami, in quos corona dividitur (pagg. 179, 180). 204
205, 206

Dein

1. *Functionis divisio* (pagg. 180, 181) *in algebraicam, transcendentem, absolutam*; 206

2. *designatio functionum* (pagg. 181 . . . 183), 207, 208

3. Si in $A(x)$ substituatur $x + i$, et quæratur valor functionis $A(x+i)$ (*Probl. Taylorianum*); et porro comparetur augmentum functionis cum augmento simultaneo ipsius x; pervenitur ad *rationem ultimam augmentorum evanescentium iuxta* NEWTONUM, nempe si

$$\frac{A(x+i) - A(x)}{i} \backsim A'(x),$$

dum $i \backsim 0$ (adeoque priusquam $= 0$ fieret). Insignis limes iste est, e quo et calculus differentialis deduci potest (pag. 183). Sed 208

4. Evidentius simpliciusque fit, si (pag. 184) ipsi x substituatur prius 0, dein $\dot{x}$, id est $\frac{x}{n}$, tum $2\dot{x}$, $3\dot{x}$ &c., atque valoribus prodeuntibus post se invicem positis, quilibet cum sequente comparetur (quoad incrementum); et incrementa ista novam seriem forment: seriei huius summa in aperto erit; atque si

5. Alia series occurrat, e qua eodem modo pro iisdem x et n de-

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

ductæ simili modo seriei, termini t et T eidem $m\dot{x}$ (pro quovis eodem m) respondentes, aut sint æquales, aut $\frac{t}{T} \backsim 1$, pro $n \backsim \infty$: facile patet, summam utriusque esse æqualem, et si unius functionum valor notus sit, et valorem alterius innotescere (pagg. 184 . . . 186). I 209—212

6. Etsi serierum e duabus functionibus derivatarum termini, certæ parti ipsius x (sed quæ $\backsim 0$) respondentes non *aequipolleant* (pagg. 187—188, et 269): valet in præc. dictum. 213, 214, 301

7. Datur pro utvis magno N integer n idem pro omnibus m, ut $u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) < \frac{a(m\dot{x})}{N}$ (pagg. 188, 189). 214, 215

8, [9.] *Integrale, differentiale* (pagg. 189 et 269). *Limites integralis, differentiale verum* seu *elementum, functio summatrix, differentiale strictius,* vel *strictum*, per ∂ præpositum denotatum, ut *coeff. differentialis* seu *derivata* per ∂ (pagg. 190, 191). 215, 301 216, 217

10. Si functio absoluta, cuius valor quæritur, non in concreto, sed nonnisi per functionis limitem detur: hunc dari demonstrandum est (ut fit pag. 230); utcunque sit, sæpe differentiale functionis $A(x)$ quæritur, per duas functiones tales $U_1(x)$ et $U_2(x)$ ut 261

$$U_1(m\dot{x}) - U_1((m-1)\dot{x}) < A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) < U_2(m\dot{x}) - U_2((m-1)\dot{x}),$$

et

$$\frac{U_1(m\dot{x}) - U_1((m-1)\dot{x})}{U_2(m\dot{x}) - U_2((m-1)\dot{x})} \backsim 1;$$

si iam

$$\frac{U(m\dot{x}) - U((m-1)\dot{x})}{B(m\dot{x}) - B((m-1)\dot{x})}$$

quoque $\backsim 1$, et simul

$$\frac{u(m\dot{x})}{U(m\dot{x}) - U((m-1)\dot{x})} \backsim 1,$$

atque $u(m\dot{x})$ gaudeat forma differentialis stricti: habebitur differentiale ipsorum $A(x)$ et $B(x)$ commune (pag. 191). 217, 218

11. Differentialia æquipollentia functionibus æqualibus, et functiones æquales differentialibus æquipollentibus gaudent. Idem de derivatis; atque nec integralia differentialium æquipollentium præter constantem differre possunt (pagg. 191, 192). 218, 219

* 12. Variabiles plures $x, y, z, \ldots$; et pro variabili absoluta x denotationes $y(m\dot{x})$, $z(m\dot{x})$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ (pagg. 192, 193); differentiale, derivata functionis plurium variabilium (pag. 194). 219, 220 220, 221

13. Differentialia et derivatæ quoad variabiles diversas accepta (pag. 194). 221

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

14. *Differentiale purum, derivata pura*: $\int \dot{z}\, \alpha(z)$ seu $\int \alpha(z)$ (quoad z) est functio illa primitiva, cuius derivata quoad z est $= \alpha(z)$ &c. (pagg. 194, 195). I 221, 222

15, [16.] Differentiale et derivata partialis. Derivata n-ta, differentiale n-tum (pag. 195). 222

17. Quotvis fuerint variabiles u, v, ab eadem absoluta x (saltem simultanea positione) dependentes, quarum differentialia sint $b(x)$, $c(x)$: quoad quasvis variabilium u, v, ... accipiantur differentialia $b_1(x)$ ipsius u, $c_1(x)$ ipsius v, &c. seriei incrementorum summa eadem prodit. Ita $b(x)$, $c(x)$ et $b_1(x)$, $c_1(x)$, pro terminis generalibus accepta summam eandem dant; pariter $b(x) + c(x)$, et $b_1(x) + c_1(x)$. Unde etiam differentiale seriei convergentis $B(x) + C(x) + \ldots$ est summa differentialium functionum singularum. Derivataque summæ seriei quoad eandem variabilem accepta est summa derivatarum singularum, item quoad eandem variabilem acceptarum (pagg. 195, 196). 222—224

In quovis termino generali seriei incrementorum dictæ, cuivis quantitati substitui ei æquipollens potest, si nonnisi summa spectetur. Atque hinc pro reperiendo integrali, licebit differentiali aliud æquipollens differentiale purum, quod integrari queat, substitui. Idem de derivata (pag. 197). 224

18. *Exempla* faciliora pro Tyronibus (primis elementis imbutis) *applicationis theoriae* ad *Geometriam* et *Mechanicam* (a pag. 197 usque 242); ubi §. 37 pro exemplis supposita demonstrantur, et quædam inde deducuntur, imo *quoad curvas etiam primaria* exponuntur. 224—273

[VI.] 1. (usque 5). Supponuntur (§. 37) demonstrata, exponunturque certarum functionum absolutarum simpliciorum differentialia derivatæque, adeoque et horum integralia (præter constantem) (pag. 198). *a)—d)* 225, 226

5. Si duæ series incrementorum (eiusmodi ut dictum est) fuerint, et unius summa A, terminus generalis $a(m\dot{x})$, alterius summa B, terminus generalis $b(m\dot{x})$ fuerit; atque $\frac{b(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = \beta$: tum $A = \frac{B}{\beta}$ (pag. 198). *e)* 226, 227

6. Ex $\partial \log. u \doteq \frac{\dot{u}}{u}$, est $u\, \partial \log. u \doteq \dot{u} \doteq \partial u$; per quod functio, etsi variabilis in exponente sit, differentiari potest; atque hinc $\int \alpha^{ax} = \frac{\alpha^{ax}}{a \log. \alpha}$. *f)*

7. pag. 199. Si *derivata* fuerit summa terminorum numero certo, ad exponentem positivum *integrum*, adeoque potentia hæc constet e certo numero terminorum, qui singuli integrari possint: erit summa integralium terminis singulis respondentium, integrale derivatæ datæ. Si vero derivata fuerit series convergens infinita formæ $Ax^a + Bx^b + \cdots$ exponente ab aliquo incipiendo unitatem superante et semper crescente: *g)* 227—228

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

summa integralium terminorum singulorum, integrale totius derivatæ, et pariter series convergens erit.

Literæ puncto insignitæ, eadem sine puncto signo ∂ præposito, imo et quodvis aliud, quoad quamvis variabilium expressum, ei æquipollens, substitui potest; quo pacto derivatæ sæpe *purae (salvo integrali)* reddi possunt (pag. 200), nempe si $\dot{z} = v\dot{u}$, est $\int p$ (quoad z) $= \int pv$ (quoad u). I 228, 229

Eadem pag. 200 [VII.], *derivata areae* in plano, derivata *lineae in plano, soliditatis per revolutionem lineae* dictæ generatæ, referuntur. 229

Derivata lineæ in genere est (pag. 268). 300

Pag. 201. *Derivata distantiae centri gravitatis* a certo plano quoad 229

abscissam x; atque pag. eadem, et 216 . . . (etiam pag. 226) referuntur 230, 247, 258

differentialia motum rectilineum concernentia, denotationibus pag. 193 220

adhibitis.

Pag. 203. VIII. 1. $\int \dot{v}$ sive $\int 1$ (quoad v) $= v$. 232, *a)*

2. Casus differentialis negativi, atque ubi valor ipsius $A(x)$ plane *b)*

pro $x = 0$ quæritur.

3. De casu, ubi $A(0) = \infty$. *c)*

4. De casu, ubi differentiale (nempe terminus seriei generalis) pro *d)*

$x = a$, id est terminus seriei μ-tus, 0 vel ∞ fit (puncta discreta inferius pagg. 269, . . .). 301, . . .

Pag. 205. IX. 1. Si ordinata $y = ax^p$; area $= \int y$ (quoad x) $= \frac{ax^{p+1}}{p+1}$ 235, *a)*

(nisi $p = -1$).

2. Area inter hyperbolam æquilateram et q (pag. 103), atque ordi- *b)* 118

natam y et asymptotam. Soliditas per revolutionem circa asymptotam orta $= \pi$. Exemplum pro diversis functionibus summatricibus eidem differentiali respondentibus, quæ tamen cum constantibus concernentibus eadem integralia præbent (pagg. 205 et 206). 235—237

* Pag. 207 usque 209. Areæ dictæ hyperbolicæ sunt logarithmi na- 237—239

turales abscissarum e centro acceptarum: ubi (pag. 207, 4) demonstra- 238, *d)*

tur, derivatam (quoad z) ipsius log. nat. z esse $\frac{1}{z}$, (imo pag. 210, etsi 241

z non ipsa variabilis absoluta, sed qualisvis eius functio fuerit). Modus constantem in simili casu quærendi. De logarithmis abscissarum negativarum (pagg. 209 et 210). 240, 241

Pag. 211, 5. Soliditas paraboloidis, ellipsoidis, hyperboloidis. 242, *e)*

6. Si u et v derivatæ quoad eandem variabilem sint, et $\frac{u}{v} = k$, est *f)*

$\int u = k \int v$. Applicatio.

Pag. 212. 7. E derivata arcus circuli quoad tangentem (pag. 309 de- 243, *g)*, 338

ducta) series Leibnitiana peripheriam exprimens (vide etiam pag. 303). 334

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
Pag. 213. [8.] Longitudo arcus circuli per integrationem formulæ	I	244 *h)*
(pag. 200).		229
Pag. 214. [9.] *Catenaria*, eiusque rectificatio.		245 *i)*
Pag. 214. Exemplum integrationis derivatæ superficiei per revolutionem lineæ circa axem ortæ.		246 *k)*
[X.] *Exempla Mechanica* (a pag. 215 usque 242).		246—273
Pagg. 215 et 216. *Conceptus vis momentaneae et constanter agentis.*		246, 247
Pagg. 217 usque 219. Demonstrantur differentialia (pag. 201).		248—250, 230
Pagg. 219, . . ., 223. Exclusa prius medii resistentia, et vis w prius ab s tum a t dependens. *Motus difformiter acceleratus* ex. gr. per gravitatem.		250—255
Pag. 221. Formula præc. velocitatem etiam ultra centrum exhibet.		252, 253
Pag. 222. Altitudo competens celeritati minimæ, qua globus de superficiei terræ verticaliter explodendus esset, ut nunquam redeat, radio terræ æquatur.		254
Pagg. 222 et 223. Si vis w functio temporis fuerit.		254, 255
Pagg. 223 usque 229. Si vis w functio velocitatis v fuerit. *Prisma resistentiae, exponens resistentiae.* Tempus, celeritas, spatium in medio uniformiter denso. Applicatio ad corpora labentia.		256—260
Pagg. 229 usque 234. [XI.] Conceptus *centri gravitatis geometrici.*		261—266
Functionemque (ut dictum pag. 191 est) per limitem datam valore absoluto gaudere, et eius differentiale (pag. 201) esse demonstratur.		217
		229
Pagg. 234 usque 237. *Exempla*: centrum grav. *segmenti parabolae, paraboloidis, sphaerae, arcus circuli, segmenti circuli, superficiei sphaericae* pro certa abscissa.		266—268
Pag. 237. *Superficies per revolutionem circa axem generata = lineae, cuius revolutione generata est, per distantiam centri grav. ab axe et per* 2π *multiplicatae. Soliditas = areae, per peripheriam centro grav. areae descriptam multiplicatae.*		268, 269
* Pagg. 238 usque 241. [XII.] *Centrum oscillationis*, et *centrum percussionis.*		269—273
Pagg. 242 usque 268. [§ 37. I—IV.] Demonstrantur *formulae differentiales* (pag. 197 suppositæ, præter ea, quæ pagg. 207, . . . 217, . . . 229, . . .		274—300
		225, 238, 248,
demonstrantur).		261
I. Si $u = A(x)$, est $\partial(u^k)$ quoad $u = ku^{k-1}\dot{u}$, &c. Datur vero pro quovis N tale n idem pro omnibus, ut requiritur (pagg. 244, . . .).		276, . . .
II. $\partial uv = u\partial v + v\partial u$, pro $u = A(x)$ et $v = B(x)$; $\partial\left(\frac{u}{v}\right)$ autem $= \frac{v\partial u - u\partial v}{v^2}$ &c.		281, 282

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
III. Si arcus x circuli sit variabilis absoluta: *differentialia sinus, cosinus, tangentis* (pagg. 250 usque 253; quoad sinum versum vide pag. 327).	I	282—286
		357
Derivata functionis trigonometricae unius quoad aliam (pag. 253),		286
Ibidem et pag. 254 differentiale arcus quoad functiones trigonometricas deducitur.		286, 287
IV. Pagg. 254 usque 260. Si pro abscissa x, arcus ipsi $\dot{x}$ respondens s, et chorda c sit: fit $\frac{s}{c} \backsim 1$, si $n \backsim \infty$. *Curva (concava, convexa), tangens, subtangens, normalis, subnormalis. Curva gaudet tangente in quovis puncto*; tangens cum ordinata non coincidens secat ordinatas omnes &c.		287—292
Pagg. 260 usque 264. *Limes summae chordarum* (*qui per longitudinem arcus* intelligitur), *utcunque sumantur chordae, idem est. Differentiale* et *derivata arcus.*		292—296
Pag. 264. *Differentiale areae*, et pag. 265 *differentiale soliditatis per revolutionem generatorum*, item *differentiale superficiei talis pro curva concava*, et (pag. 266) *pro convexa* &c.		296, 297
		298
Pag. 268. *Lineae cuiusvis* (etsi non in planum cadat) *differentiale* et *derivata.*		300
Pag. 269. [V.] Dum expressio differentialis pro certo $m\dot{x}$ (pag. 205) fit 0 aut ∞ vel $\frac{0}{0}$: *puncta* certa *discreta, singularia* ob certas qualitates dicta.		301, 235
Pag. 272 usque 283. [VI.] Exemplis hæc illustrantur. *Expressio tangentis, subtangentis, normalis, subnormalis, punctum flexus, cuspis primi, secundi generis, punctum multiplum, izolatum. Asymptota* (pagg. 283 usque 286).		301—315
		315—318
Pag. 286. VII. De $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.		318
Pag. 288. [VIII.] *De ordinatis ex uno puncto* tanquam centro (vel polo) *euntibus*: *spiralis Archimedea* et *logarithmica* (abscissa u in peripheria accepta).		319
Pag. 289. [IX.] Theorema *Taylorianum*: 1. de casu, quo ope theorematis binomialis demonstrari potest, 2. generaliter iuxta *Lagrange* (a pag. 291 usque 294); additis *complementi* finibus, intra quos contineri debet, *apud quemlibet terminum subsistere libuerit.* Prius pro una variabili (pag. 311 pro pluribus).		321
		323—326
		341
Pagg. 294 usque 311 applicationes variæ: *Complementum generale formulae binomialis* (pag. 295). Ibidem 4. de *facto e factoribus, quorum numerus* $\backsim \infty$ (ut in formula binomiali).		326—341
		326, 327
5. Applicatio ad $(1+x)^e$, pro $x = \pm 1$ et exponente negativo et > 1 (pag. 299).		330

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
6. *Formulae* ipsius $(1+1)^e$ pro $e<1$, *complementum* $\backsim 0$ (301).	I	332
7. (pag. 302) si e fuerit negativum et >1, *complem.* $\backsim \infty$; at $\backsim 0$		332
semper, excepto si e negativum et non <1 *sit* (pag. 303); nimirum		333
8. si $e=-1$, series nullius valoris est.		
9. Hinc (ex pag. 212) *illustratio seriei Leibnitianae* ex $(1+z)^{-1}$ pro $z=1$ deductæ.		244
10. Pro $(1-1)^e$ valet (pag. 304 usque 307). Pag. 307 animadvertitur,		335—337
$(1-1)^{-m}$ *exhibere seriem arithmeticam ordinis* $(m-1)$-ti (pag. 133).		153
11. Adhuc unum exemplum pro facto e factoribus innumerabilibus.		
12. *Demonstratio criterii convergentiae Olivieriani.*		
14. pagg. 311 usque 314. *Taylorianum ad plures variabiles* applicatum.		341—344
Pag. 315. X. Applicatio Tayloriani ad *maximum minimumve. Exempla* (pagg. 316 usque 318).		345 346—348
Pag. 319. XI. usque 329. Applicatio Tayloriani *ad radium curvaturae*; e quo conceptus *evolutae evolventisque* nascitur. *Linea l lineam L tactus ordine μ-to tangere* quando dicitur? (pag. 319). *Applicatio ad rectam, circulum &. Radius osculi*; *exempla* (pagg. 325 usque 327) *radii osculi, sectionis conicae, cycloidis. Evoluta cycloidis cycloidi evolventi aequalis est* (pag. 328). *Cur filum in tangente cycloidis tensum Hugenius applicavit* (pag. 329).		348—360 348 355—357 359 360
Pag. 329. XII. usque 342. *Principia* et *applicatio calculi variationum. Theoria duplici modo* (pagg. 330 usque 333, et 340). Exempla: *longitudo minima datam aream claudens* (pag. 333); *Brachystochrona* (pag. 337).		360—371 361—363, 369 363, 366
Pag. 342. §. 38. *Ramorum* coronæ arboris *unum* constituunt *aequationes* (determinatæ, indeterminatæ). *Radix aequationis* unde dicitur? (pag. 342). *Non quaevis petito satisfacere debet* (pag. 343). *Ordinatio* æquationis, et *reductio ad formam rationalem* (pagg. 344, 345). *Resolutio generalis aequationis ordinatae*, gradus primi, secundi, tertii, quarti, (pagg. 346 usque 350).		372 372, 374 374—376 377—383
Pag. 351. *Quomodo resolutio aequationis* $x^{17}-1=0$ *cum constructione geometrica polygoni regularis 17 laterum cohaereat?*		384
Exempla (pagg. 351 usque 359), plerumque scitu necessaria.		384—392
Exemplum etiam *pro coniunctione impossibili* (pag. 357).		391
Pag. 359. §. 39. *Transformationes aequationum.*		393
Pagg. 361 usque 363. *Si aequatio n gradus una radice* (etsi imaginaria) *gaudeat: radicibus numero n (nec pluribus) gaudet. Idem modo communi* (pag. 363).		395—397 397
Pagg. 364 et 365. E præcedente *lex coefficientium in aequatione.*		398—400

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
Pag. 366. *Si radix aequationis* (ordinatæ et ad coefficientes integros reductæ) *commensurabilis sit: numerus integer est*; unde *modus inquirendi, num radix talis detur, et quae sit.*	I	400
Pagg. 367 usque 373. *Si radices omnes reales sint: tot signorum mutationes sunt, quot radices positivae, et tot successiones signorum aequalium, quot negativae.*		401—407
Pagg. 374 usque 379. *Modus radices aequationum altiorum reales, (si dentur), etsi incommensurabiles sint, per approximationem quaerendi (methodo Newtoniana* aut *Lagrangeiana).*		407—412
Pagg. 379 usque 381. *Si plures fuerint incognitae*, et totidem æquationes gradus primi.		413, 415
Pagg. 381 usque 392. Demonstratio *regulae* ingeniosæ a *Bezout* ab inductione datæ.		415—424
Pag. 392 et pagg. 416 usque 421. *Aequatio indeterminata gradus primi, per fractiones continuas.*		424,... 451—457
Si A et A' inter se primi fuerint: tum $\frac{A}{A'}$ minimis terminis exprimitur; atque si $\frac{A}{A'} = \frac{a}{a'}$ et $Ak = a$: tum et $A'k = a'$ et *k integer est* (pag. 393). Si $N = ab \ldots$, et $a, b, \ldots$ singuli per se primi sint: tum		426
N alia factorum imagine exprimi nequit (pag. 394). Hinc si *primorum a, b quilibet seorsim metitur numerum N: eundem N et productum e quibuslibet eorundem primorum metitur*; et *conversim integrum N integer P nonnisi ita metitur, si P factoribus primis ita exprimi queat, ut imaginis, qua N factoribus primis exprimitur, partem constituat* (pag. 395).		426, 427 427, 428
Quivis numerus primus sub formam $6n \pm 1$ venit, sed non quivis numerus huius formæ primus est. E dictis *divisor communis maximus* quotvis integrorum; necnon *minimus eorum, quem datorum quivis metitur*; posterius *ad denominatorem communem minimum quaerendum* applicatur (pag. 396); *prius alia methodo* etiam fieri potest (pag. 397).		429, 430
Pag. 398. Fractio continua vulgaris. Approximantium expressio. *Differentiae approximantis cuiusvis a sequente* (pag. 400).		431 432
Pagg. 401 usque 404. *Differentiae approximantium a primitiva semper decrescunt*, et quævis *approximans terminis minimis expressa est &.*		434—437
Pagg. 405 usque 407. *Fractio continua formae generalioris*; atque huius *evolutio in seriem. Series Brounkeri* cum Leibnitiana conveniens.		438—442
Pagg. 408 usque 411. *Applicatio fractionum continuarum ad resolutionem aequationis quadraticae. Regula fractionem approximantem quamvis* pro valore radicis quantovis propius *exprimendi.* Exempla (pagg. 411 et 412).		442—446 446, 447

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
Pagg. 412 usque 414. *Resolutio aequationis quadraticae* per $x=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}$	I	447—449
Pag. 414. $\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a\ldots}}}=a^{\frac{1}{m-1}}$.		449—450
Pagg. 416 usque 421. *Resolutio aequationis indeterminatae per priora*: additis aliquot exemplis, inter quæ est, quod *si peripheria per quemvis primorum a, b, . . . dividi (constructione geometrica) possit: etiam per factum e quibusvis eorum dividi potest, si nullus eorum, praeter 2, pluries quam semel occurrat.*		451—457
Si numerus gradus aequationis impar fuerit, aut pro numero gradus pari terminus ultimus negativus fuerit: aequatio radice saltem una reali gaudet (pagg. 422 usque 424).		457—460
Pagg. 425 usque 436. *Demonstratio GAUSSiana, dari radicem aequationis.*	I	461—472
Pagg. 437 usque 441. *Primaria de seriebus*; *de coefficientibus pro functionis valore* $=0$, et modus *functionem fractam in alias formae requisitae discerpendi.*		472—478
GENERALIS CONSPECTUS GEOMETRIAE a pag. 442 ad finem tomi primi.	II	1—56
Spatii conceptus e mundo externo per abstractionem (pag. 442):		1
punctum spatiale, punctum temporis (pag. 19). *Ubivis* in spatio datur *punctum spatiale*, et *omnia puncta spatialia sunt aequalia. Superficies, linea, forma, sectio* (pag. 443).	I II	24 2
Pag. 444. *Reditus in mundum externum, corpus idem* considerando *in diversis locis*: *constructio mobilis geometrici*; atque *cum hoc reditus in spatium purum*; *axioma congruentiae. Motus geometricus.*		3
Pagg. 445 et 446. *Conceptus motum geometricum rescipientes. Variae* tum *quaestiones*: atque *hinc* (a pag. 446 usque 448) *tres operationes primitivae.*		4, 5 5—7
Pag. 448. Nova quæstione exorta, *fit conceptus* per «*A unicum ipsius B*» denotatus; exemplis illustratur.		7
Pag. 449. Passu ad omne oritur conceptus *rectae, planique; additis analogis quibusdam definitionibus.*		8
Pag. 451. *Suppositis prius recta planoque*: *e pluribus rectis ex eodem puncto, oritur pyramis* (sensu lato); et *accedente multiplicatione*, conceptus *similium* et *homologorum*. Ibidem voces *plaga, regio, internum* explicantur.		10
Pag. 452. *Aliae definitiones similium.* E prima definitione *contrarie aequalia, geometrice aequalia*; *Exempla* (a pag. 452 usque 455).		10—11 11—13
Pagg. 455 usque 457. *E, pluribus rectis punctum idem* $\mathfrak{p}$ *commune habentibus*, via unius circa $\mathfrak{p}$ donec redeat; aut in plano facta, aut non:		13—16

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
si prius, oritur *circulus*, et conceptus concernentes *(definitiones functionum trigon.)*. E posteriore oritur *forma apicata*, et hinc conceptus generalis *anguli*, qui certo respectu quantitas fit.		
Pagg. 458 et 459. Forma sine angulo dicitur *fluens*, et si hæc etiam *quantitas* (nempe absoluta) sit, dicitur *uniformis*. *Fluens* sine recta planove, dictus *curva*. Fluens cum recta planove parit *tangentem*, et hæc *perpendicularitatem*.	II	16—17
Pagg. 459 usque 462. *Rectarum pyramidem generantium puncto communi remoto in* ∞, oritur *prisma* (sensu lato). Atque hinc *aequifluens*, *lineae primario aequesitae*, et *conceptus generalis parallelismi (directi* et *inversi)*.		17—20
Pag. 462. *Descensus in planum*: *figura*; rectilineæ species quædam,		20
quo pertinet (pag. 9). Quid per *geometrica constructione perficere*, intelligatur (pag. 463) sensu tacito Euclidis.	I II	14 21
Pag. 463. *Constructio geometrica*, *sensu stricto* et *lato*: nempe inferius demonstrando, inter quævis duo puncta esse rectam, si quid, sine coniunctione operationum primitivarum, certo numero duarum priorum (omnibus ad planum restrictis) perficiatur, *geometrice (sensu stricto) construi* dicitur; si vero non restringatur ad planum *(admissa operatione tertia quoque)*, *geometrice (sensu lato) construi* dicitur (pag. 464).		21 21
Pag. 464. In plano quæ tractantur? (Annotatio de trigonometria sphærica, pag. 465).		22 22
Pag. 465. Reditu in abyssum spatii, quæ tractantur prius?		
Ibidem §. 12 usque 468. *Coniunctio operationum*.		22—25
Pag. 468. Formæ quomodo fiunt quantitates *respectivae* et *reductae*.		25
Ibidem usque 476. *Generatio certae lineae*, quam *rectam esse* (pag. 478) *demonstratur*.		26—32, 34
Pagg. 476 usque 479. *Inter quaevis duo puncta spatii datur linea eiusmodi*; *exit continuata e quavis sphaera*; *congruentibus 2 punctis* necessario *congruunt (et continuatae)*; *neque a puncto ad punctum una recta plures dantur*. *Est* quoque *recta quantitas absoluta*, *et potest in se porro moveri*.		32—35
Pagg. 479 usque 482. *Plani generatio*. Si *recta duo puncta in plano habeat*, *tota incidit*. *Per quævis tria puncta datur planum*, *nec plura dantur* (si tria illa puncta non in recta sint). *Planum per quamvis rectam in ea situm in duas plagas aequales dividitur*.		35—38
Pag. 482. *Formae angulares duarum rectarum congruunt*, *si arcus e verticibus radiis aequalibus descripti aequales sint*; et summa angulorum e puncto rectæ (in eadem plani plaga) est dimidiæ peripheriæ (id est duobus rectis) æqualis; et conversim, duæ rectæ sunt in eadem, si		38

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
summa angulorum e puncto utrique communi in eadem plani plaga sit $=2$ rectis; sunt quoque hinc omnes formæ anguli recti æquales. Descripto (apice angulorum pro centro accepto) circulo, in omnibus dictis, nisi ita esset, pars $=$ toti fieret.		
Pag. 482. *Planum est quantitas* (nempe absoluta).	II	38
Ibidem usque 486. *Sectiones rectarum planorumque* inter se, atque *planorum cum sphaera.* Recta cum recta (aut plano) nonnisi punctum, planum vero cum plano aut nihil, aut rectam commune habet. Recta per planum transit in spatii plagam alteram. Si planum P cum plano Q punctum commune habeat: sectio recta est; transitque P *per* Q in plagam alteram. *Ad rectam planumve datur e quovis puncto eorum ad ea perpendicularis; et e quovis puncto etiam extra illa datur ad ea perpendicularis. Si recta ad duas plani rectas perpendicularis fuerit, erit ad omnes in eodem plano per punctum sectionis ductas, adeoque ad planum ipsum perpendicularis* (pag. 483).		38—42
Planum p est perpendiculare ad planum P, si perpendicularis ad P in p cadat (pag. 484). Anguli verticales tam rectarum, quam planorum æquales sunt (ibidem); idem tamen et modo communi evidens est, si formarum angularium æqualitas pro arcubus æqualibus demonstretur (482).		39 40 38
Pag. 485. *Circulus maximus in sphaera*; *angulus circulorum maximorum fit quantitas respectiva. Arcus circulorum maximorum, ad arcum* ab *circuli maximi perpendiculares, in extremitate quadrantum (polo dicta) concurrunt.*		41
Si plana P et Q se invicem ad angulum rectum secent in recta ab: *e quovis puncto* p *ipsius P ad* ab *demissa perpendicularis, est perpendicularis ad Q*; atque *e quovis puncto ipsius* ab *erecta ad Q perpendicularis, in P cadit.*		
Pag. 486. *Si duo plana P et p se invicem secantia, sint ad tertium Q perpendicularia: sectio priorum est perpendicalaris ad Q.*		42
Angulus rectae cum plano fit quantitas respectiva (pag. 480); atque *est minimus omnium* (nisi rectus sit), *quos recta eadem cum recta* quacunque plani per punctum sectionis ducta facit.		
Ibidem usque ad finem, de *planis rectisque se invicem non secantibus. Axioma Euclideum tria complectitur*, quorum quodvis sufficit (pagg. 487 et 488).		43—44
Pagg. 488 usque 490. *Brevis disquisitio de theoria parallelarum*: et *Appendicis idea.*		44—46
Pag. 490 usque ad finem *tentamina eam demonstrandi olim facta.*		46—56
APPENDIX, Geometriam ab ea independentem absolutam exhibens.		359—394

Hosted by Google

INDEX

RERUM IN TOMO SECUNDO ED. I. CONTENTARUM.

	Ed. II. Tom.	pag.
Explicatio signorum. Modus *subdivisionis* in genere; et in specie quoad Elementa Geometriæ usque ad pag. 8.	II	LIX—LXII
Sectio nulla duarum rectarum, aut duorum circulorum, et circuli atque rectæ (pagg. 9, 11, 19, 232).		57, 59 66, 275
Anguli duarum rectarum quantitas, et *aequalium congruentia* (pag. 9).		57
Summa angulorum, ad eundem apicem in plano, omnium, aut super recta; anguli verticales (pag. 10).		58
Tres rectae: Angulus externus maior est quovis internorum oppositorum, et si duæ rectæ secent se invicem, summa duorum internorum est $<2R$ (pag. 11).		58, 59
Perpendicularis acuto angulo obiecta cadit. Origo et species *trianguli*, atque æqualitatis duorum conditiones generales (pagg. 12, 13), et translatio anguli (ibidem).		60, 61
Constructio triangulorum geometrica (pagg. 14, 15, 17).		61—63, 65
Trianguli crura æqualia ponunt angulorum ad basim æqualitatem, et horum æqualitas ponit crurum æqualitatem. In triangulo rectangulo hypotenusa $>$ catheto, et hypotenusæ crescunt (pag. 16). Hinc æqualitas		64
triangulorum rectangulorum, per catheti hypotenusæque æqualitatem; et hinc summa duorum laterum trianguli cuiusvis tertio maior (pag. 17).		64, 65
In triangulo rectilineo dependentia laterum angulorumque oppositorum mutua (pagg. 18, 28 et 74).		66, 76, 124
Si 4 *rectarum* nullum par fuerit parallelum, oritur *trapezoides*: si duo paria sint parallela, parallelogrammum; quod per rectam quamvis, per sectionem diagonalium ductam, bifariam dividitur, simul cum recta ipsa. Constructio *rectanguli*, *rhomboidis*, *rhombi*, *quadrati*. Angulus hinc in semicirculo est rectus (pag. 20).		68
Si unum par parallelum per alterum non parallelum secetur: præter *trapezium* oritur similitudo triangulorum; *similitudinis* triangulorum *conditiones*, et cetera similitudinem eorum concernentia (pagg. 21 usque ad 26). Ex. gr. quomodo milliare pollici exprimi queat.		68—74

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
Proportionalis media (pag. 27) ; et conversim rectam, quæ hypotenusam ita dividit, ad hanc perpendicularem esse patet. *Theorema Pythagoricum* (ibidem). E lateribus dignoscere angulum, num obtusus vel acutus aut rectus sit ; et *conversa Pythagorici.* Multiplicatio lineæ per lineam, et divisio (pagg. 28 et 50 . . .). Similia plurium laterum (pagg. 29, . . .).	II	75 76 77, 99, 78
Rectae cum circulo sectio minima punctum, maxima duorum punctorum est. *Chordae arcusque meditullia et centrum sunt in perpendiculari e centro ad chordam.* Hinc *arcus cuiusvis*, uti circuli per data tria puncta non in recta sita, *centrum* reperitur. Chorda intra circulum cadit. *Recta ad radium perpendicularis* est *tangens*, et *tangens est ad radium perpendicularis*, nec ulla recta inter tangentem et arcum datur (pagg. 31, 33). *Recta circulum in 3 punctis secare nequit.* Quomodo tangens ex ꝑ ducatur e Fig. 42* patet (per pag. 20).		80, 81 Fig. 79*, 68
Plures rectae secantes circulum : prius duæ. *Anguli tangentis cum chorda quantitas* (pagg. 33). *Angulus ad peripheriam* : angulus in semicirculo ; ubi ex eadem Fig. 45. conversa patet, nempe angulus interior est $>$ exterior $< R$, itaque *si rectus fuerit, in semicirculo est.* Chordæ parallelæ absecant arcus æquales. Chordæ ex eodem peripheriæ puncto, a diametro porro decrescunt, et arcui maiori maior chorda, maiorique chordæ maior arcus respondet.		82 Fig. 82
Duarum rectarum, se invicem intra peripheriam secantium, facta segmentorum sunt æqualia ; *quantitas anguli.* Plures rectæ ex eodem puncto intra peripheriam (pagg. 34, 35) ab imo crescunt a diametro usque ad eandem.		83, 84
Duarum rectarum e puncto extra peripheriam anguli quantitas. Plures e puncto extra peripheriam a diametro decrescunt, partes exteriores crescunt, usque ad tangentem (pag. 35).		84, 85
Hinc si anguli unius crura cruribus alterius æqualia fuerint: lateri subtendenti maiori opponitur angulus maior ; patet vertice in centrum posito, et uno latere unius cum latere alterius coincidente.		
Rectilineorum inscriptio circulo et *circumscriptio* (pagg. 36, 37). *Polygonum reg.* e circulo, et conversim *apices polygoni reg. in peripheriam cadunt.* Latus hexagoni. *Angulus polygoni*, et productis lateribus summa omnium externorum (pag. 38).		85—87 88
Duo circuli se invicem in tribus punctis non secant ; possunt tangere se invicem, extus, intus ; et *centra cum tactus puncto in recta sunt* (pag. 39).		89
Formae per sectiones trium (tum plurium) *circulorum triangula ex arcubus, eius species, angulorum quantitas* ; *aequalitas triangulorum* eiusmodi (pagg. 40 usque ad 46, et 65, 66).		90—95, 114, 115

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

Sectiones sine angulo: lineæ sine angulo *e rectis et arcubus* circularibus, aut solum ex arcubus. *Figurae* e rectis et arcubus, aut tantum ex arcubus: *tres eiusmodi lineae talem haud praebent*; *ex una recta et duobus arcubus*, ita *e tribus arcubus*, nec non *e duobus rectis et uno arcu fieri potest cum uno angulo*; at *quatuor arcus, ita duae rectae et duo arcus figuram sine angulo praebent. E tribus rectis et uno arcu talis non datur* (pagg. 46 usque 49). II 95—98

DE AREIS. *Quo sensu aequatur rectangulum facto laterum?* (pag. 50). 99

Parallelogramma aeque alta et basium aequalium sunt aequ. term. æqualia. De triangulis idem (pag. 53). Hinc parallelogrammum = facto e basi in altitudinem, et triangulus est huius dimidium. *Altitudo trianguli e lateribus* (pag. 54). 101

Trapezii, quadrilateri cuiusvis, figurae rectilineae area. 102

Circuli area (pagg. 56 usque 59) *Annulus* (pag. 60). 104—107, 108

Transmutatio figurarum quoad areas, et *reductio ad rectam* (Tom. I. pag. 22). *Complementa parallelogrammorum, quae ad diagonalem sunt, aequ. term. aequalia sunt. Quadratum hypot. exstruitur e quadratis cathetorum.* Quotvis quadrata in unum commutantur. I 27

Area data in figuram certae speciei transmutatur (pagg. 60 usque 63). II 108—111

Comparatio similium quoad areas. Areae triangulorum sunt uti facta laterum angulum aequalem intercipientium. Areae triangulorum similium sunt uti quadrata linearum homologarum. Idem de quibusvis figuris. Hinc *hypotenusae superscripta figura = summae similium cathetis superscriptarum.* Lunula Hypocratis (pagg. 63, usque 65). 111—114

Additio, subtractio, divisio figurarum (sub certa conditione). Ex. gr. ut divisio e certo puncto fiat, aut recta partem ratione data exhibens certæ parallela sit (pagg. 67, 68). 116—118

Summa circulorum triangulo aequilatero impositorum et summae limes. Idem de quadrilatero rectangulo (pagg. 69 usque 72). 119—122

Quorundam constructio geom. (quorum antea nonnisi possibilitas innotuit). *Rectam extrema et media ratione secare*: hinc *decagonum. Peripheriae divisio* (pag. 73). 123, 124

Trigonometria plana (pag. 74). *Functiones trigonometricae. Cosinus* ex *sinu* (et conversim). *Pro quadrante positivo* q, $\pm 4mq \pm \alpha$ et $\pm \alpha$ sinu cosinuque eodem gaudent; et α et $-\alpha$ cosinum eundem habent, sed sinus oppositi sunt. Si γ complementum ipsius α sit, tum sin. γ = cos. α; si vero $\alpha + \beta = 2q$, tum α et β sinu eodem gaudent, sed cos. $\alpha = -$ cos. β (pagg. 75 usque 77). 124, 125—127

Functionum trigonometricarum mutationes, crescente arcu a 0 (pagg. 77 usque 79). E signo functionis trig. conclusio ad arcum. *Exhibitio tan-* 127—129

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
gentis secantisque geometrica (quoad sinum, cosinum, et sin. vers. e definitione patet. Tom. I. pag. 456).	II	14
Si radius mutetur ex 1 *in r*, functiones trig. per *r* multiplicantur (pag. 80).		130
Sin. $(\alpha \pm \beta)$ (quantumvis fuerit sive α sive β, et sive positivum sive negativum), et cos. $(\alpha \pm \beta)$ quomodo per sinus et cosinus arcuum α et β exprimitur (pagg. 81 usque 85).		130—135
Expressio sinus arcus $\frac{c}{2}$ *per sinum arcus* c et cos. $\frac{c}{2}$ per cos. c. *Sinus et cosinus arcus multipli* (pag. 85).		135, 136
Dependentia laterum angulorumque trianguli rectilinei mutua (pag. 86).		136
E duobus lateribus et angulo intercepto reliqui anguli (unde totum triangulum innotescit per præc.), imo immediate latus tertium. *E tribus lateribus anguli* (pagg. 87, 88). *Trianguli rectanguli resolutio specialior*: e duobus lateribus tertium; e cathetis et angulo alterutri opposito, quæcunque bina dentur, tertium innotescit; demum e hypotenusa, catheto et angulo huic opposito, quæcunque bina dentur, tertium reperitur (pag. 88).		137, 138
		139
Expressionum pro radio 1 *reductio ad radium r* (pagg. 89 usque 92).		140—143
Formularum quarundam transmutatio, applicationi logarithmicæ magis idonea (pagg. 92, 93).		143, 144
E latere cum angulis adiacentibus area. E duobus lateribus et angulo intercepto area. Data summa duorum laterum cum basi altitudineque, anguli reperiuntur (pagg. 93, 94).		144—146
E numero laterum polygoni et radio latus, aut e quibusvis binis tertium (pag. 95).		146, 147
Quomodo sinus computati sint (pagg. 95, 96).		147

MOTUS COMPOSITUS.

Linearum ordines 1, 2, . . .; *aequationes* earum (pagg. 97, . . .); *aequatio lineae secundi ordinis*; *tres eius species, formaeque ex aequatione* (pagg. 101 usque 105). Ibidem *valores imaginarii* considerantur.		148
		152—156
Axis maior in ellipsi et hyperbola (rectius *primarius*). *Directrix. Alia definitio linearum harum* (quas pag. 222 conicas esse patet) (pagg. 105 . . . 107). *Axis minor* rectius secundus dicitur.		265
		156—158
Sectiones coni insignes in cœlis et terra partes agunt (pagg. 107 usque 110). Lampas, fornax.		158—160

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

Comparatio sectionum conicarum inter se (pagg. 110 usque 115). II 160—165
Asymptotus hyperbolæ (ibidem).

Mutatio initii *abscissarum, ellipseos hyperbolaeque in centrum* (pag. 115). 165, 166

Distantia focalis in sectionibus conicis (pagg. 115 usque 119). 166—170

Radii vectores in iis (pagg. 119 usque 122). 170—173

Ex his *constructio* punctorum *geometrica* (pagg. 122 usque 126): 173—177
constructiones mechanicae (pagg. 126 usque 128). 177—179

Tangens per quodvis sectionis conicæ punctum; item e quovis puncto extus cadente (præter centrum hyperbolæ); atque hinc *subtangens, normalis, subnormalis* (pagg. 128 usque 134). 179—185

Diametri sectionum conicarum. Centrum lineae, diameter (sensu stricto). *Axis parabolae est quaevis recta axi parallela, atque quaevis recta per centrum ellipseos et hyperbolae* (præter asymptotos) *diameter est*; nec ulla alia diameter, nec pro iisdem chordis parallelis alia est (pagg. 134 usque 152). 185—203

Num linea quaedam centro gaudeat? (pagg. 152 . . .). Linea secundi 203
ordinis sectio conica est (pagg. 154 . . . 222 . . .). Ad verticem, etiam si 205, 265
punctum sit, per $y^2 = cx^2$ datur.

Constructio certarum æquationum per linearum intersectionem (pagg. 157 usque 160). 208—211

Lineæ quarum non omnia, sed inter quævis duo quotvis, geometrice construi possunt (pagg. 161 usque 163). 211—213

De lineis cuiusvis ordinis scitu magis necessaria. Numerus terminorum æquationum earum. Mutato abscissarum initio, mutata abscissarum linea, mutatoque angulo coordinatarum, transformatio æquationis. *Ordo lineae idem manet.* Linea n-ti ordinis a recta in non pluribus quam n punctis secari potest. Linea n-ti ordinis per $[(n+1)(n+2):2]-1$ puncta determinatur. Linea ordinis m, lineam ordinis n, in non pluribus quam nm punctis secare potest (pagg. 163 usque 169). 213—218

REDITUS E PLANO IN SPATIUM.

Sectio *rectae cum plano, plani cum plano*; *transitus* tam rectæ quam plani *in alteram plagam. Plana parallela.* Recta ad duas rectas plani perpendicularis ad hoc perpendicularis est; daturque perpendicularis (eaque unica) ad planum e quovis puncto eius, imo e quovis puncto extra planum. Recta ad planorum parallelorum P et Q aliquod perpendicularis, est ad alterum quoque perpendicularis; et quævis duæ tales

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

rectæ inter P et Q sunt æquales et parallelæ; atque hinc quævis duæ rectæ eidem tertiæ parallelæ sunt inter se parallelæ (pagg. 170, 171). II 219—221

Angulus duorum planorum. Datur e quovis puncto plani P planum perpendiculare ad P.

Quodvis planum Q, in quod perpendicularis ad planum P cadit, est perpendiculare ad P; et si sectio planorum P et Q sit $\mathfrak{ab}$, perpendicularis ad P e quovis puncto rectæ $\mathfrak{ab}$ in Q cadit; item quævis perpendicularis ad $\mathfrak{ab}$ in Q cadens, est perpendicularis ad P.

Si plana Q et q ad P perpendicularia secent se invicem: sectio planorum Q et q erit recta ad P perpendicularis.

Anguli verticales planorum quoque æquales sunt (pag. 172). 222

Angulus solidus: numerus laterum minimus est 3; et summa quorumvis binorum est $>$ tertio (quod etiam ad trianguli sphærici latera applicatur). Determinatur per tria latera, et hinc pariter triangulum sphæricum (pagg. 172 usque 175). 222—224

Planum R plana parallela P, Q secans angulos alternos et externum interno oppositum aequales atque summam duorum internorum duobus rectis æqualem facit.

Sectiones planorum R, S (se mutuo secantium), cum planis parallellis P, Q factæ, non solum sibi invicem parallelæ sunt, sed etiam angulos æquales faciunt (pag. 175). 225

Cum planis parallelis P, Q non solum tertium secans, sed *et recta cum alterutro ipsorum P, Q aliquid commune habens, in neutrum incidens, angulos alternos aequales*, pariterque externum interno opposito æqualem, et summam duorum internorum duobus rectis æqualem facit.

Anguli, quos rectæ parallelæ cum plano P faciunt, sunt æquales; et rectæ e punctis sectionum, ad puncta plani P illa, in quæ perpendiculares e rectis dictis parallelis ad P demissæ cadunt, sunt parallelæ.

Si in plano Q sit $\mathfrak{AB} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, et $\mathfrak{AC} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$, atque supra Q sint talia puncta $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$, ut $\mathfrak{Aa}$ cum $\mathfrak{AB}$, ita $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ cum $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ faciant angulum v, et $\mathfrak{Aa}$ cum $\mathfrak{AC}$ ita $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ cum $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ faciant angulum q: erit $\mathfrak{Aa} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$.

Si plana parallela P et Q per rectas parallelas $\mathfrak{pq}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ secentur, et $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ in P, atque $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ in Q fuerint: erit $\mathfrak{pq} = \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$.

Si plana parallela P, Q per planum R secentur, et sectio planorum P, R sit $\mathfrak{pi}$, planorum Q, R sit $\mathfrak{qr}$; quodcunque planum p ponatur per $\mathfrak{p}$ ad Q parallele: sectio planorum p, R eadem cum $\mathfrak{pi}$ erit (pagg. 176 usque 179). 226—228

Constructio prismatis rectilinei. Prismatis conceptus generalior. Rec-

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

tilinei latera parallelogramma totidem, quot latera baseos; fiuntque duæ bases æquales et parallelæ.

Prisma per quodvis planum basi parallelum in duo prismata basium æqualium dividitur.

Puncta basium sibi invicem *respondentia*; si *b* portio baseos fuerit, complexus rectarum ex omnibus ipsius *b* punctis ad iis e basi altera respondentia, prisma, et pars prioris est. Et prismata figuris *F* et *f* absolute æqualibus et directe parallelis (Tom. I. pag. 462) iuxta rectam II 19
eandem 𝔄𝔞 exstructa congruere possunt.

At dantur prismata, quorum retia absolute aequalia sunt, ipsa tamen congruere nequeunt, nisi alterutrius rete invertatur; generatur vero et inverso reti corpus aequale (pagg. 179 usque 185). 228—232

Hinc prisma baseos triangularis aequatur parallelepipedo; et ita solum dispescitur etiam parallelepipedum obliquum in duo prismata triangularia aequalia (pag. 186). 233, 234

Parallelepipeda super basi eadem, inter plana parallela eadem sunt *aequ. term.* æqualia (pagg. 186 . . .). 234—236

Hinc qualevis parallelepipedum in rectum transmutatur; et soliditas est facto e basi in altitudinem æqualis (pagg. 189 . . .). 236—238

Prismatis soliditas (pag. 191). 238

Pyramidis conceptus. Si triangularis per planum basi parallelum secetur, sectio erit triangulum simile basi (pag. 192). 238, 239

Pyramidis rectilineae soliditas. At *pyramidem triangularem aequalitate term. ad prisma reduci posse vel non posse*, adhucdum haud liquet (pagg. 192 usque 195). 239—241

Superficies pyramidis. Rete pyramidis triangularis: data perpendicularis ex apice, quantitate situque, atque basi, quæruntur latera; aut datis basi 𝔄𝔅ℭ et latere lineari 𝔄𝔭 (pro apice 𝔭), cum angulo solido ad 𝔄, altitudo et latera quæruntur.

Superficies prismatis: quæstiones prioribus analogæ (pagg. 197, . . .). 243, 244

Motus figurarum circa axem.

Cylinder rectus: huius *soliditas, superficies* (rete).

Conus rectus: soliditas, superficies, rete. E dato angulo ad apicem, arcum sectoris (perimetrum baseos præbentis), et ex hoc illum reperire 244—248
(pagg. 198 usque 203). Retia cylindri et coni obliqui (pagg. 203 usque 206). 248—250

Corporum similium soliditates uti cubi linearum homologarum (pagg. 206, . . .). 250, 251

Revolutio semicirculi circa diametrum: *sphaerae soliditas, superficies* (pagg. 207 usque 211). 251—254

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
Rete sphæræ (pagg. 211 usque 213).	II	255, 256
Multiplicatio linearum practica (pagg. 213 usque 216).		256—259
Prismata sunt, uti facta e basi in altitudinem; in æqualibus sunt altitudines inverse uti bases &. Idem de pyramide (pag. 216).		259
Transmutatur corpus in aliud (pag. 217).		259
Sectiones plani cum cono, cylindro, sphaera. *Soliditas (superficiesque) cylindri recti truncati; coni truncati. Pyramidis truncatae soliditas.* Si basis figura reg. et pyramis recta fuerit, superficies; prismatis autem qualisvis superficies (pagg. 217 usque 220).		260—263
De doliorum dimensione (pag. 220).		263
Superficies zonae cuiusvis in sphaera (pagg. 220 usque 222).		263—265
Quaevis lineae secundi ordinis sectio coni est (pagg. 222 usque 227).		265—269
Si et conus verticalis secetur per planum, sectio et in eo, priori aequalis erit (pagg. 227).		269, 270
Quilibet conus obliquus circulo insistens, e cono recto ellipsi insistente absecari potest. Pariter *cylinder obliquus. Coni cylindrique circulo oblique insistentium, sectiones per planum factae* (pagg. 227 usque 231).		270—274
Sphaerae sectio cum plano aut punctum, aut circulus est; et perpendiculares e centris duorum eiusmodi circulorum se invicem in centro sphaerae secant (231, . . .).		274, 275
Sphæræ cum sphæra sectio (pag. 232).		275
Planum per centrum circulum *maximum* præbet. *Quilibet duo circuli maximi in duobus punctis secant, bisecantque se invicem.* *Duo circuli maximi ad tertium c perpendiculares in fine quadrantum communi* (*polo* dicto) *secant se invicem*; et *extremitas quadrantis ad c perpendicularis, polus ipsius c est.* *Si* 𝔭𝔞, 𝔭𝔟 *quadrantes fuerint, anguli* 𝔞𝔭𝔟 *quantitas arcus* 𝔞𝔟 *est. Et si* 𝔮 *tam ab* 𝔞 *quam a* 𝔟 *quadrante distet:* 𝔭 *polus circuli max. per* 𝔞𝔟 *ducti est.* *E quovis puncto superficiei sphaerae datur ad quemvis circulum max. perpendicularis* (pagg. 233 usque 234).		276, 277
Triangula varia in sphæra, et strictius triangulum sphær. Summæ laterum huius trianguli limites sunt o et $4R$, summæ angulorum limites autem sunt $2R$ et $6R$. *Tres circuli maximi dividunt sphaeram* in octo triangula (pagg. 234 usque 239).		277—281
Corpora regularia: apices corporis regularis in superficiem sphaerae cadunt. Angulus u laterum planorum corporis regularis reperitur; atque ex hoc et latere lineari, radius sphæræ circumscriptæ. Soliditas corporum regularium (pagg. 239 usque 245).		281—287

Hosted by Google

Ed. II.
Tom. pag.

Corpora regularia sensu latiore, ordinis primi, secundi &c., nempe divisio superficiei sphæræ (adeoque spatii e centro) in partes absolute æquales, aut tantum æquales, aut in partes numero *n* et partes numero *m* æquales &c. (pagg. 245 usque 248). II 288—290

Trigonometria sphaerica.

Triangulum sphaericum determinantia; et formulæ primariæ e dependentia laterum et angulorum iis oppositorum mutua promanantes: e quibus etiam ceteri quæsitorum casus sequuntur.

Dependentia dicta (tanquam *fundamentum*) (pagg. 248 usque 250). 290—292

Trianguli rectanguli resolutio ad casus speciales (pagg. 251 usque 254). 293—296

Cuiusvis trianguli resolutio e duobus lateribus cum angulo intercepto. E tribus lateribus anguli, e tribus angulis latera (pagg. 254 usque 256). 296—300

Trianguli sphærici area (pag. 256). 300, 301

Exempla formularum antea dictarum usui logarithmico adaptarum (pagg. 257 et 258). 301, 302

Applicationes quaedam Trigonometriae sphaericae. Conceptus quidam primarii. Longitudo diei e declinatione solis et poli altitudine; *Gnomonica* ad unum problema reductum. Constructio horologii in quovis plano, cui axis terræ non est parallelus (pagg. 259 usque 264). 303—307

APPENDIX [TRIPLEX].

PRIMÆ LINEÆ PERSPECTIVÆ, GNOMONICÆ ET CHRONOLOGIÆ.

In PERSPECTIVA, e dato *oculi tabulaeque* et *obiecti* situ quæritur *imago*; et pariter *e trium horum duobus quibusvis tertium quaeri potest.* Quomodo *et Gnomonica huc reducitur* (pag. 265). 308

Casus simplicissimus: *tabula plana*, *horizontalis aut verticalis*; remoto oculo in ∞, tres Perspectivæ species, imaginumque in iis consideratio (pagg. 266 et 267). 309, 310

Distantia oculi, *obiecti*, *planum fundamentale*, *punctum oculi*, *obiecti*, *altitudo obiecti*, *linea oculi*, *linea punctorum*, *linea distantiarum*, *linea altitudinis*. Imaginis in tabula determinatio (pagg. 268 usque 270). 310—313

Situs oculi ex obiecto et imagine; nec non ex oculo et imagine obiectum (pagg. 270 et 271). 313, 314

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
ELEM. GNOMONICAE. Species horologiorum solarium (pag. 272).	II	314
Constructio horologii in plano quovis, cui axis terræ parallelus est, (pagg. 273 usque 277); (in plano alio dictum pag. 262 est).		315—318, 306
Indicem axi terræ parallelum esse oportet (pag. 277); hic autem non ipse solum, sed et punctum quodvis eius index esse potest. Sectionem conicam per viam umbræ puncti huius, pro data solis declinatione, construere (pagg. 278 usque 280). Analemma signiferum (pagg. 280).		318 319, 320
Sol verus, *sol fictus* sive medius: imaginum eorundem ad æquatorem reductarum congruentia; *tempus solare verum*, *medium*, *sidereum* (pag. 281).		321
Applicatio dictorum ad horologia specialia: *meridionale* (et pro casu si declinet); *horizontale declinans*; imo *reclinans* utrumque (pagg. 282 et 283).		321—323
Horizontalis (usui maxime idonei) constructio vulgaris intuitiva (pag. 284).		323, 324
Aequinoctiale, horizontale, *universalia*. *Lunare* (pag. 285). Annuli portatiles (pag. 286). Methodus practica (pag. 287).		324 325, 326
CHRONOLOGIA. Alveus rotundus fluentis temporis: punctum in eo fixum (ex. gr. dum Nicææ prima Januarii anno C. 325 incipit). *Locus absolutus*, *relativus* in circulo dicto; nempe (pag. 288) $nP+s$ et s differunt, quamvis simul terminentur.		326
Anni, menses, septimanæ; huius dierum nomina ethnica, christiana. *Festa fixa*, *mobilia* a *Paschate* dependent. Literæ dierum anni, litera dominicalis anni.		
Regula principalis subdivisionis temporis in vita civili.		
Fundamentum supputationis Paschatis (pagg. 288 usque 291).		326—329
Annus Romuleus, *Numaeus*, *Iulianus*, *Gregorianus* (pagg. 292 et 293).		329—331
Aequatio Solis dicta; *formula* eius, qua *stilus vetus ad novum reducitur* (pag. 294).		331
Literam diei *m*-tæ mensis cuiusvis (et quis septimanæ dies anno certo fuerit), reperire.		
Litera dominicalis anno communi una, bissextili duabus recedit. *Lit. Dom. Iuliana* mutata per *Gregorium* est.		
Cyclus solis Iulianus est 28 annorum, *Gregorianus* 8 seculorum (pagg. 295 usque 298).		332—335
Literae dom. Iulianae formula pro anno *n*-to (p. 299).		335
Gregorianæ formula (pag. 300).		337
Regula (in Paschatis supputatione) determinandi *plenilunium*, *Iuli-*		

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
anum prius, tum *Gregorianum. Cyclus lunaris, numerus aureus, epactae.* Iulianarum computatio; *formulae numeri aurei, epactae I.* (pagg. 301 usque 307).	II	338—343
Epactae Iulianae per Gregoriam correctae; formula *aequationis lunae* (ita dictæ); *formula epactae Gregorianae* (pagg. 307 usque 311).		343—346
Formula Paschatis Iuliani (ut functio numeri *n*) (pag. 311).		346
Formula Paschatis Gregoriani generalis; et applicata ad seculum. Exempla (pagg. 313 usque 315).		348—351
Cyclus Paschatum Gregorianorum 57000.		
Cyclus Paschatum Iulianorum est 28 . 19.		
Cyclus Paschatis utriusque.		
Paschata post quod seculum coincidere nequeunt? et quando per totum seculum coincident? (pagg. 318 usque 322).		353—356

ADDITAMENTA.

Tom. I. concernentia.

Quaedam e theoria combinationum.		
Numerus omnium combinationum ex *n* rebus.		
Variatio, permutatio; illius leges variæ (pag. 323).	I	556
Permutationum constructio per numeros (pag. 324).		557
Constructio et numerus *m*-ionum ex *n* rebus, *admissa permutatione et variatione, ita ut eadem litera numero quovis ipsum m haud superante occurere possit.* Applicatio ad *voces* et *syllogismos* (pagg. 324 usque 326).		558, 559
Numerus *m*-borum *sine permutatione*, sed *admissa variatione lege certa per exponentes variationis* (ita dictos). (pag. 327).		560
Quot factores factum per factores primos expressum habet? (pag. 328).		560, 561
Constructio combinationum (pag. 329).		561, 562
Combinationes ex *n* rebus, *admissa variatione sine permutatione*; item pro $n = 2$, quod (pag. 98) citatur; (pagg. 330 usque 334).	II	149
Seriei arithmeticae ordinis m-ti, (seriei 1, 2, 3, . . . superstructæ) *terminus n*-tus (pagg. 334 usque 336).	I	562—567 567, 568
APPLICATIONES quædam logarithmorum.		
Problemata vulgaria (pagg. 336 usque 338).		512—516
Logarithmo in tabula haud exstanti numerus, numeroque logarithmus conveniens, quomodo et quo fundamento reperitur? (pagg. 339 usque 341).		516—519
Log. quoad basim 10 nonnisi numeri 1 cum certo cifrarum numero, commensurabilis est.		

Hosted by Google

	Ed. II. Tom.	pag.
OPERATIONES *decadicae*: quatuor species, in genere (pag. 343).	II	496
Additio in specie (pagg. 344 usque 346). *Subtractio* (ita etiam ut semper minor nota e maiore dematur) (pagg. 347 usque 349).		497—499 500—502
Multiplicatio (alia methodo quoque) (pagg. 349 et 350). *Divisio* (pag. 350). *Compendium, si divisor cifris terminetur* (pag. 351); *si numerus minor tam dividendum quam divisorem metiatur*; notæ quibus dignosci queat, num 2, 3, 5, 9, 11 numerum aliquem metiatur (pagg. 351 et 352).		502, 503 503, 504 504, 505
Approximatio quoti, per notas decimales, et reductio fractionis communis ad decimalem (pag. 352).		506
Proba novenariorum in singulis (pag. 352). *Operationes dyadicae* (pag. 353).		506 506
Extractio radicis m gradus; *et approximatio per notas decimales* (pagg. 353—356).		507—511

Hosted by Google

TENTAMEN

JUVENTUTEM STUDIOSAM

IN ELEMENTA MATHESEOS PURAE, ELEMENTARIS AC SUBLIMIORIS, METHODO INTUITIVA, EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA, INTRODUCENDI.

CUM APPENDICE TRIPLICI.

Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque Publ. Ordinario.

Tomus Secundus.

Maros Vásárhelyini. 1833.
Typis Collegii Reformatorum per JOSEPHUM. et SIMEONEM KALI de felső Vist.

Hosted by Google

Imprimatur.

M. Vásárhelyini Die
12 Octobris 1829.

Paulus Horváth m.p.
Abbas, Parochus et Censor
Librorum.

Hosted by Google

LECTORI SALUTEM!

Quum tam prior tomus quum hic, vita variis distracta, sine otio, et inter difficultates impressionis insuperabiles (quapropter nec antea rem aggredi animus fuit) editus, erroribus scateat: neque opus, spe quoque exstincta, vel expensas unquam refusum iri, ut par erat, extendi potuerit: defectus saltem (in quantum fieri potuit) suppleturus; non solum errata tomi primi, quos postea animadverti, sed et conceptus quosdam in tomo primo traditos, pro Tyronibus meis dilucidandos, et eosdem quidem sed simplicius præcisiusque exprimendos esse docendo expertus, id ad finem tomi huius adieci.* Quo præter alia quædam, et proportionis potentiæque generalior conceptus, atque imaginaria etiamsi in exponentem ascendant, pertinent.

Quum autem meris imaginibus nonnisi proprio nutu sensum dare tentaverim: verebar, ne derisui forem; donec *summi Viri Göttingae* (mea laude longe maioris) *primae lineae imaginariorum* (in *Gött. Gel. Anz.*), simul cum querela de eorum pertractatione, iam olim edita, mihi innotuissent. Magno hoc mihi solatio fuit; et nonnisi eousque, donec theoria illa prodierit, meam (quæ iam qualem concipere poteram impressa erat) pro discipulis meis dilucidare debui: si vero illa prodierit; persuasus eam operibus ceteris, quæ solidum penetransque (et fere infallibile) ingenium, sigillo veri simplici distinguunt, parem fore; contentus ero idem saltem cum tanto genio voluisse.

Denique etiamsi opus hoc utcunque imperfectum fuerit: fore tales Lectores Benevolos spero, qui ut Magnus *Leibnitzius*, se in quovis libro

* In hac Editione vide Sectionem quartam Tomi I.

Hosted by Google

aliquid reperire confessus est, nec in hoc omne reiicient: et quum hoc solum, nec alibi quidquam arrogaverim, neque pollicitus magna sim: benignam errorum emendationem veniamque exoro; eo magis, quod fera mortale cor fata fregerint.

Verum quis adeo demens sit, ut ante extremum halitum, beatum se dicere ausit? Omnis fortuna humana, ut bulla inanis, dum variis spei iridibus ridet, in luridam guttam collabitur. Serius ocius quisque in sua cruce exspirat: quæ tamen arbor vitæ fit; dum immeritorum vulnerum rubore ad noctis terrestris oras, aurora brevibus lacrymis æterno soli renidentibus oritur.

Hosted by Google

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SUBDIVISIONES GEOMETRIAE.

Capitum aliarumve subdivisionum, imagines e numeris sive e literis modo sequente compositæ (quibus et plantæ aliaque exprimi possent) *vicem subire queunt*: ex. gr. ·*dgb* vel ·472 denotet secundam in prima subdivisione illius, quæ septisima est in prima subdivisione quartæ in omnium prima subdivisione; nempe plura in eodem subdivisionis gradu per primam, secundam & distingui possunt; et numerus primus ad lævam denotat numerum subdivisionis, quota sit in gradu primo, et quivis numerus n (si > 9 fuerit, parenthesi clausus) denotet n-tam in gradu primo subdivisionis numeri ad lævam præcedentis. Possunt quidem eiusmodi subdivisiones vocabulis exprimi; ex. gr. usque ad sextum subdivisionis gradum, *liber*, *pars*, *caput*, *sectio*, *articulus*, *paragraphus* inservire possunt; possuntque ubique plura concernentia numeris Romanis Arabicisque aliisve signis adiungi. Atque si necessaria adhuc defuerint, ubi imago quæpiam numerica superius dicta advenit; liceat simulac requisita cursus advexerit, filum titulo *supplementi numeri* dicti interrumpere postmodum continuandum.

Imaginibus eiusmodi numericis sequentibus exprimentur *Geometriae subdivisiones*.

·1. *E primario* SPATII *intuitu* superficies, linea, punctum, forma sphæra, tres primitivi motus simplices; recta, planum, circulus; aliique ex his oriundi conceptus, veritatesque primariæ fundamentales: (pagg. 1–56. contenta). Sphæræ limes certo sensu planum est.

·2. DESCENSUS IN PLANUM; *planimetria*.

·21. *Numero rectarum*, *duarumque* primitivarum motus *operationum finito*: constructio geometrica sensu stricto.

Hosted by Google

·211. Formæ, per sectionem aliquam aut nullam, resultatorum constructionis dictæ magis obviorum, oriundæ.

·2111. *Non considerata area.*

·21111. *Sectio nulla formarum* dictarum.

·211111. Duarum rectarum; ·211112 plurium; ·211113 rectæ et circuli, ·211114 duorum circulorum.

·21112. *Sectio aliqua* formarum dictarum.

·211121. *Sectio cum angulo.*

·2111211. *Nonnisi rectarum* aut e rectis compositorum.

·21112111. *Duarum rectarum*: angulus rectus, obtusus, acutus.

·21112112. *Trium rectarum*: quarum aut

·211121121. Nonnisi unum par est, se mutuo (continuatione sufficiente) non secantium, aut

·211121122. Nullum tale par est: unde *trianguli* rectilinei species variæ.

·2111211221. Triangulorum rectilineorum *aequalitatis conditiones*, ac certæ proprietates primariæ.

·2111211222. Laterum angulorumque oppositorum dependentia mutua: unde in supplemento numeri huius, e datis triangulum rectilineum determinantibus, sive angulum quemvis, sive latus quodvis ignotum ope calculi reperire docet *Trigonometria plana.*

·21112113. *Quatuor rectarum*: quarum aut

·211121131. Nullum par est, se invicem (continuatione sufficiente) non secantium; aut

·211121132. Datur par se mutuo non secantium; atque tum aut

·2111211321. Alterum par quoque tale est, adeoque quum sectio detur, hoc par ab altero pari secatur, oriturque *parallelogrammum*; aut

·2111211322. Nonnisi unum par tale est, adeoque hoc ab altero pari secatur; fundamentum similitudinis triangulorum, eiusque conditiones; et multiplicatio divisioque ac radicis extractio.

·21112114. *Plurium rectarum* numero quovis; unde

·211121141. Linea simplex e rectis composita; quæ parit

·2111211411. Cum linea alia per duarum rectarum parallelismum composita, *parallelismum generalem.*

·2111211412. Figuras rectilineas.

·211121142. Rectæ ex eodem puncto ad apices angulorum omnes lineæ rectilineæ; unde

·2111211421. Figuræ rectilineæ subdivisio in triangula.

·2111211422. Cuiusvis rectæ, ex eodem puncto communi dimidium, vel duas tertias & accipiendo, oritur *similitudinis conceptus generalis.*

·2111212. Rectæ cum circulis.

·21112121. Rectæ cum circulo sectio *minima* punctum est, *maxima* e duobus punctis constat.

·21112122. Plures rectæ circulum secantes.

Hosted by Google

·21112121. Se invicem quoque secantes.

·21112122111. In eodem puncto; ·21112122111 in peripheria, ·21112122112 intra peripheriam, ·21112122113 extra eam.

·21112122112. Rectæ se mutuo non in eodem puncto secantes, sed lineam simplicem redeuntem formantes.

·21112122121. Si quævis earum, uti est ab initio ad finem usque, chorda sit: subdivisiones iuxta numerum earum sunt; horumque subdivisiones novæ sunt, prouti rectæ æquales aut inæquales fuerint.

·21112122122. Si quævis rectarum tangens sit: subdivisiones sunt eædem, quæ numeri præcedentis.

·21112122. Rectæ circulum secantes, nec productæ secantes se invicem.

·2111213. Circuli se invicem secantes: minima sectio unum punctum est, maxima e duobus punctis constat.

·211122. *Sectio sine angulo*: cuius subdivisiones sunt lineæ e rectis et arcubus, aut nonnisi ex arcubus, vel ex arcubus et rectis compositæ.

·2112. *Areae* figurarum generatarum: quæ subdividuntur in rectilineas, circulum, figuras ex arcubus, aut ex arcubus et rectis compositas.

·212. Formæ, quarum in prima subdivisione nonnisi possibilitas innotescere saltem in quæstionem venire potuit, num geometrice construi possint, quæritur.

·22. *Rectae operationesve* duæ primitivæ priores *innumerae*; *motus compositus duplex*, applicata Arithmetica.

·222. Ea, quorum non omnia sed quodvis punctum construi geometrice sensu stricto potest.

·223. Ea quorum nec quodvis punctum geometrice construi potest.

·3. REDITUS E PLANO IN ABYSSUM SPATII.

·31. *Numero rectarum operationumque trium* primitivarum *finito* (constructio geometrica sensu lato); nimirum duabus accedit tertia, nempe *motus circa axem.*

·311. Motus circa axem linearum planorumque, absque figurarum respectu.

·3111. *Linearum motus circa axem*, figuras haud efficientium.

·31111. Rectilineorum figuras haud constituentium motus circa axem.

·311111. *Unus motus circa axem.*

·3111111. Complexus duarum rectarum se mutuo in plano P secantium motus circa unam earundem: parit si angulus rectus fuerit, *planum*, secus autem *conos verticales.*

·3111112. E punctis $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, . . . rectæ A in plano P sint perpendiculares B, C, . . ., moveaturque schema circa A; viæ rectarum B, C, . . . erunt *plana parallela.*

·311112. *Plures motus circa axem*; sint in plano P ad rectas A, B se mutuo in $\mathfrak{p}$ secantes, rectæ α, β, ex $\mathfrak{p}$ perpendiculares; vertaturque α circa A,

Hosted by Google

et β circa B; via prioris secare viam posterioris debet, atque ibidem est perpendicularis ad P.

·3112. *Motus planorum circa axem.*

·31121. *Motus unus*: planum, circa rectam quamvis in eo sitam motum, producit angulum duorum planorum.

·31122. *Plures motus plani circa axem.*

·311221. Cuiusvis motus axi punctum idem $\mathfrak{p}$ commune: nempe intelligantur omnia in eadem spatii e plano P plaga (ex. gr. superiore), sitque motus plani cuiusvis angulus $<2R$, denotante R rectum; moveaturque sub hac conditione planum P circa rectam $\mathfrak{pa}$ in eo sitam; atque e quovis loco unde libuerit, moveatur item circa aliquam rectam ipsiusdem per $\mathfrak{p}$ euntem, continuando donec libuerit; orietur *angulus solidus rectilineus*. Poterit ea quoque determinatio accedere, ut P semper versus faciem illam moveatur, quæ inferior erat.

·311222. Plures motus circa axem, absque puncto axium communi;

·3112221. Nonnisi planorum.

·31122211. Moto planorum (in ·3111112) parallelorum P, Q, uno circa quamvis rectam in eo sitam, donec ad alterum perveniat: novo hoc plani loco, R dicto, *anguli* ab R cum P et Q facti *alterni* comparantur.

·31122212. Moto R circa rectam quamvis α per P et Q euntem; novo plani loco, S dicto, quæruntur sectiones cum P et Q formæ ex R et S constantis.

·31122213. Moto S quoque circa quamvis rectam β per P et Q euntem: novo plani loco T dicto, quæruntur sectiones cum P et Q formæ ex R, S, T compositæ; tam pro casu si $\alpha \parallel \beta$, quam si non.

·3112222. Planorum cum rectis.

·31122221. Rectæ, quæ e quovis plani P puncto est ad quodvis punctum plani Q ad P paralleli, anguli alterni &c, quos cum P et Q facit, comparantur.

·31122222. Si in plano P fuerit figura rectilinea $\mathfrak{ABC}\ldots$, et quodvis punctum $\mathfrak{a}$ fuerit supra planum (omnibus supra planum acceptis); vertatur P circa $\mathfrak{AB}$ donec recta $\mathfrak{Aa}$ incidat, fiatque $\mathfrak{Bb} \parallel$ et $= \mathfrak{Aa}$, et tum vertatur planum item prius P circa $\mathfrak{BC}$ donec recta $\mathfrak{Bb}$ incidat, fiatque $\mathfrak{Cc} \parallel$ et $= \mathfrak{Bb}$: atque hoc continuetur usque ad ultimum latus; ac demum moveatur planum $\mathfrak{abAB}$ circa $\mathfrak{ab}$, donec $\mathfrak{c}$ incidat: nascetur *parallelepipedum*, si $\mathfrak{ABCD}$ parallelogrammum fuerit, in genere vero *prisma rectilineum*.

·31122223. Si (in præcedentibus) e cuiusvis anguli vertice ad quodvis punctum $\mathfrak{a}$ ibidem dictum recta cogitetur; vertaturque planum P circa latus quodvis, donec $\mathfrak{a}$ incidat: nascitur *pyramis rectilinea*.

·312. *Motus figurarum circa axem.*

·31121. Quadrilateri rectanguli revolutio circa latus parit *cylindrum rectangularem*.

Hosted by Google

·3122. Trianguli rectanguli revolutio circa cathetum parit *conum rectangularem.*

·3123. Revolutio semicirculi circa diametrum parit *sphaeram.*

·3124. Sectionum coni cum plano statim sequentium revolutiones pariunt *paraboloidem*, *ellipsoidem* et *hyperboloidem.*

·313. Motus plani circa axem, punctum aliquod formæ cuiuspiam earum quæ prodierunt, complectentem.

·3131. Si coni verticales fuerint, oriuntur *sectiones conicae.*

·3132. Forma secta etiam Cylinder aut

·3133. Pyramis vel

·3134. Prisma esse potest.

·31135. Si forma hæc *sphaera* fuerit, et

·31351. Plana per centrum eant: oritur in superficie sphæræ *triangulum sphaericum*; quæ e datis sufficientibus computare docet *Trigonometria sphaerica.*

·31352. Si planum quodvis tangat sphæram, aut aliter secet, atque plana omnia simul efficiant superficiem simplicem portionem spatii claudentem: inter hæc oriuntur etiam corpora aut *perfecte* aut *certo respectu regularia.*

·32. Formæ quæ rectarum operationumque primitivarum numero certo generari nequeunt: ex. gr. si figuræ, quæ ita generari nequit, omnibus punctis rectæ ad idem punctum, vel ad eandem rectam parallelæ, cogitentur; et tanto magis si sectio formæ cuiuspiam cum complexu rectarum dictarum quæratur, quod etiam *Perspectivae* problema est, si figuræ vicem qualisvis forma subeat. Verbo omnes formæ, quæ motu e tribus aut pluribus composito, sive modo in arbore exposito per tres rectas perpendiculares, sive motu in quavis forma certa lege facto, generantur, una cum omnibus iis, quæ e compositione horum oriuntur, huc pertinent.

Hosted by Google

Hosted by Google

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SECTIO I.

CONSPECTUS GEOMETRIAE GENERALIS.

E mundo externo, abstrahendo pervenitur ad conceptum *spatii puri*: nempe corpus experientia externa omnino simul cum loco eius datum cogitatione tollendo, manet locus, quem occupasse videtur, finisque intra quos erat; atque tum quærendo quid ultra fines illos sit, tollendo totum mundum experientia datum, et semper porro quærendo pervenitur ad noctem sanctam, quæ myriadibus lucernarum accensis Maiestatis Summæ præsentiam annunciat. In hac volvuntur innumeri orbes, expansis erga se invicem fraternis brachiis, et suspiriis undique tam gratorum, quam afflictorum pectorum, Patrem communem quærentibus — in hac fert mater tellus sub florido sinu dormientes gnatos ad auroram æternitatis — et in hac servatur omnis materia, nascunturque e germinibus mundi, vi mirifica vitali producti, crescunt, vivuntque, motum avitum nisi alio pellantur sequentes; atque intereunt, ut meteora fragoribus tempestatum in oceanum recidentes, novis initium daturi. At interno Geometræ oculo intuente, omnis quæ apparet mundi discordia, cuius magnum problema in concordiam resolvere mortis *aequatio* est, bellumque omnium quod videtur in omnes, cum stridore omni clamoreque orbium disparet, — ac iactatum e minacibus procellarum fluctibus, pacatus excipit noctis tranquillæ portus, luce Veritatis alma collustratus.

Hosted by Google

§. 1.

Primus intuitus ostendit sequentia: spatium est *quantitas*, est *continuum*, *infinitum quaquaversum*, *aeternum*, *praesentibus semper partibus omnibus*, præterea *unum solum* est, et *immutabile*, tam in se quam quoad quamvis partem, nisi quod alia in eo permutare partes eius nempe loca possint. Tempus quoque *quantitas*, *continuum* et *unum solum*, atque *infinitum*, sed nonnisi *utrinque* e quavis parte, quæ nonnisi *expers* adest, atque semper *alia* atque *alia* venit.

§. 2.

Intuitus ostendit porro sequentia: Spatii portionis cuiusvis finis tale continuum est, cuius dantur eiusmodi duo portiones, ut id, quod utriusque finibus commune est, continuum sit, et quidem tale, ut huius item dentur eiusmodi duo portiones, quarum finibus commune expers est.

Hinc

1. Pars eiusmodi expers spatii vocatur *punctum spatiale*, distinctum omnino a *puncto temporis*.

In quavis spatii parte dari punctum, et omnia spatii puncta æqualia esse item intuitu patet.

2. E continui prius orti portione et tum e continui posterius orti portione construuntur conceptus sequentes, combinatis eiusmodi portionibus:

I. Si continuum ex A, B, . . . , F constet, et quodvis horum portio finis alicuius portionis spatii sit, dicitur *superficies*.

II. Si vero continuum ex a, b, . . . , k constet, et quodvis horum portio finis alicuius superficiei sit, dicitur *linea*.

III. Atque si continuum ex α, β, . . . , λ constet, et horum quodvis aut superficies aut linea sit, dicitur *forma* sensu proprio.

IV. Si vero continua qualiavis P et Q fuerint e spatio, atque aliquid commune habuerint, tum si I complexus omnis eius, quod utrique commune est, pars utriusque indivellibilis sit (Tom. I. pag. 23), dicitur *I sectio ipsorum P et Q se mutuo secantium*.

Hosted by Google

3. Interim superficies etiam eiusmodi continua pars indivellibilis spatii dici potest, cuius nulla portio linea est. Imo statim definito stabilitoque motu geometrico, linea etiam via puncti dici potest, et lineæ via quoque superficies est, sed non quævis superficies via lineæ est.

§. 3.

Redeundo e spatio in mundum externum unde segregatum erat, corpus idem in alio quoque loco videnti quæstio succurrit, *num loca eiusdem diversa aequalia sint?* Intuitus ostendit æqualia esse.

I. Hinc quum in quavis spatii portione cogitari corpus queat, *construitur* sine ulla virium consideratione pro quavis portione spatii *mobile* tale, quod cum ea coincidens ab ea diversum cogitatione quaquaversum libuerit in spatio ferri queat, nihil aliud e corporis externi qualitate retinens, nisi quod idem sub eodem tempore diversa loca occupare nequeat.

II. Cum ita constructo mobili iterum reditur in spatium, formaturque *axioma congruentiae*. Nempe si posito mobili tali, idem diversis temporibus posset cum A et B coincidere, tum $A \doteq B$ esse intuitus ostendit.

At non cum quibusvis A et B *geometrice aequalibus* (de quo inferius) mobile idem coincidere potest: Ex. gr. si A et B cochleæ una ad dextram altera ad lævam, etsi alioquin æquales, sint; et innumeros casus tales dari patebit. At per Tom. I. pag. 12. Ax. V. certa cum determinatione talia A et a generabuntur, ut mobile idem diversis temporibus cum a et B coincidere queat.

Quando quidvis P moveri dicetur, semper tale mobile continuum intelligi debet, in quod incidit totum P, etiamsi complexus punctorum sit.

Si vero scribatur

$$A * B * C * \ldots \doteq a * b * c * \ldots,$$

intelligatur mobile in quod cadunt A, B, C, ... ita poni posse, ut A cum a, B cum b, C cum c, ... simul coincidant.

Hosted by Google

Vivit magis, facilior evidentiorque fit Geometria motu dicto admisso, usique eo sunt *Archimedes Graecus* et *Britannus*; atque simulac triangulum unum superimponitur alteri, uti in Euclide, idem ubique admittendum sensu dicto est; reipsa enim spatii pars nulla locum sed rem eam tantum, quam sub certo temporis puncto capit, mutare potest. Prolixius tamen eadem sine motu quoque tradi possunt.

§. 4.

Interim post dicta ultro subvenit in determinationem conceptuum motum respicientium inquirere.

1. *Locus* ipsius A dicitur in spatio complexus omnis eius, cum quo aliquid ex A sub eodem puncto temporis coincidit.

2. Quod sub quovis puncto temporis T est, dicitur *semper esse sub* T.

3. Prodeunte quasi formula, quod M *habeat locum* L *sub* T, aut *sub* T *locus* L *est ipsius* M, succurrit quærere, quidnam sit, si per omnes combinationes transeundo substituatur ipsi M *aliquid ex* M, *omne ex* M, *non omne ex* M, *nullum ex* M, aut *aliquid exclusive*; ipsi T vero substituatur *aliqua puncta temporis*, *omnia*, *nulla* vel *aliqua exclusive*; atque ipsi L substituatur *idem*, *non idem*. Item quævis horum variis determinationibus afficiantur, atque casus constructi vario modo combinentur; at brevitatis gratia quædam tantum magis necessaria referenda sunt; notando ad sensum combinationum attendendum esse. Ex. gr. omni locus non idem, et non omni locus idem, haud æquivalent; nempe prius denotare potest, quod omni sit non idem locus, id est nulli sit locus idem.

4. *Omni ex* M, id est omni quod ex M est, *locus idem* in spatio semper sub tempore continuo T, *quies ipsius* M *sub* T dicitur.

5. *Alicuius ex* M *locus non idem* sub aliquibus punctis ipsius T, est *motus ipsius* M.

6. Motus sub quavis portione ipsius T eveniens, est *motus sub* T.

7. Alicuius autem exclusive locus idem semper, est vel *motus in loco*, ex. gr. sphæræ, si aliquod illud ipsum M sit, vel *compositio qui-*

Hosted by Google

etis et motus, nempe si aliquid quiescat moto M; imo sphæra in loco sui moveri potest, quiescente centro tantum vel etiam diametro.

8. Si quid Q ex M moto hoc quiescat, dicitur *M circa Q moveri.*

9. Porro aliqua puncta ipsius T possunt certo modo determinata duo puncta quoque denotare.

a) Omni ex M locus idem duntaxat sub primo et ultimo puncto temporis alicuius, est *reditus perfectus.*

b) Ipsi M locus non idem sub certis punctis a et b ipsius T, parit conceptum sequentem: Si locus non idem sit, aut habet prior cum posteriore commune aut non; si nec quidquam aut utriusque indivellibile sit commune, dicitur *M totaliter emotum.*

c) Si pro quovis puncto a ipsius T sit talis pars continua eius ipsum a complectens, ut sub nullis duobus punctis huius sit locus idem ipsius M, aut portionis ullius eius, tum *M porro moveri* dicitur.

§. 5.

Prima operatio motus intuitiva.

Variæ hinc exoriuntur quæstiones:

I. Potestne punctum $\mathfrak{p}$ undevis moveri usquequo in quodvis datum spatii punctum M perveniat, et quidem ita, ut quidvis in quod cadit secum ferat? et $\mathfrak{p}$ qualem viam describit?

Intuitus ostendit $\mathfrak{p}$, quidvis in quod cadit secum ferendo, via quacunque $\mathfrak{p}$ cum M connectente, (imo innumerabilibus viis) moveri posse usque in M, et viam quamvis eius esse lineam.

Et hæc est *prima operatio motus intuitiva.*

Linea si e nullo eius puncto duabus plures puncti viæ in ea dentur, dicitur *simplex*; et *superficies*, cuius nullarum trium portionum quarumvis binarum sectio eadem linea simplex datur, dicitur *simplex.*

Linea simplex dicitur *in se rediens*, si punctum in ea motum in locum primum ita redire queat, ut antea in nullo loco iam habito fuerit.

Hosted by Google

Operatio secunda motus intuitiva.

II. Quæstio fit: num moto mobili aliquid ex eo quiescere possit? Num possit unum punctum quiescere, et duntaxat unum? num duo aut plura? et tum complexus omnis sub motu quiescentis qualisnam sit? qualis esse nequeat?

Quoad primum intuitus ostendit quodvis *M*, in quod $\mathfrak{p}$ cadit, innumerabilibus viis posse circa $\mathfrak{p}$ moveri, ita etiam, ut quodvis punctum $\mathfrak{a}$ in *M* cadens (a $\mathfrak{p}$ diversum) redeat.

Hinc passus ad omne parit superficiem sphæræ, nempe complexum omnis eiusmodi puncti $\mathfrak{b}$, ut $\mathfrak{p} * \mathfrak{a} \doteqdot \mathfrak{p} * \mathfrak{b}$.

Intuitus ostendit:

1. Complexum hunc esse superficiem, per quam spatium in duas portiones dispescitur, unam cum puncto $\mathfrak{p}$ interno undique clausam, et alteram circumcirca in infinitum exclusam, ipsam vero esse finem utriusque communem.

2. Nullum punctum posse ex una portione in aliam venire, nisi per finem communem transeat: quod deinde *extenditur ad quasvis duas portiones continui alicuius finem communem habentibus, si punctum in eodem continuo moveri oporteat.*

Potest sphæra dicta dici *sphaera puncti* $\mathfrak{a}$, centro $\mathfrak{p}$; atque puncta superficiei a centro *aequaliter distantia* dici possunt, distantia puncti $\mathfrak{p}$ ab $\mathfrak{a}$ per $\mathfrak{a} * \mathfrak{p}$ expressa (sensu pag. 3.)

Complexum punctorum omnium a centro æqualiter distantium superficiem esse, si non ipsum pro axiomate adsumatur, probari quoque potest: nempe si quid portionis spatii complectatur, id circumcirca adesse debet, et quidem sine ulla prominentia, quum id item ubique circumcirca fieri deberet; itaque duæ superficies essent exterior interiorque, centrum undique punctis omnibus æquidistantibus claudentes; quas diversas esse non posse item intuitu patet.

Hosted by Google

Operatio tertia motus intuitiva.

III. Sed sphæram consideranti ostendit porro intuitus, quod si puncta $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}$ in M cadant, atque ipsius $\mathfrak{b}$ via detur circumcirca quoad $\mathfrak{a} * \mathfrak{p}$ æqualiter determinata: tum M ita moveri circa $\mathfrak{a} * \mathfrak{p}$ potest, ut viam dictam describat.

IV. At vero quæstio oritur:

1. Quomodo punctum eiusmodi $\mathfrak{b}$ ostendi possit, cuius circumcirca $\mathfrak{a} * \mathfrak{p}$ via detur?

2. Num id quoque fieri possit, ut pro $\mathfrak{b}$ nonnisi unum tale $\mathfrak{d}$ detur ut $\mathfrak{a} * \mathfrak{p} * \mathfrak{b} \doteqdot \mathfrak{a} * \mathfrak{p} * \mathfrak{d}$? et

3. Quidsi id quoque fieri possit, ut nullum tale $\mathfrak{d}$ detur, ut $\mathfrak{a} * \mathfrak{p} * \mathfrak{b} \doteqdot \mathfrak{a} * \mathfrak{p} * \mathfrak{d}$?

Atque hinc ipsi $\mathfrak{a} * \mathfrak{p}$ quidvis A substituendo, conceptus sequens oritur. Si non detur tale C diversum a B, ut $A * B \doteqdot A * C$, et quidem ut quovis puncto ipsius A in loco primo manente, C in locum non eundem cum B cadat, dicitur B *unicum ipsius* A. Si vero nec ullum punctum ipsius B aliorsum cadere queat, dicitur B ipsius A *prorsus unicum*.

Facile animadvertitur A secum coincidere posse, etsi puncta non omnia loco priore maneant; ex. gr. si pro $\mathfrak{p}$ centro sphæræ et $\mathfrak{a}$ puncto superficiei, denotetur $\mathfrak{a} * \mathfrak{p}$ per A, erit etiamsi $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{p}$ cadat, sphæra duplex unica ipsius A; et nomen speciale huic casui quoque dari potest.

Interim quæstio etiam oritur, num $\mathfrak{a} * \mathfrak{p} \doteqdot \mathfrak{p} * \mathfrak{a}$? Intuitu ita esse patet.

Exempla.

Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ vertices trianguli sint, quidvis e spatio ipsius $\mathfrak{a} * \mathfrak{b} * \mathfrak{c}$ prorsus unicum est; superficies quæ revolutione lineæ cuiusdam circa duo puncta fit, horum unica, sed non prorsus unica est.

Si vero $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ac}$, tum poterit $\mathfrak{a} * \mathfrak{b} * \mathfrak{c}$ secum etiam ita coincidere, ut $\mathfrak{a}$ in se, $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{b}$ cadant, et si plani in quo triangulum est, una plaga α altera β dicatur, facies trianguli quæ ipsi α obversa erat, ipsi β obvertetur, et ipsi α quæ ipsi β obvertebatur; atque si punctum $\mathfrak{p}$ in

Hosted by Google

plagam α cadat, et triangulum circa perpendicularem ex $\mathfrak{a}$ ad $\mathfrak{bc}$ simul cum α verti concipiatur, dum α in β cadet, $\mathfrak{p}$ quoque in β erit, et si in $\mathfrak{p}'$ cadat, erit $\mathfrak{a} * \mathfrak{b} * \mathfrak{c} * \mathfrak{p} \doteqdot \mathfrak{a} * \mathfrak{c} * \mathfrak{b} * \mathfrak{p}'$. Idem patet etsi $\mathfrak{p}$ in planum idem extra perpendicularem dictam cadat; atque in omni casu unum adhuc dabitur punctum $\mathfrak{p}'$ tale ut dictum est, nisi $\mathfrak{p}$ in perpendicularem dictam cadat: tum vero erit etiam $\mathfrak{a} * \mathfrak{b} * \mathfrak{c} * \mathfrak{p} \doteqdot \mathfrak{a} * \mathfrak{c} * \mathfrak{b} * \mathfrak{p}$.

§. 6.

Hinc passus ad omne fit: nempe complexum omnis puncti quod unicum punctorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ est, nempe rectam; quod item latius extensum, parit conceptum sequentem.

Illud e spatio, quod quorumvis duorum punctorum sui quodvis unicum punctum spatiale complectitur: dicitur *recta* si *linea* sit, *planum* si *superficies* sit; patebitque esse *spatium* quaquaversum infinitum, si *portionem spatii* complectatur; imo et recta planumque per hanc definitionem infinita exhibentur; at vero num dentur talia, quæstio fit. Inferius ostendetur, rectam per quævis duo puncta, planum per quævis tria puncta dari.

Cum definitio ista simul affinitatem plani cum recta exprimat, plures exactas quidem supprimere licet; aliqua tamen huius generis adferre fas est.

Forma certorum duorum punctorum unica, cuius pro omnibus punctis datur tale idem punctum $\mathfrak{p}$, ut pro quibusvis duobus punctis $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ formæ dictæ sit $\mathfrak{p} * \mathfrak{a} \doteqdot \mathfrak{p} * \mathfrak{b}$, est si linea sit *circulus*, si superficies sit *sphaera*.

Linea simplex certorum duorum punctorum unica est, si rediens sit, *circulus*, si non, *recta*.

Forma alicuius puncti unica est *sphaera*.

Elegans est plani definitio, quam Ioannes Bolyai Auctor Appendicis dedit, complexum omnis eiusmodi puncti $\mathfrak{p}$, ut pro certis duobus punctis $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, iisdem pro omnibus $\mathfrak{p}$, sit $\mathfrak{p} * \mathfrak{a} \doteqdot \mathfrak{p} * \mathfrak{b}$, dicendo *planum*, sectionem duorum planorum vero *rectam*.

Hosted by Google

§. 7.

Prodeunte plano, in quod cadit a quovis puncto ad quodvis eiusdem ducta recta, campus simplicior clariorque aperitur, circumcirca expansus in infinitum, spatium in duo dimidia æqualia dividens, quamvis (ut inferius ostendetur) congruere manentibus omnibus dividentis punctis in suis locis nequeant. Huc idcirco mens e spatio quaquaversum infinito descensura, antea tamen in rectæ planique combinationes generaliter disquirit.

Quævis A et B, quorum quodvis aut rectam aut planum denotet, aut secant se, aut non: quæritur, num possint secare, et possint non secare? et si possint, quando id fiat? et sectio qualis sit?

Demonstrabitur pro dato quovis plano P et puncto $\mathfrak{p}$ dari tam planum quam rectam ipsum $\mathfrak{p}$ complectentia, ipsum P non secantia, etsi singula simul infinita accipiantur; ita pro data recta A et quovis puncto $\mathfrak{p}$ dari rectam B patebit ipsum $\mathfrak{p}$ complectentem, quæ ipsam A non secet, etsi utraque infinita concipiatur; et quidem tam in illo plano, in quo A et $\mathfrak{p}$ sunt, quam extra illud. Patebit porro per idem punctum innumera plana dari, et quorumvis planorum P et Q infinitorum punctum commune habentium sectionem rectam utrinque infinitam esse; ita per quodvis punctum rectas innumeras dari, et quarumvis duarum rectarum aliquid commune habentium sectionem unum punctum esse.

At quæstio subvenit, num per $\mathfrak{p}$ unum solum aut plura quoque plana diversa dentur planum P non secantia? Si nonnisi unum sit, tum et sectio plani illius solius P' atque plani P, per planum tertium Q (per rectam ex aliquo puncto ipsius P ad aliquod ipsius P' ductam positum) facta, eiusmodi par rectarum producet, quæ in planum Q cadentes se invicem non secant, sed quævis alia per punctum $\mathfrak{p}$ in eodem plano Q posita secat rectam ipsis P et Q communem; nam si non secaret, facile demonstratur et planum per rectam illam ex $\mathfrak{p}$ positum dari, quod planum P non secaret. Atque tum Axioma XI. Euclidis constaret: sed de hoc plura inferius.

Hosted by Google

§. 8.

Hic prius plures rectas ex eodem puncto euntes combinando oritur conceptus sequens.

I. Si rectæ e puncto eodem $\mathfrak{p}$ exeuntes in forma quadam f (sive pars plani sit sive non) desinant: complexus rectarum omnium, quæ a $\mathfrak{p}$ ad puncta formæ f sunt, dicitur *pyramis* sensu lato *basi f insistens*; quo etiam triangulum pertinet, si forma f recta sit.

Hinc porro, rectarum istarum quidem cuiusvis sua magnitudo determinata est: at rectis his quasi ex $\mathfrak{p}$ acceptis, et complexu extremitatum earum pro obiecto considerationis posito, facile succurit quærere, quidsi omnes ex. gr. bis vel ter & longiores brevioresve essent? verbo ut quævis fiat $\frac{n}{m}$-ta prioris? Atque hinc oritur conceptus sequens: notando quod per *plagam k* ipsius A intelligatur illa portio α continui A portionibus α et β constantis, in qua k est, posset si de α, excluso c quod ipsi α, β commune est, sermo sit, *regio k ex c* dici. Per *internum* continui vero intelligitur id quod ex eo est, nihil cum fine illius commune habens.

1. Si quidvis Q fuerit e spatio, cuius punctum quodvis generaliter $\mathfrak{Q}$ dicatur, et sit pro omnibus $\mathfrak{Q}$ idem punctum $\mathfrak{p}$ et eadem quantitas β, atque accipiatur in omni quavis recta, a $\mathfrak{p}$ per aliquod $\mathfrak{Q}$ eunte, recta $\mathfrak{pq} = \beta . \mathfrak{pQ}$, omni quovis $\mathfrak{q}$ in ea rectæ $\mathfrak{pQ}$ plaga in qua $\mathfrak{Q}$ est accepto; tum complexus P omnis $\mathfrak{q}$ dicitur *simile* ipsi Q; atque complexus quorumvis $\mathfrak{q}$ complexui ipsorum $\mathfrak{Q}$ illi $\mathfrak{q}$ respondentium *homologum* audit. Hoc sensu igitur dari quoque similia patet.

Possunt etiam P et Q *similia* dici, si cuivis puncto cuiusvis ipsorum P et Q respondeat certum alterius punctum, et cuivis alii aliud, atque detur quantitas β eadem pro omnibus talis, ut quævis puncta $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ fuerint ipsius P, iisque respondeant $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ex Q, sit $\mathfrak{AB} = \beta . \mathfrak{ab}$. Dari talia, si Axioma XI. Euclidis constiterit, per triangula ad $\mathfrak{p}$ verticalia patet.

Aut: si quævis tria puncta $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ accipiantur in P, iisque ut

Hosted by Google

dictum est respondeant $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ex Q, atque anguli (de quibus inferius) $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{abc}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{bac}$, et $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A} = \mathfrak{bca}$; tum pariter P et Q *similia* dici possunt, posito Axiomate XI. Euclidis.

Elegans est conceptus *similium*, quem Ioannes Bolyai *Appendicis Auctor* dedit. Si e puncto eodem quocunque $\mathfrak{p}$ concipiantur rectæ ad omne punctum ipsius Q: complexum extimarum omnium ex omnibus illis rectis, quæ a $\mathfrak{p}$ ad punctum aliquod ipsius Q sunt, in infinitum productarum, *formam relativam* ipsius Q appellando, *similia* dixit P et Q, si cuivis formæ relativæ ipsius P detur forma aliqua relativa ipsius Q æqualis.

Quodvis autem horum per quodvis eorundem poni demonstrari potest, si Axioma XI. Euclidis constiterit.

2. Sed e prima definitione facile quæstio oritur: quidsi omnia $\mathfrak{q}$ in altera plaga (non ubi respondens $\mathfrak{Q}$ est) accipiantur? Hoc pacto quoque formas certo respectu similes prodire patet, si conceptum ita extendere libuerit; at etiam pro $\beta = 1$ formæ tales verticales prodeunt, quæ alioquin certo respectu statim dicendo æquales, nunquam tamen congruere queunt, atque etiam compræsentes discerni præter locum quoque possunt. Ex. gr. Sit Q manus dextra; generabitur in plaga altera post $\mathfrak{p}$ forma manui sinistræ congruens; si nimirum forma generata ita invertatur, ut quod supra erat infrorsum, et quod infra erat sursum veniat, prodibit imago quasi in speculo S per $\mathfrak{p}$ posito facta, versione dicta circa perpendicularem ex $\mathfrak{p}$ ad speculum S usque ad duos rectos facta. Intelligitur autem hic per imaginem ipsius Q complexus punctorum omnium, quæ perpendiculares ex omnibus punctis ipsius Q ad planum S missas, in altera spatii plaga æqualiter continuatas terminant. Facile patet, versione dicta perpendiculares e punctis respondentibus quibusvis $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{a}$ ad S missas antea æquales, nunc in puncto eodem ipsius S terminari. Sit nempe (Fig. 1.) in plano speculi recta ad planum tabulæ perpendicularis ex $\mathfrak{p}$, sitque ipsius $\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ punctum $\mathfrak{D}$ supra tabulam, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in plano tabulæ, fiantque $\mathfrak{ap} = \mathfrak{Ap}$, $\mathfrak{bp} = \mathfrak{Bp}$, $\mathfrak{cp} = \mathfrak{Cp}$, et $\mathfrak{dp} = \mathfrak{Dp}$: erit manifesto $\mathfrak{d}$ infra tabulam, et propter triangula verticalia æqualia erunt perpendiculares e literis nominis eiusdem ad planum speculi missæ æqua-

Hosted by Google

les: atque si schema literarum minorum circa Pp perpendicularem ad pk per duorum rectorum intervallum vertatur, cadet m in M &, et d quoque supra tabulam e regione ipsi D erit.

Rem adhuc illustrat, si duarum cochlearum alioquin æqualium, una dextrorsum altera sinistrorsum torta sit, atque illa ad latus speculi, hæc coram teneatur; sinistræ imago erit cochlea dextra, quæ illi quæ ad latus tenetur, congruere poterit; ita imago manus dextræ manui sinistræ congruere poterit; sed manicæ manui dextræ congruentis superficies interior extrorsum vertenda est, ut sinistræ congruat.

3. Unde etiam conceptus sequens oritur. Si *A* non omnia puncta in eodem plano habeat, neque complexus sit eiusmodi partium *a* et *b*, ut *a* et imago ipsius *b* compræsentes nonnisi per locum discerni queant: tum *A* et quodvis tale *B*, ut *B* et imago ipsius *A* compræsentes nonnisi per locum discerni queant, dicuntur *formae contrarie aequales*. Nempe hæ sunt, quæ congruere nequeunt; quamvis per perpendiculares ex eiusdem plani iisdem punctis in utraque plaga æquales, resultata (per Ax. V. pag. 12, Tom. I.) operationum æqualium sint, præterquam quod unum in una, alterum in altera plaga generetur.

4. Unde item novus conceptus nascitur: nempe *geometrice aequalia* dici possunt *A* et *B*, si aliquod *C* possit cuivis aut ipsi aut imagini eius congruere.

5. Notandum autem est, et ad facies, quibus congruibilia congruere queunt, attendendum esse. Ex. gr. trianguli non æquicruri imago cum ipso nonnisi faciebus e regione stantibus, aut faciebus aversis tegentibus se invicem congruere possunt. Dicantur ob conceptum faciliorem facies obversæ eiusdem coloris ex. gr. albi, aversæ nigri; facies alba albam, aut nigra nigram tegat necesse est, ut congruant: si vero parallelogrammi una facies alba altera nigra sit, tum triangula per diagonalem facta generaliter nonnisi ita congruunt, ut facies alba trianguli unius nigram alterius tegat. Circuli vero aut trianguli æquicruri imago, circa rectam bifariam dividentem ad duorum rectorum intervallum mota, nigram faciem albæ obvertens quoque congruere poterit.

Sed prius dicta illustrantur adhuc per sequentia. Si e trianguli puncto

Hosted by Google

quovis fiant ad planum trianguli perpendiculares in utraque plaga æquales: tum formæ ipsius *F* dantur partes tales ut supra dictum est, nempe forma e triangulo et perpendiculari quæ in una plaga est constans, item forma ex eodem triangulo et perpendiculari altera constans tales sunt, ut complexus earum *F* sit, et una imagini alterius absolute æqualis sit; atque *F* cum imagine sua congruere quoque potest.

At si in una tantum plaga sit perpendicularis, nisi e perpendiculari triangulum æquicrurum bifariam dividente erecta sit, hæc forma talibus duabus partibus ut dictum est, non gaudet; neque potest cum imagine sua congruere.

Sit item (Fig. 2.) ianua 𝔄𝔅ℭ𝔇; ad 𝔘, 𝔙 sint cardines, 𝔈𝔉𝔊ℌ sit sera prominens, quæ cum prominentia ipsius 𝔈 ianuam claudit; sit imago huius 𝔞𝔟𝔠𝔡, et facies e regione stantes sint albæ, manifesto sera et imago eius prominens erga se invicem porrecta sunt, atque faciebus albis et 𝔄𝔅 ac 𝔞𝔟 congruentibus, sera et imago eius in plagas contrarias cadent; sed si ad 𝔉𝔈 et 𝔊ℌ (supra et infra) omnia æqualia essent, adeoque darentur duæ partes ut dictum est: tum verso ipso 𝔞𝔟𝔠𝔡 circa 𝔦𝔥 usque ad duos rectos, ut facies nigra imaginis faciei albæ obiecti obvertatur, prodibit 𝔡𝔠𝔟𝔞, cuius (simul cum sera, iuxta schema) facies nigra congruit albæ faciei ipsius 𝔄𝔅ℭ𝔇. At si ad 𝔈 sit aliquid ut supra, quod ad ℌ non est, congruentia impossibilis est.

Cuiusvis animalis forma externa, in qua montrositas nulla est, ita a natura comparata est, ut gaudeat duabus eiusmodi partibus, ut supra dictum est; imo talibus ut una imago alterius esse possit, quasi ex uno plano in utraque plaga modo supra dicto æqualiter generata, geometrice sensu dicto æqualia essent.

Notandum autem est, inter omnes superficies solum planum esse, cuius quælibet facies alteri obversa hanc tegere queat; atque in systemate Euclideo planum solum cum sphæra in eo convenire, quod utrumque circa quodvis sui punctum in se moveri queat (inferius, ·31351, §. 8) et solum discrimen esse, quod sphæræ quodvis punctum ab eodem certo æquidistet.

II. Rectis porro pluribus, imo innumerabilibus, punctum 𝔭 commune

Hosted by Google

habentibus, in sectione præcedente ob oculos habitis, facile cogitatur rectam pP circa p moveri, et formam viæ eius considerare: inter vias eius possibiles occurit etiam via rectæ pP circa p porro ita motæ ut redeat. Via talis aut erit in plano eodem tota, aut non.

1. Si prius: tum via cuiusvis puncti præter p vocatur *circulus*, et pars quævis continua eius, perimetrum intelligendo, dicitur *arcus*, recta vero quæ a p usque ad punctum est, de cuius via sermo est, *radius*, p *centrum*, et recta ab uno perimetri puncto ad aliud *chorda*, et si hæc per centrum eat *diameter*, pars plani inter arcum et chordam eius comprehensa *segmentum*, illa vero quæ inter arcum et radios per extremitates arcus ductos est, *sector* dicuntur.

Si vero (Fig. 3.) punctum ab a incipiendo in peripheria semper porro moveatur usque ad quodvis punctum f, et via v eius accipiatur positiva, si via supra *diametrum* ab (quæ *primaria* dicatur) incipiat, et negativa, si via infra ab incipiat; atque partes diametri dictæ e centro versus a positive versus b negative, et perpendiculares ad ab supra ab positive infra ab negative accipiantur: dicitur distantia fm puncti f ab ab (id est perpendicularis ex f ad diametrum primariam) *sinus viae dictae* v ab a usque ad f, sive positive sive negative facta fuerit via, imo etsi punctum dictum semper porro motum quotiesvis iterum in a pervenerit, dummodo demum in f subsistat. Distantia cm centri vero a sinu vocatur *cosinus* ipsius v, distantia am initii a autem ab eodem sinu *sinusversus ipsius* v audit; $\frac{\sin. v}{\cos. v}$ autem pro radio $=1$ dicitur *tangens* ipsius v, et $\frac{1}{\cos. v}$ *secans* audit. *Complementum* ipsius v dicitur talis arcus α, ut $\alpha + v =$ quadranti q, si ex. gr. $v = 3q$, erit $\alpha = + 2q$. Insignitur autem sin. α, tang. α, sin. vers. α, sec. α nomine eodem relato ad v, nonnisi syllaba *co* præposita, nempe dicitur *cosinus* v, *cotangens* v, *cosinus versus* v &c., quasi diceretur *complementi sinus* &c.; ut facile patebit et cosinus definitionem priorem cum hac convenire, uti et sinum versum dici potuisse $1 - \cos.$; atque suo loco omnes has *functiones trigonometricas* dictas geometrice exhiberi. Nomen sinus inde exortum est, quod semissis chordæ arcus dupli per *s. ins.* (idest *semissis inscriptae*) scribebatur.

2. Si non sit via rectæ prius dicta in eodem plano: tum facile cogi-

Hosted by Google

tatur, rectam motam saltem in plaga a plano certo per $\mathfrak{p}$ posito eadem semper manere, donec porro mota redeat; dicatur via eiusmodi $\vee$ *forma ad* $\mathfrak{p}$ *apicata*, quum forma eiusmodi manifesto singularitate aliqua ad $\mathfrak{p}$ gaudeat, quod vulgo sub nomine *apicis* venit.

3. Tum facile succurit lineam aliquam simplicem considerare, cuius nonnisi punctum unum, et quidem internum, in $\vee$ et plane in $\mathfrak{p}$ cadit, omnia alia puncta vero in plagam spatii ex $\vee$ ab ea in qua planum est diversam cadant; et lineam illam in superficie aliqua, et demum in plano sitam considerare, et hinc conceptum sequentem generaliorem construere.

4. Si k aut punctum internum lineæ talis l, quæ portio formæ F est, aut linea talis sit, cuius punctum quodvis internum p, internum etiam est lineæ alicuius L in plano sitæ, et simul non in illo plano sitæ portioni alicui formæ F communis; atque in casu priore linea l puncto k in $\mathfrak{p}$ cadente, in posteriore vero linea L puncto p in $\mathfrak{p}$ cadente, in plagam respectu formæ alicuius ad $\mathfrak{p}$ apicatæ interiorem cadat: tum dicitur *F ad k angulum habere*, nempe forma illa, qua F ex k incipit, *angulus* vocatur.

Facile videtur, angulos esse posse in lineis, in superficiebus, necnon in continuo e linea et superficie composito.

5. Quæstio autem fit: num recta A e puncto interno i rectæ B ducta angulos faciat? et quot angulos efficiat recta A continuata per i? num aliqui eorum sint æquales, et qui sint ii? Facile patebit verticales dictos esse semper æquales; si vero singuli quatuor qui efficientur sint inter se æquales, aut recta A per i non continuata efficiat duos angulos æquales, vocatur quilibet eorum *rectus*. Fit vero *angulus* per duas rectas factus, *rectilineus* dictus, *quantitas respectiva* (Tom. I. pag. 25) divisione arcus, ex anguli apice tanquam centro, radio quovis ab una duarum rectarum usque ad alteram ducti, per peripheriam totam radii eiusdem; si quoti hi sint pro duobus angulis æquales, et formas angulares congruentes incipere demonstrabitur; si vero quotus q sit pro angulo α, et Q pro angulo β, atque $q = \mu Q$, tum α dicitur angulus μ-tuplus anguli β (Tom. I, pag. 48). Duorum planorum angulus autem fit

Hosted by Google

quantitas respectiva, arcu illo per suam peripheriam diviso, qui uno eorum circa sectionem usque in alterum moto per quodvis punctum describitur; eundem quotum prodire patebit.

Angulus rectæ $\mathfrak{ab}$ cum plano vero fit quantitas respectiva dividendo arcum illum per suam peripheriam, quo in superficie sphæræ centri $\mathfrak{a}$, in quo sectio est, et radii $\mathfrak{ab}$, ex $\mathfrak{b}$ usque ad planum, cum radio $\mathfrak{ab}$ nullus minor datur. Denotatur angulus per $\wedge$.

6. Passus hinc est cogitare, quid si forma aliqua ad nullum sui punctum angulo gaudeat? dicatur *forma* eiusmodi *fluens*; quæ item facile cum quantitate combinatur; oriturque conceptus formæ, quæ et fluens et quantitas est; et dici *forma* eiusmodi *uniformis* potest. Ex. gr. recta, circulus, helix, planum, superficies sphæræ, cylindri.

7. Ita facile conceptus formæ fluentis etiam cum exclusione rectæ planique componitur: oriturque forma fluens, cuius nulla portio recta aut planum est, et dicitur *forma* eiusmodi *curva*.

8. Porro ad compositionem *curvae* cum recta planove itur, quærendo num continuum e forma curva et recta planove forma fluens esse queat? oriturque conceptus *tangentis*.

Nempe *formam curvam F in puncto* $\mathfrak{p}$ *tangere* dicitur tam una recta eiusmodi, quam complexus omnium talium rectarum, ut cuiusvis earum detur tale punctum internum $\mathfrak{p}$ in F cadens, ut aliqua portio ex $\mathfrak{p}$ incipiens cum linea aliqua in F sita ex $\mathfrak{p}$ incipiente forma fluens sit. Complexus omnium talium rectarum, sive una tantum sive plures sint, dicitur *tangens totalis*.

Ex. gr. Sphæram potest tangere recta, sed tangens totalis planum est, uti circuli recta.

Hinc facile in discrimen tangentium totalium in diversis formæ eiusdem F punctis quæritur: atque si tale k detur in F, ut tangentium totalium, quæ ad omnia puncta ipsius k sunt, complexus ipsa tangens totalis ad $\mathfrak{p}$ sit, tum tangens eadem dicitur formam F non in $\mathfrak{p}$ solum, sed etiam *in k tangere*. Ex. gr. planum idem tangere cylindrum in recta et quovis puncto huius potest.

Imo hinc extenditur conceptus, dicendo etiam *formas fluentes quas-*

Hosted by Google

vis F et f tangere se invicem in k, si in quovis puncto ipsius k tangente totali tam F quam f eadem gaudeant.

Hinc etiam oriuntur conceptus supra (Tom. I. pag. 290) dicti.

9. Porro conceptus tangentis totalis facile cum conceptu anguli recti paulo antea dicti combinatur, oriturque *conceptus generalis perpendicularitatis.*

Nempe si T tangens totalis formæ F in puncto $\mathfrak{p}$ sit, atque recta r in $\mathfrak{p}$ terminata, cum quavis recta in T sita ac in $\mathfrak{p}$ terminata, angulum rectum faciat: dicitur r etiam utvis continuata tam *ad* T quam *ad* F *in* vel *ex* $\mathfrak{p}$ *perpendicularis*, si recta eiusmodi utrinque infinita, in quam talis r cadit, sola tantum sit etiam pro tali superficie formam F complectente, cuius tangens totalis ad $\mathfrak{p}$ planum est. Denotatur autem perpendicularis A ad B per $A \perp B$.

Extenditur idem generalius quoque ad k, sive punctum sive linea sit: nempe si e quovis puncto ipsius k detur eiusmodi perpendicularis ut dictum est, complexus omnium eiusmodi perpendicularium ad F ex omnibus punctis ipsius k, dicitur *perpendicularis ad F in* vel *ex k.*

III. Demum rectis ex eodem puncto $\mathfrak{p}$ ad omnia puncta formæ cuiuspiam f consideratis, facile succurrit unius earum plagam in qua $\mathfrak{p}$ est continuare in infinitum, atque punctum $\mathfrak{p}$ semper porro movere, apice pyramidis abeunte in infinitum; atque tum quærere, num angulus ad apicem rectæ alicuius decrescat? et si decrescant omnes, num omnes tendant ad 0? Patebit ita esse, darique pro quavis rectarum dictarum rectam in qua, recta cuius una extremitas $\mathfrak{p}$ altera $\mathfrak{q}$ in f est circa $\mathfrak{q}$ per rectam dictam porro mota, hanc prima vice deserat; imo omnes eas rectas punctum $\mathfrak{p}$ commune habentes eo modo rectam eandem omnes simul prima vice deserere posse, fierique omnes simul infinitas.

1. Tum ultro venit omnes finitas magnitudinis eiusdem reddere, et complexui earum nomen dare. Dici potest hoc *prisma* sensu generali. Complexu extremitatum, in quibus rectæ æquales initium in f habentes terminantur, F dicto: patet cuivis puncto cuiusvis ipsorum F et f alterius certum punctum, nempe extremitatem rectæ alteram, respondere; et cuivis alii aliud.

Hosted by Google

Ex. gr. Si forma f recta r sit, orietur figura in plano sita (ut infra patebit) duabus rectis extimis, recta r, et complexu c punctorum, in quibus terminantur rectæ ex omnibus punctis ipsius r rectam dictam eandem prima vice non secantes, clausa: at quæritur, c qualenam sit? et anguli, quos rectæ dictæ æquales cum r versus eandem plagam faciunt, sintne æquales?

Unde item passus est cogitare, quid si æquales essent? et patet, quod si recta r moveatur in se rectam extimam in eodem plano secum ferendo, donec initium ipsius r in finem perveniat, extremitatis rectæ extimæ via gaudebit qualitate, quæ de F dicta est, præterquam quod non constet rectas dictas omnes se invicem modo priore prima vice non secantes esse. Atque hinc conceptus sequens oritur: si formarum F et f cuiusvis, puncto cuivis respondeat certum punctum alterius, et cuivis alii respondeat aliud, atque rectæ inter puncta correspondentia æquales, et quævis binæ in eodem plano sint, neque etsi infinitæ sint secent se invicem: dicitur complexus rectarum illarum omnium *prisma* generalius.

2. Interim via extremitatis lineæ extimæ plane dictæ novum conceptum parit: nempe pro angulo quem ea cum r facit, facile rectus ponitur; et manifesto si (Fig. 4.) $\mathfrak{dc} \perp \mathfrak{ab}$, et $\mathfrak{ac} = \mathfrak{cb}$, sive ad dextram sive ad lævam moveatur $\mathfrak{dcab}$, recta $\mathfrak{ab}$ in se et $\mathfrak{dc}$ in eodem plano manente, ob generationes utrinque et undevis æquales (Tom. I. pag. 12. V) describet $\mathfrak{d}$ lineam uniformem, angulos utrinque et ubique æquales cum $\mathfrak{dc}$ facientem; (angulum esse infra patebit). Dicatur via hæc ipsius $\mathfrak{d}$, sive continuata sit in infinitum, sive pars quævis continua eius accipiatur, *aequifluens ipsius* $\mathfrak{ab}$ *ad distantiam* $\mathfrak{cd}$. Est vero linea hæc recta, si Axioma XI. Euclidis constet, et constat hoc, si illa recta sit; de quo infra.

3. Hinc facile cogitatur rectam $\mathfrak{ab}$ alicubi terminari, ibique aliam incipere, sive in eodem plano priore, sive in alio; et ubi hæc terminatur, item aliam incipere, atque cuique harum æquifluentem ad distantiam eandem $\mathfrak{cd}$ dare, continuando idem donec libuerit. Denotentur rectæ dictæ per literas maiores, et earum æquifluentes per minores nominis

Hosted by Google

eiusdem; nempe sit linea $\mathfrak{ABCD}$ . . . e rectis $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{CD}$, . . . composita, et $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$ sint rectarum $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{BC}$ æquifluentes in $\mathfrak{b}$ secantes se invicem &.

Quæstio oritur num $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{b}$ in plagam plani $\mathfrak{ABab}$ respectu rectæ $\mathfrak{Aa}$ eandem cadant? atque si generaliter ponatur, quod si quævis litera magna $\mathfrak{H}$ et parva $\mathfrak{h}$ fuerit, $\mathfrak{HJ}$ et $\mathfrak{Ji}$ in plagam plani $\mathfrak{HJhi}$ respectu rectæ $\mathfrak{Hh}$ eandem cadant; dicuntur linea $\mathfrak{ABCD}$ . . . e rectis composita, et linea $\mathfrak{abcd}$ . . ., *lineae primario aequesitae.*

4. Unde iterum generalior conceptus oritur: nempe quæcunque lineæ simplices L et l dicuntur *generaliter aequesitae*, si pro utvis parva recta k dentur lineæ L' et l' primario æquesitæ tales, ut cuiusvis ipsarum L et L' punctum quodvis aut in alteram cadat, aut detur ab illo ad aliquod punctum lineæ alterius recta $< k$; ita cuiusvis linearum l et l' punctum quodvis aut in alteram cadat, aut detur ab illo ad punctum aliquod lineæ alterius recta $< k$.

5. Atque hinc demum oritur generalis conceptus *parallelismi* formarum F et f; si e cuiusvis formarum F et f ex. gr. ipsius F quovis puncto $\mathfrak{P}$ ductis in F quibusvis et quotvis lineis simplicibus nihil præter $\mathfrak{P}$ commune habentibus, e certo puncto $\mathfrak{p}$ ipsius f iis æquesitæ reperiantur eodem ordine se invicem excipientes, nihil præter $\mathfrak{p}$ commune habentes.

Aut brevius: si cuivis lineæ simplici in quamvis ipsorum F et f cadenti detur æquesita in altero, dicuntur F et f *parallela.*

Sensu latissimo dicitur etiam quævis pars continua ipsius f *parallela* ipsi F, si f et F parallela fuerint. Denotatur parallelismus ipsorum F et f per $F \parallel f$.

Num vero recta alteram primo non secans (pag. 17) huic parallela sit, aut num detur recta rectæ parallela, a decisione Axiomatis Euclidei undecimi pendet; de quo inferius.

Notandum autem etiam alium parallelismum distingui posse: si nempe in definitione æquesitorum, pro quævis litera magna $\mathfrak{H}$ et parva $\mathfrak{h}$, recta $\mathfrak{HJ}$ et eius æquifluens in diversas plani dicti plagas cadant, quo in casu lineæ $\mathfrak{ABCD}$ . . . et $\mathfrak{abcd}$ . . . *inverse aequesitae*, atque inde

Hosted by Google

parallelae inversae dici possunt, prioribus *directis* dictis; et tum conceptus *aequesitorum* quam *parallelorum* extendi generalius potest, si æquesita dicantur, dum quævis HJ et hi aut simul in eandem plagam plani dicti aut quævis simul in diversas eiusdem plagas cadant.

(Fig. 5.) exhibet exemplum simplicissimum, unde conceptus nascitur pro linea ABCD . . . in plano sita, ita (Fig. 6.) parallelismi inversi; patet etiam formas parallelas tales dari, quæ se invicem secant.

§. 9.

Post hæc, cum disquisitiones istæ, quæ mentem in planum descendentem retinebant, ipsæ indigitent plura adhuc subsidia desiderari, ut penitius intelligantur: ea in simplicioribus quærens descendit in planum. Ubi

1. Obviam venit, puncti vias in campo infinito innumerabiles dari, occurritque præter rectam aliaque, etiam linea simplex in se rediens; quæ in quacunque superficie simplici fuerit, *figura* dicitur; et in plano quoque curva varii generis, quo pertinet etiam circulus per operationem motus intuitivam secundam via ad planum restricta, aut mere e rectis composita aut mixta esse potest. Si e tribus rectis componatur, *triangulum*, si e quatuor rectis constet in plano, *quadrilaterum* audit; ita si ex *n* rectis composita sit, *n latera figura rectilinea plana* dicitur; si vero latera æqualia sint, *aequilatera*, si anguli æquales *aequiangula*; si et latera et anguli æqualia sint, *regularis* dicitur, et figura quatuor laterum dicitur *quadratum*, si plura fuerint latera, *polygonum regulare* tot laterum dicitur quot latera habet.

2. At vero etsi constaret inter quævis duo puncta dari rectam, eamque totam in idem planum cadere, atque e quovis puncto plani radio quovis dari circulum in planum idem cadentem totum; quæ tamen et ipsa adhuc inferius demonstranda erunt: quæstio ultro suboritur, num dentur in præcedentibus dicta? et num rectarum circulorumque certo numero ea adesse demonstrari queat?

Id quod certo rectarum circulorumque numero determinatur, dicitur *geometrice construi posse.*

Hosted by Google

Per *geometrica constructione perficere aliquid*, quod in ita dicto *problemate* enunciatur, intelligi solet: id numerabilibus eiusmodi operationibus peragere, quarum quævis est rectam ducere aut circulum describere; quod omnino tam rectam ducendo, quam circulum describendo, motum sapit, in ipso Euclide quoque; quamvis exemplar constructionis geometricæ exhibeat, absque eo, ut eam ullibi definiat (ut linguam vivam bene loquentes regulas Grammaticæ subticent); at tanto magis commentator eius statim apud secundam propositionem (ubi puncto $\mathfrak{p}$ et recta r positione datis, recta in eodem plano ex $\mathfrak{p}$ ipsi r æqualis determinanda est) constructionis geometricæ ideam dare debet, ut genius Euclidis percipiatur. Requiritur nempe ad hoc perficiendum numerus 7. Omnibus immotis fit hoc, et quamvis facile possit extremitas ipsius r ipsam r in plano secum ferendo (per operationem motus primam intuitivam ad planum restrictam) usque in $\mathfrak{p}$ moveri, aliquid valde pulchri habet propter fidelem ideæ constructionis geometricæ, quam sibi Euclides proposuit, executionem.

Interim in numerum finitum dictum admitti etiam dicta operatio motus prima potest; ut si quid suppositis rectis, quas inter quævis duo puncta adesse demonstrabitur inferius, fiat numero finito operationum, quarum quævis aut prima aut secunda operatio motus intuitiva est, via et generatis ad planum restrictis, nec plures operationes coniungantur, id est in M moto interea aliud quid haud moveatur: id *geometrice construi* dicatur, et quidem *sensu stricto*; si vero non restringatur ad planum, admissa operatione tertia quoque, *constructio geometrica sensu lato* dicatur.

3. Quamquam autem et veritates æqua dignitate polleant (ut in natura sol, orbium dies, et noctilucæ exigua luminis in vasta nocte sphæra, eadem sapientia infinita radiant): *Geometria* quæ *elementaris* dicitur, *sensu lato* in iis, quæ sensu lato geometrice construi possunt, et *sensu stricto* in iis, quæ sensu stricto geometrice construi possunt, terminari potest iis, quæ nonnisi operationibus coniunctis fieri possunt, ditioni, quæ *Geometria sublimior* dici solet, assignatis; uti inferius pluribus exemplis ostendetur.

Hosted by Google

§. 10.

Post descensum e spatio quaquaversum infinito in campum circumcirca in plano infinitum apertum: disquiritur ibidem in qualitates formarum, prius quarum omnia puncta, tum earum quarum non omnia quidem sed quodvis geometrice sensu stricto construi possunt, et demum illarum, quarum quodvis punctum ope formarum priorum construi potest. Considerantur autem prius omnimodæ combinationes rectarum et circulorum, prouti arbor inferius ostendet. Denique applicata Arithmetica e datis quantitates ignotæ quæruntur, quo etiam *Trigonometria plana* pertinet, docens e quibusvis triangulum rectilineum determinantibus quantitates per idem triangulum determinatas ope calculi computare.

Datur quidem (in paragrapho sequente) etiam *Trigonometria sphaerica*: nempe triangula quæ in superficie sphæræ per tria plana per centrum posita generantur, suo loco etiam computantur. Estque planum quasi limes geometricus, cuius idea facile determinatur, superficiei sphæricæ, centro remoto in infinitum, posita Axiomatis XI. Euclidis veritate; secus autem alia quædam superficies uniformis circumcirca infinita est limes geometricus dictus, in qua Axioma XI. Euclidis, simul cum tota Planimetria Euclidea, demonstratur in Appendice; Trigonometria sphærica autem a veritate Axiomatis XI. Euclidis independenter absolute vera stabilita ibidem est.

§. 11.

Dein reditur in abyssum spatii, unde in planum descensum erat: atque ibi formarum omnium quæ in plano prodierunt, combinationes iuxta arborem exponendam omnimodæ considerantur, construunturque ea, quæ sensu lato geometrice construi possunt, atque applicata Arithmetica computantur.

§. 12.

Denique coniunctio operationum, cuius superius mentio facta est, sequitur coronam arboris constituens; omniaque spatii puncta, et quo-

Hosted by Google

rumvis complexus hoc pacto ad unum aliquod certum spatii punctum fixum revocantur.

Ex. gr.

1. Moveatur recta A circa punctum suum aliquod $\mathfrak{a}$ in plano P semper porro, ita ut punctum $\mathfrak{b}$ ipsius A percurrat peripheriam radii $\mathfrak{ab}$ toties quoties libuerit; dicaturque nomine generali u longitudo viæ puncti $\mathfrak{b}$: interea autem moveatur punctum aliquod $\mathfrak{c}$ e certo puncto ipsius A in ipsa eadem recta mota A certa lege, ut nempe y dicta via puncti $\mathfrak{c}$ in A, sit $y = f(u)$; quæritur dato $f(u)$ via ipsius $\mathfrak{c}$ in plano?

2. Ita si recta $\mathfrak{pa}$ moveatur in recta eadem continuata, circulum centri $\mathfrak{p}$ radii $\mathfrak{pa}$ secum ferendo in eodem plano, ita ut interea punctum certum peripheriæ in ipsa peripheria certa lege moveatur, ut sit nimirum via eius $= F(x)$ pro x denotante viam puncti $\mathfrak{p}$ in recta dicta. Ex. gr. si $F(x) = x$, describi cyclois (ut Tom. I. pag. 356) poterit, si punctum motum $\mathfrak{b}$ fuerit.

3. Ita potest $\mathfrak{p}$, centrum circuli C, in peripheria circuli alicuius moveri, circulum C circa centrum interea certa lege motum in eodem plano secum ferendo; et via puncti certi peripheriæ ipsius C quæri. Imo etiam circulus, in cuius peripheria $\mathfrak{p}$ est, interea lege certa moveri potest.

4. Aut si planum P circa rectam certam A in P cadentem moveatur semper porro: viæ, quam certum aliquod punctum $\mathfrak{p}$ ipsius P describit, longitudine generaliter u dicta; et moveatur interea certa lege punctum $\mathfrak{b}$ ipsius A in A, perpendicularem B ad A in P secum ferens, distantia ipsius $\mathfrak{b}$ a certo puncto determinato $\mathfrak{a}$ in A (eodem pro omnibus $\mathfrak{b}$) generaliter x dicta; atque moveatur interea punctum $\mathfrak{c}$ ipsius B certa lege in B, recta $\mathfrak{cb}$ (quocunque perveniat $\mathfrak{c}$) generaliter y dicta; nempe ut sit

$$x = a(u) \quad \text{et} \quad y = b(x);$$

quæritur via puncti $\mathfrak{c}$ in spatio?

Manifesto per u, x, y quodvis spatii punctum p determinari potest: demissa enim ex p ad A perpendiculari, hæc erit y aut in $\mathfrak{a}$ aut in plagam

Hosted by Google

inde aliquam cadens, et verso circa A plano P donec ad p perveniat, eousque $\mathfrak{p}$ certam viam u describere potest.

5. Ita si certum punctum $\mathfrak{a}$ rectæ A in P immobile cadentis fixum sit; atque e certo puncto $\mathfrak{b}$ ipsius A sit B perpendicularis ad A in eodem plano P, et e certo puncto $\mathfrak{c}$ ipsius B sit C perpendicularis ad planum P; atque dum punctum $\mathfrak{b}$ movetur porro in A, perpendicularem B ad A in plano P secum ferens, interea moveatur certa lege punctum $\mathfrak{c}$ in B, rectam C ad planum P semper perpendicularem secum ferens; atque interea in hac ipsa C quoque moveatur punctum $\mathfrak{d}$ lege certa: quæritur pro datis huius compositionis motus (non virium) legibus, via puncti $\mathfrak{d}$ in spatio? Si ex. gr. $\mathfrak{ab}$ generaliter x, $\mathfrak{bc}$ generaliter y, et $\mathfrak{cd}$ generaliter z dicantur, atque x, y, z semper ut coordinatas simultaneas intelligendo y sit $=\alpha(x)$, et $z=\beta(y)$; manifesto quodvis spatii punctum p per x, y, z determinatur; nempe ex p ad P missa perpendicularis z dici potest, et e puncto illo ipsius P, in quod perpendicularis dicta cadit, ad A missa perpendicularis y, et recta inde usque ad $\mathfrak{a}$ dici x potest. Possuntque præterea tam x quam y et z et positive et negative accipi; nempe x ab $\mathfrak{a}$ incipiendo in una plaga rectæ A positive, in altera negative, ita ordinatæ y ex A incipiendo in una plani P plaga positive et negative in altera, atque ordinatæ z ad planum P perpendiculares e P incipiendo in una spatii plaga positive et negative in altera accipi possunt. Nimirum ex tomo I. pag. 28 determinationes, quibus rectæ in recta aliqua (pro certo puncto eius fixo, atque certa conditione C accipiendi resultati) positivæ a negativis distinguuntur, patent: ita perpendiculares ad rectam A fiunt positivæ aliæ, aliæ negativæ, si pro extremo ibidem dicto rectæ cuiusvis ad A perpendicularis, accipiatur parallela per id ad A in P ducta, atque in hanc ponatur initium priorem excipientis; et pro resultato accipiatur distantia ab A extremi rectæ ad A perpendicularis postremo positæ. Ita perpendiculares ad P aliæ positivæ aliæ negativæ fiunt, si per cuiusvis extremum ad P superficies parallela (pag. 19) ducatur, in qua recta priorem excipiens incipiat, et pro resultato distantia a P extremi rectæ ad P perpendicularis postremo positæ accipiatur.

Hosted by Google

6. Potest etiam punctum $\mathfrak{b}$ in recta A motum planum aliquod Q ad A perpendiculare secum ferre, ita ut interea in Q motus sequens concipiatur; sit s sectio plani Q cum certo plano fixo P, in quod recta A cadit, et moveantur certa puncta in certis perpendicularibus ad s in Q cadentibus, prouti omnia per x, nempe distantiam a puncto fixo $\mathfrak{a}$ ipsius A puncti $\mathfrak{b}$ in recta A moti, lege certa determinantur: atque data hac lege, complexus locorum, in quibus puncta in perpendicularibus dictis mota ab initio motus sub punctis temporis expertibus omnibus sunt, qualisnam sit, quæri potest. Patet hoc pacto non lineam tantum, sed superficiem quoque prodire, quum hæc complexus sectionum plani moti Q cum ea esse queat.

Imo possunt motus plures quoque vario modo componi, atque campus disquisitionum protendi.

§. 13.

Notandum autem est, formas omnes, qualesvis prodierint lineæ aut superficies, dum arithmetice considerantur, in quantitates respectivas et quidem ad formam temporis reductas (Tom. I. pag 27) mutandas esse modo sequente.

Pro quavis linea simplici L, cuius nulla pars recta est, intelligatur recta r; si quavis linea simplici e rectis composita, cuius extrema in extrema ipsius L, et puncta quævis ad quæ angulum habet, in L cadunt, l dicta: quævis l sit $<r$, sed pro quovis ω detur tale l, ut $r-l<\omega$ sit.

Ita pro quavis superficie simplici S, cuius nulla pars planum est, intelligatur illud rectangulum (Tom. I. pag. 288), quod limes talis superficiei simplicis e planis rectilineis, ex. gr. triangulis, compositæ est, apicem cuiusvis anguli in S habentis: ut superficiei eiusmodi ut dictum est, limes alius eo maior non detur.

Hoc pacto omnes lineæ ad formam rectæ, ita omnes superficies ad formam rectanguli altitudinis eiusdem reductæ (Tom. I. pag. 27) comparari arithmetice poterunt.

Hosted by Google

§. 14.

Recta cum omnibus eius proprietatibus primariis simul cum plano axiomatice supponi solent; at quæritur, num ea pro axiomatibus adsumi possint? Conceptus temporis quidem ad spatium translatus rectam peperisse videri potest; attamen tropicam istam rei tam diversæ translationem, externam adiuvisse experientiam indigitant tam definitiones, qualis Platonis est a lumine petita, *rectam* dicentis lineam cuius punctum primum reliqua obumbrat, quam quæ a puncto e certo loco alium petente est, observato tempore fatigioque minimo: nihil tamen magis ad rectam perduxit, quam reflexio ad omne id, quod e corpore quiescentibus duobus punctis eiusdem moto quiescit. Si quid pro axiomate adsumi nequeat, illud e quo deduci potest, id implicite continere debet. Adsumere itaque ea, ut fieri solet, aut sequente modo deducere, ius fasque cuique est. Spatii quaquaversum infiniti filia primogenita est *punctum*, dein *sphaera*, media quasi inter duo extrema. Sphæræ autem linea primogenita *circulus* est, dein recta; atque demum *circulus* cum *recta* parit *planum*.

1. Pro fundamento lineæ uniformis simplicis in se redeuntis, quam circulum esse patebit, positum est (pag. 7); pro rectæ construendæ fundamento ponitur sequens. Si M portio spatii circa duo sui puncta revolvatur (pag. 7): idem M circa eadem duo puncta undevis æqualiter moveri, atque uno solo quoad viam cuiusvis sui puncti modo revolvi potest.

2. Hinc quiescentibus punctis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, omnia talia puncta ipsius M, quorum quodvis circa $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ moveri (iuxta pag. 7) potest, movebuntur etiam simul circa $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$, si quod eorum moveatur: et quidem omnia viis iisdem movebuntur porro usque ad reditum, quas singula percurrerent.

Atque hinc etiam nullum punctum ipsius M ex ullo loco $\mathfrak{p}$ duabus viis, una qua ex $\mathfrak{p}$ moveri incipit, altera qua redit, plures habet, quibus motum circa $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ incipere potest. Nam sint ex eodem puncto tres rami α, β, γ, in quorum quovis punctum ex $\mathfrak{p}$ moveri quiescente $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ possit, moveaturque in uno casu punctum ex $\mathfrak{p}$ in ramo α incipiendo et per β

Hosted by Google

redeundo: ramus γ tum haud potuit percurri, nam incipiendo per α aut redeundo per β, punctum idem simul lineam qua ramus γ ex $\mathfrak{p}$ incipit describere nequit; nec antea percurri γ potuit, nam tum punctum porro motum iam antea rediisset. Cogitetur iam schema totum ita poni, ut punctum quod antea in $\mathfrak{p}$ erat, extra lineam simplicem redeuntem priorem in γ cadat, simul $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{b}$ cadentibus: manifesto motus idem circa $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ locum haberet (per 1), sed idem punctum annulum a priore diversum describeret (contra 1).

3. Sit iam (Fig. 7.) sphæra S centro $\mathfrak{C}$ cum puncto $\mathfrak{c}$, dicaturque superficies eius S', et fiat sphæra s e centro $\mathfrak{c}$ cum puncto $\mathfrak{C}$, huius superficie s' dicta: facile patet, nec totam sphæram s in S, nec totam S in s cadere; nam si ex. gr. tota S in s caderet, centrum $\mathfrak{C}$ in superficie s' nudum haud inclusum maneret. Habet igitur tam s' aliquid extra S, quam S' aliquid extra s. Hinc autem necessario ipsis S' et s' aliquid commune est; nam punctum e quovis puncto eius quod ex s extra S cadit, usque in $\mathfrak{C}$ veniens per S' transire debet (pag. 6). Ita si punctum e quovis puncto ipsius S' extra s cadente in ipso S' usque in $\mathfrak{c}$ veniat, nisi $\mathfrak{c}$ circumcirca in S' ininterrupte cingatur, punctum dictum e loco extra sphæram s ad centrum eius absque transitu per s' venire posset.

Exit igitur s' ex S' circumcirca $\mathfrak{c}$, idque manifesto generatione circumcirca æquali: adeo ut (pag. 7) quodvis exitus punctum $\mathfrak{p}$, sphæra S circa $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$ mota, viam simplicem in se redeuntem uniformem describere possit.

Idem de quavis sphæra centri eiusdem $\mathfrak{c}$ tali, quæ priori interior est, patet; etsi cogitentur sphæræ omnes interiores usque ad centrum commune $\mathfrak{c}$, et annuli in S' se invicem semper interius usque ad $\mathfrak{c}$ eundo excipiant. Dicantur eiusmodi lineæ uniformes simplices in se redeuntes, quos circulos esse nondum constat, *annuli*, et nomen eorum generale sit A.

Imo idem de quavis sphæra centri eiusdem $\mathfrak{c}$ cum puncto quovis $\mathfrak{i}$ intra superficiem S' cadente facta patet. Nam tum superficies S' tota in sphæram novam cadere nequit; namque $\mathfrak{i}$ intra S' cadens in superficie sphæræ novæ esse non posset. Unde reliqua fluunt.

Hosted by Google

4. Atque hinc manifesto punctum e cuiusvis A puncto quovis $\mathfrak{d}$ intra annulum eundem A usque in $\mathfrak{c}$ in superficie S' ita moveri cogitari potest, ut semper in superficiem sphæricam centri $\mathfrak{c}$ interiorem veniat, et in nulla uno plura puncta habeat, atque mota sphæra circa $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$, annulis descriptis linea dicta l circa $\mathfrak{c}$ in S' porro moveatur, donec redeat. Nempe punctum dictum in quovis loco ubi sphæra centri $\mathfrak{c}$, sive ipsa s sive interior, ex S' exit, annulo circa $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$ gaudet per præcedentia; adeoque omnia quoque simul moveri quiescente $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$ possunt.

5. Atque hinc, propter generationem superficiei sphæricæ circumcirca æqualem, e quovis puncto $\mathfrak{k}$ ipsius S' datur linea l' priori l æqualis; atque l' circa $\mathfrak{k}$ in S' moveri potest donec redeat, annulos concentricos prioribus æquales describendo.

Imo quum de sphæris S et s demonstrata de quavis alia quoque valeant: pro cuiusvis sphæræ superficie datur linea, quæ circa quodvis punctum superficiei dictæ in ea moveri potest, donec redeat, annulos concentricos undevis æqualiter describendo.

6. Dari dimidia annuli eiusmodi ut dictum est, lineæ simplicis in se redeuntis, duo puncta communia habentia, uti cuiusvis partis continuæ eius duo dimidia punctum commune habentia dari patet sic. Concipiantur ex annuli puncto quovis duo puncta moveri in eo porro usque ad reditum, temporibus quibusvis æqualibus vias æquales describendo, easque ex eodem puncto diversas sed simul incipiendo: utrumque per alterum transire debet; atque ubi hoc fit, viæ utriusque æquales erunt; ita ex arcus cuiusvis extremitatibus æqualiter motis punctis, priusquam quodvis in alteram extremitatem perveniat, occurret puncto alteri, et ibi dimidium arcus erit (Tom. I. pag. 12. V. et Tom. II. pag. 6).

7. Accipiatur iam ex 4. (Fig. 7.) punctum quodvis $\mathfrak{k}$ in primo annulo A (Fig. 8.) punctum $\mathfrak{c}$ cingente pro centro; et linea prior $l = \mathfrak{k}\mathfrak{c}$, cuius una extremitas in $\mathfrak{c}$ altera in $\mathfrak{k}$ sit, moveatur circa $\mathfrak{k}$ in S' donec redeat: manifesto pars viæ cuiusvis puncti ipsius l cadet ab annulo in unam ipsius S' plagam, altera in alteram; nam ut centrum $\mathfrak{k}$ claudatur ab annulo per punctum quodvis $\mathfrak{o}$ descripto, necesse est punctum eius aliquod $\mathfrak{p}$ extra segmentum ipsius S' illud, in quo $\mathfrak{c}$ est, cadere; atque hinc via

Hosted by Google

usque in o per A transire debet, et quidem in duobus saltem punctis a f̊ ad extremitates arcuum utrinque æqualium; nam annulus dictus cum annulo A unum solum punctum commune habere nequit; nam tum ex hoc puncto usque ad f̊ aut linea simplex esset, aut non; et in neutro casu esset annulus dictus linea simplex rediens. Erunt igitur annuli huius transitus per annulum A ipsi f̊ proximi duo supra dicti.

Accipiantur porro quorumvis arcuum ab A in plagam non c (id est illam in quam non cadit c), meditullia (per 6); atque tum fiat idem centro in meditullium arcus illius posito, qui ab annulo (centro f̊ per extremitatem lineæ f̊c in S' descripto) e duobus punctis ipsius A ipsi f̊ proximis in plagam non c ipsius S' cadit; atque idem continuetur in infinitum; nempe casus idem redit semper, nisi quod centrum in primo A ubivis eligere liceat, postea vero in quovis novissimo A arcus extimi meditullium pro centro accipiatur, et idem repetatur in infinitum.

Complexus omnium eiusmodi meditulliorum continuum, imo linea simplex est, ut statim patebit. Insistit autem linea hæc primo annulo utrinque æqualiter; atque e quovis puncto annuli eiusdem, lineæ eiusmodi per generationes æquales circumcirca et utrinque æqualiter determinatæ promanant. Unde etiam patet, quod si e quibusvis duobus punctis annuli primi promanantes eiusmodi lineæ secent se invicem, crura semet secantia, ob generationes utrinque æquales, æqualia erunt. Patet etiam partem quovis novo A generatam parti sequente A generatæ, item ob generationes æquales, æqualem esse.

Complexum punctorum dictum continuum esse vel ita patet. Accipiatur complexus α punctorum innumerabilium, quæ per quodvis aliquod A, centro in eo posito, generantur usque ad arcum aliquem k inclusive, et inde complexus β punctorum item innumerabilium usque ad arcum extimum generatorum: puncta ipsius β in arcus post k se invicem continuo excipientes cadunt, qui simul sine k cogitari nequeunt, uti complexus priorum ipsum α constituentium; itaque et β gaudet puncto in arcu k, quod quum solum sit, tam ipsi α quam ipsi β commune est.

Sed præterea quoque e cuiusvis A arcus superioris meditullio pun-

Hosted by Google

ctum per omnes arcus concentricos superiores, id est supra præcedens A cadentes, usque in centrum moveri potest; et quidem ita ut per cuiusvis arcuum illorum punctum quodvis datum transeat: intuitu patet, idem simplicissime per meditullia arcuum fieri posse.

Est etiam linea simplex: nam e nullius arcus meditullio tertius ramus dari potest; quia is per arcus præcedentes aut sequentes ire deberet, in quorum quovis nonnisi unum punctum ramis duobus commune datur.

8. Dicantur L lineæ eiusmodi, quæ ex omnibus punctis annuli primi utrinque æqualiter insistentes, et semper porro utrinque æqualiter, atque omnes circumcirca quoque per generationes æquales æqualiter determinatæ sunt.

Aut dantur duæ tales L, quæ punctum commune habeant, aut nullæ duæ dantur, quæ punctum commune habeant. Posterius fieri nequit: nam tum portio illa ipsius S', quæ supra quodvis A usque ad arcum superiorem novi A est, imo totum A, innumerabilibus vicibus repeteretur in ipso S'; adeoque S' non esset quantitas finita (Tom. I. pag. 35), de quo plura inferius.

Nempe tum (per pag. 26) sphæra S' circa $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$ mota, movetur tota L, omnibus punctis annulos se invicem excipientes describentibus. Quod annulus puncti cuiusvis in linea L ulterius generati ulterius situs sit, patet inde, quod si ab aliquo annulo sequentes aliquamdiu regrederentur, id aut statim post annulum centri alicuius A iuxta generationem dictam fieret, aut post meditullium arcus alicuius supra A generati; prius fieri nequit, nam tum punctum aliquod ipsius L ob generationes utrinque æquales intra, non extra præcedens A caderet; nec posterius fieri quit, tunc enim e centro prius dicto sphærica superficies exterior cum aliqua interiore aliquid commune haberet.

Atque per hoc adhuc simplicius patet superficiem sphæricam, si nullæ lineæ L secarent se invicem, quantitatem finitam non esse. Potest enim e centro cuiusvis A in S' describi talis annulus interior ipso A, qui (iuxta Fig. 9.) nec cum ibidem præcedente nec cum sequente quidquam commune habeat. Quod cum per generationes æquales semper porro locum habeat: annulus dictus innumerabilibus vicibus repetetur.

Hosted by Google

Si igitur superficies sphærica quantitas finita sit: necesse est duas lineas L se invicem secantes dari. At si duæ dentur, omnes se invicem in eodem puncto secabunt. Nam sit (Fig. 10.) $\mathfrak{ab}$ arcus is primi annuli, e cuius extremitatibus promanantes lineæ L concurrunt; linea L e meditullio $\mathfrak{q}$ arcus $\mathfrak{ab}$ erecta quoque per $\mathfrak{p}$ transibit: nam sit $\mathfrak{bq} = \mathfrak{br}$, adeoque $\mathfrak{ab} = \mathfrak{qr}$, et $\mathfrak{br} = \mathfrak{rt}$, adeoque $\mathfrak{bt} = \mathfrak{ba}$, (posito $\mathfrak{ab}$ esse dimidio primi annuli minus, quum si $\mathfrak{ab}$ dimidium annuli sit, res pariter facile pateat); lineæ L ex $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{q}$, ita ex $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{t}$ erectæ concurrent, eruntque singulæ æquales propter generationes æquales. Hinc autem linea L ex $\mathfrak{t}$ erecta necessario in $\mathfrak{p}$ cadit; atque ut lineæ L ex $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{q}$ erectæ occurrere possint, aut prior vel posterior transibit per $\mathfrak{bp}$, aut prior per $\mathfrak{pt}$, vel L ex $\mathfrak{q}$ erecta per $\mathfrak{ap}$ transibit: quodvis horum fiet, si punctum transitus $\mathfrak{p}$ sit; sed inter $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{t}$, aut inter $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{a}$ transitus fieri nequit; nam si ex. gr. L ex $\mathfrak{r}$ erecta inter $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{t}$ transiret, idem transitus punctum etiam ipsi $\mathfrak{bp}$ commune esset; si vero L ex $\mathfrak{r}$ per $\mathfrak{bp}$ inter $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{p}$ transiret, punctum idem et lineæ ex $\mathfrak{q}$ erectæ commune esset: et lineæ L ex $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{q}$ erectæ usque ad punctum concursus essent ipsa $\mathfrak{bp}$ minores. Necessario igitur in eodem $\mathfrak{p}$ concurrent.

Atque hinc colligitur, bisecando arcus in infinitum, atque circumcirca transferendo: ex omnibus annuli primi punctis omni dabili propioribus erectas lineas L omnes in eodem $\mathfrak{p}$ concurrere.

Unde si sphæra S moveatur circa $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$, puncto in annulo primo porro moto, simul cum toto linearum L e punctis bisectionum erectarum schemate: nullum tempus erit, quo punctum $\mathfrak{p}$ viam describat; nam ab initio motus quodvis temporis punctum cogitetur, iam antea punctum in annulo motum per innumera puncta transiit, pro quibus schema linearum L dictum in $\mathfrak{p}$ fuit.

Consequenter sphæra S circa $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$ ita moveri potest, ut $\mathfrak{p}$ quiescat. Atque hinc (per pag. 26), si S circa $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$ moveatur, $\mathfrak{p}$ quiescere debet.

Omnia dicta autem ad quemvis annulum superficiei cuiusvis applicari manifestum est, si puncto quovis eius pro centro accepto, cum linea quadam interna annuli fiant annuli concentrici tales, quales e quovis sphæræ illius superficiei puncto æqualiter dari dictum est.

Hosted by Google

9. Atque hinc superius (pag. 27) segmentis omnium s' in S cadentibus generaliter s'' dictis, cogitetur in omni s'' punctum illud, in quo lineæ L, ex annulo ipsi S' et illi s' communi, in illo s'' generatæ concurrunt: complexus omnium eiusmodi punctorum simul cum $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{C}$ lineam simplicem esse ut supra (pag 29) patet. Sed manifesto etiam sphæra S circa $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$ mota, cuiusvis s'' punctum quodvis præter punctum dictum in ea (pag. 7) movebitur; atque hinc omnia s'' (pag. 26) movebuntur, et tota linea dicta quiescet mota sphæra S circa $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$.

10. At vero in S quoque ex annulo egressus extimo antea generatum $\mathfrak{p}$ quiescebat mota S circa $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$; atque si pro centro $\mathfrak{p}$ eadem fiant, quæ ab altera parte centro $\mathfrak{c}$ facta sunt, prodibit linea $\mathfrak{c}\mathfrak{C}\mathfrak{p}$ quiescens mota sphæra circa $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$.

Imo quævis alia duo puncta lineæ dictæ accipiantur, motus dictus sphæræ S quiescentibus iis peragebatur: itaque (pag. 26) circa quævis duo puncta dicta motus idem est.

Sed nec ullum punctum sphæræ S extra lineam dictam cadens quiescit: nam illud aut intra segmenta extima ex $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{p}$ generata, aut inter illa cadit; atque tale circumcirca æqualiter determinatum gaudet annulo (per pag. 7). Si vero in aliquo motu circa duo puncta annulo gaudeat, circa eadem duo puncta (per pag. 26) semper eundem annulum describet.

11. Patet porro inter quævis duo spatii puncta dari lineam eiusmodi: nempe accipiatur unum pro centro, fiatque sphæra cum puncto altero; atque applicentur de sphæris S et s dicta. Atque hinc etiam patet rectam e quavis portione spatii finita egredi e quovis puncto eius, quum possit generari sphæra ex eo puncto, totam portionem includens.

12. At quæritur, num e centris sphærarum quarumvis inæqualium generatæ, centris coincidentibus, congruere possint usque ad superficiem sphæræ minoris? Omnino; nam (Fig. 11.) feratur minor in alteram centro in centrum $\mathfrak{C}$ maioris posito; sitque linea $\mathfrak{K}\mathfrak{C}\mathfrak{K}'$ in sphæra maiori hac circa $\mathfrak{K} * \mathfrak{K}'$ mota quiescens; transeat hæc per superficiem minoris in $\mathfrak{c} * \mathfrak{c}'$. Mota sphæra maiore circa $\mathfrak{K} * \mathfrak{C}$, omne præter lineam $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'$ movebitur, perageturque motus quiescentibus $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{C}$; itaque tum et sphæra

Hosted by Google

interior circa $c * \mathfrak{C}$ movebitur; adeoque (per pag. 26) idem inter c et $\mathfrak{C}$ quiescet quod antea.

13. Hinc etiam linea talis continuari e quavis sphæra in aliam quamvis maiorem utrinque potest; neque intra ullius sphæræ superficiem detinetur.

14. Si porro cuiusvis lineæ eiusmodi unius extrema $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et alterius $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ sint, atque $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{b}'$ simul cadere queant; congruentibus extremis et lineæ ipsæ coincidunt.

Nam feratur ad $\mathfrak{C}$ linea $\mathfrak{ab}$ simul cum sphæra illa, in qua generata est, sive in centrum eius cadat $\mathfrak{a}$ aut $\mathfrak{b}$ sive non, atque ponatur $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{C}$; fiatque sphæra centro $\mathfrak{C}$ sphæram allatam includens, et eodem centro $\mathfrak{a}$ fiat sphæra puncti $\mathfrak{b}$. Manifesto linea eiusmodi ut dictum est, quæ dicatur λ, in sphæra reliquas duas includente e centro $\mathfrak{C}$ generata, per superficiem sphæræ puncti $\mathfrak{b}$ e centro eodem $\mathfrak{C}$ generatæ transit in aliquo puncto $\mathfrak{k}$; moveatur λ circa $\mathfrak{C}$ simul cum sphæra maiore, donec $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{b}$ cadat; atque tum moveatur sphæra eadem maior quiescentibus punctis $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$; movebitur etiam sphæra allata inclusa, quiescentibus iisdem $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$; adeoque inter $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}$ linea eadem quiescet, quæ motu solius sphæræ allatæ quiescentibus iisdem punctis quiesceret. Itaque linea allata $\mathfrak{ab}$ coincidit cum linea sphæræ maioris inter $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ quiescente. Pariter adferri linea $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ simul cum sphæra illa, in qua generata est, potest $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{C}$ posito: atque manifesto et $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ eidem congruet, cui $\mathfrak{ab}$ congruebat.

15. Hinc etiam patet lineam eiusmodi redire non posse: nam tum puncto uno, unde duo puncta diversis viis profecta porro moverentur, et altero, ubi prima vice sibi mutuo occurrerent, communibus, uterque ramus inter eadem duo puncta coincideret.

16. Sed linearum priorum (in 14) continuationes quoque, nempe continuatio e centro sphæræ allatæ et continuatio e centro $\mathfrak{C}$, coincidunt. Nam si prioris punctum $\mathfrak{p}$ extra lineam ex $\mathfrak{C}$ prodeuntem utrinque in infinitum continuatam caderet, sphæra puncti $\mathfrak{p}$ e centro $\mathfrak{C}$ habeat punctum $\mathfrak{p}'$ cum linea posteriore commune: fiatque sphæra tam sphæram hanc quam allatam includens; mota hac quiescentibus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{p}'$ quiescet, $\mathfrak{p}$ autem movebitur; quod fieri non posset, si $\mathfrak{p}$ in continuationem primam caderet; tunc enim quiescentibus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{p}$ quiesceret.

Hosted by Google

17. Denique *linea dicta* (per pag. 8) *recta est.* Nam (Fig. 12., 13.) quævis duo puncta q et r fuerint illius (utrinque continuatæ in infinitum), omnia spatii puncta eorundem unica complectetur. Etenim quodvis punctum lineæ dictæ ipsius q∗r unicum est, nec ullum aliud spatii punctum eiusdem q∗r unicum est.

Namque sit quodvis punctum p lineæ dictæ: nullum punctum t a p diversum tale datur, ut

$$q * r * p \doteqdot q * r * t.$$

Esset enim t aut in linea ipsa aut extra eam: neutrum fieri potest. Nam si t in lineam cadat, aut in aliquod ipsorum q et r caderet, aut inter ea, aut extra ea: atque etiam p pariter cadere potest.

Si p in r (aut q) cadat, patet nullum t a p (aut q) diversum dari: itaque tantum casus alii considerantur. Sit prius p inter q et r; tum t aut etiam inter q et r in t′ aut t″, aut extus cadet, ex. gr. in t‴. Si in t′ caderet, tum ut

$$q * r * p \doteqdot q * r * t'$$

sit,

$$qt' \doteqdot qp$$

esset (pars toti); pariter si t in t″ caderet, tum

$$qt'' \doteqdot qp$$

esset. Si vero t in t‴ caderet, tum

$$qt''' \doteqdot qp$$

esset (pariter pars toti). Nempe per dicta e quovis puncto linea talis æqualiter incipiens æqualiter quoque continuatur.

Si vero p extra qr, ex. gr. in p′, cadat (Fig. 13.): tum t aut in t′ aut in t″ aut in t‴ aut in t⁗ cadere deberet, quum manifesto in ipsorum p′, q, r nullum cadere queat. In t′ cadere nequit, quia tum

$$qp' \doteqdot qt'$$

esset; neque in t″, quia tum

Hosted by Google

esset; nec in $\mathfrak{k}'''$ cadit, quia
$$\mathfrak{q}\mathfrak{p}' \doteqdot \mathfrak{q}\mathfrak{k}''$$
$$\mathfrak{r}\mathfrak{k}''' \doteqdot \mathfrak{r}\mathfrak{p}'$$
(pars æqualis toti) esset; neque in $\mathfrak{k}''''$ cadit, quia tum esset
$$\mathfrak{r}\mathfrak{k}'''' \doteqdot \mathfrak{r}\mathfrak{p}' = \mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{q}\mathfrak{p}',$$
et
$$\mathfrak{q}\mathfrak{p}' \doteqdot \mathfrak{q}\mathfrak{k}'''' = \mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{r}\mathfrak{k}'''',$$
et hunc valorem substituendo ipsi $\mathfrak{q}\mathfrak{p}'$ in æquatione priore, esset
$$\mathfrak{r}\mathfrak{k}'''' = \mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{r}\mathfrak{k}''''.$$

Sed neque extra lineam dictam datur tale $\mathfrak{k}$, ut
$$\mathfrak{q} * \mathfrak{r} * \mathfrak{p} \doteqdot \mathfrak{q} * \mathfrak{r} * \mathfrak{k}.$$
Nam fiat e centro sphæræ, in qua linea dicta generari cœpit, sphæra punctum $\mathfrak{k}$ includens; quiescentibus $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ mota sphæra hac, movebitur $\mathfrak{k}$ (pag. 32); si vero $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{r}$ cadentibus $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{k}$ cadet, $\mathfrak{p}$ cum $\mathfrak{k}$ circa $\mathfrak{r} * \mathfrak{q}$ moveri poterit, quod antea quievit (contra pag. 26).

Sed nec ullum spatii punctum $\mathfrak{k}$ extra lineam dictam cadens ipsius $\mathfrak{q} * \mathfrak{r}$ unicum est; quum sphæra plane dicta circa $\mathfrak{q} * \mathfrak{r}$ mota, et illud moveatur, adeoque in alia æque posita puncta veniat.

Est igitur linea dicta plane complexus omnis puncti, quod quorumvis duorum punctorum eius unicum est.

Si non recta e rectis aut aliis lineis constet, facile patet non quorumvis duorum punctorum adesse quodvis punctum unicum.

18. *Recta* etiam *quantitas est.* Nam quævis partes continuæ eius accipiantur; et ponatur una extremitas unius in unam alterius; fiantque sphæræ centro in eam posito cum extremitatibus alteris: prodibunt duæ partes in sphæræ interioris, nisi utraque eadem sit, superficie terminatæ, quarum extrema, adeoque et ipsæ, congruere possunt.

19. *Recta potest in se porro moveri.* Nam e quovis puncto $\mathfrak{p}$, per dicta, æqualiter continuatur in infinitum.

20. *Planum* quoque hinc facile construitur modo sequente. Patet generatione circumcirca æquali, per quodvis punctum circa duo puncta

Hosted by Google

usque ad reditum porro motum, describi lineam simplicem in se redeuntem talem, quæ et ipsa, ut recta et superficies sphærica erat, quantitas est, atque etiam e quovis puncto sive antrorsum sive retrorsum æqualiter determinatur.

Accipiatur quævis talium annulorum (Fig. 14.); sitque (per pag. 28) in punctis a, b bifariam divisus, et dimidietas adb sit in d bifariam divisa; atque sit rectæ ab meditullium in c: erit, ob generationes utrinque æquales, forma e rectis cd et ca composita formæ e rectis cd et cb compositæ æqualis, adeoque recta dc est perpendicularis ad ab in c (pag. 15); et quodvis rectæ cd punctum extra rectam ab utrinque infinitam cadit. Fiat sphæra e centro c totum schema includens, et moveatur circa a * b sive rectam ab utrinque infinitam: quodvis punctum rectæ cd describet annulum, qui propter generationes utrinque æquales utraque facie sibi congruere potest, (quod de antea dictis nondum constat). Cogitetur iam recta cd in quovis loco suæ viæ continuata per d in infinitum; erit complexus omnium earum superficies circumcirca infinita et circumcirca et utrinque æqualiter generata, ut circa c in se moveri, facieque utraque sibi congruere queat, atque spatium in duas plagas æquales dividat.

Est autem superficies ista *planum*. Nam quævis duo puncta A et B sint eius, quodvis punctum C ipsius A * B unicum in rectam AB utrinque in infinitum continuatam cadit. Recta AB vero necessario in superficiem dictam cadit: cogitetur enim in generatione huius, recta cd versus d infinita, ex A versus B usque in B per annulum plane dictum mota; nisi per AB transeat, aut cadet ab una aut ab altera parte; neutrum vero fieri potest; nam si quod fieret, et alterum fieri deberet. Et idem de continuata AB patet: accipiatur nempe sphæra e centro c radii maioris quam recta quævis, quæ a c ad AB est; exibit ex hac sphæra utrinque tam recta AB quam cd versus d infinita; unde reliqua patent. Posset etiam brevius dici, quod si ex uno puncto superficiei ad aliud ducta recta in unam plagam caderet, in altera quoque esset, et inter duo puncta duæ rectæ fierent.

22. Unde etiam patet rectam AB etiam utrinque infinitam in planum cadere, si puncta A, B in eo sint.

Hosted by Google

23. Sed quæritur, num *per quaevis tria puncta* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, *etsi non in recta sint, planum detur?* Omnino: nam $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ (ex Fig. 15.) in planum dictum poni potest, $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{c}$ (Fig. 14.) posito, acceptaque ex $\mathfrak{c}$ versus $\mathfrak{b}$ recta rectæ $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ æquali. Si iam $\mathfrak{C}$ non in eo plano esset: fiat e centro $\mathfrak{c}$ cum puncto $\mathfrak{C}$ sphæra, sitque ex. gr. recta

$$\mathfrak{c}\mathfrak{C} = \mathfrak{c}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\mathfrak{a};$$

manifesto sphæra radii $\mathfrak{c}\mathfrak{C}$ e centro $\mathfrak{c}$, per planum in unum dimidium superius alterum inferius dividetur; atque mota sphæra circa $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, quodvis superficiei sphæricæ punctum præter $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, dimidium annulum superius et alterum inferius describet; atque ubi punctum $\mathfrak{C}$ transit, habetur petitum.

24. Imo etiam per eadem tria puncta $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ non in recta sita nullum aliud planum poni potest. Nam in præcedentibus $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}$ positis atque $\mathfrak{C}$ in planum ibidem generatum cadente, ponatur quodvis aliud planum (imo eiusdem plani pars alia) per $\mathfrak{A} * \mathfrak{B} * \mathfrak{C}$; nullum punctum $\mathfrak{p}$ (Fig. 15.) unius extra aliud cadere poterit. Nam rectæ $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, extremitatibus earum in utrumque cadentibus, et ipsæ in utrumque cadent totæ. Sit iam $\mathfrak{p}$ in uno eorum, cadet aut supra lineam compositam ex $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ et continuationibus rectæ $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ex $\mathfrak{A}$ ad lævam et ex $\mathfrak{B}$ ad dextram, aut infra eam. Si supra eam cadat, tum recta $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ transit per lineam compositam dictam; si per continuationem alterutram rectæ $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ iret, tum et transitus et $\mathfrak{q}$, adeoque et $\mathfrak{p}$, in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ infinitam caderet; si per $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ vel $\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ eat, fiat id in $\mathfrak{k}$; tum recta $\mathfrak{k}\mathfrak{q}$ utrique plano communis, et continuata punctum $\mathfrak{p}$ complectens in utramque incidet. Si vero infra cadat in $\mathfrak{p}'$ vel $\mathfrak{p}''$, recta e quovis horum usque ad $\mathfrak{p}$, iam utrique commune, transit per lineam compositam dictam ex una plaga in alteram; et item duo puncta, adeoque recta per ea, utrique plano communia erunt.

25. Manifesto etiam (in Fig. 14.) $\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ ex $\mathfrak{c}$ continuata in planum (pag. 36) primo generatum cadit; atque planum, ob generationes utrinque æquales, in duas plagas æquales dividit: atque quum quævis plani P recta in $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ simul cum plano P ita poni possit, ut P cum plano primo

Hosted by Google

generato coincidat: planum quodvis per quamvis rectam in ea sitam in duas plagas, inter se omnes prioribus æquales, dividi patet. Imo evidens est, quovis plani puncto in idem dictum c posito, et congruentibus planis, circulos quosvis radiorum æqualium æquales esse; atque etiam punctum in plano motum, ipsum planum in eodem plano secum ferre posse.

26. Ita formas duarum rectarum angulares congruere, si arcus e verticibus radiis æqualibus inter crura descripti æquales sint, circulo facto patet; necnon omnes rectorum angulorum formas æquales esse; ita ex uno puncto rectæ in plano unam solum perpendicularem dari; et summam angulorum in una plaga ad rectam circa punctum c positorum esse $= 2R$; atque conversim duas rectas, c commune habentes, in una recta esse, si summa angulorum in una plaga sit $= 2R$, per R rectum intelligendo.

27. Patet etiam planum quantitatem esse: nam quæcunque duæ portiones eius accipiantur, ponatur utriusque punctum aliquod internum in dictum c, ita ut portiones ipsæ in planum primo generatum incidant: circuli, recta illa qua e c usque ad perimetrum nulla minor est pro radio accepta, congruent; et (Tom. I. pag. 25) locum habet.

§. 15.

1. *Si recta cum recta aut plano aliquid commune habeat, id nonnisi punctum est*: nam si duo puncta communia sint, recta in alteram continuatam in infinitum, et pariter in planum incidit.

2. *Planum vero cum plano*, si utraque infinita concipiantur, *aut nihil commune, aut rectam infinitam communem habent: et tam recta quam planum, sive rectam sive planum secantia, transeunt in plagam alteram.* Nam (Fig. 16.) secet recta ab rectam bq; nisi transeat in plani per abq determinati plagam alteram, necessario aliquorsum in bf cadet; cum qp enim nullum punctum præter b commune habet, quia tum tota incideret. Itaque abf recta esset; atque tam β quam $\alpha+\beta+\gamma$ dimidia peripheria radii bf esset.

Hosted by Google

Hinc ab per planum etiam transit, si b cum eo (nec quidquam aliud) commune habeat: si enim in eadem plaga maneat, manifesto pro quovis puncto q plani in b secti casus præcedens erit.

Hinc etiam si duo plana P et p punctum b commune habeant: fiat e quovis puncto a ipsius p tali, quod ipsi P commune non est, recta ab; transibit ista per P per præcedentia; fiat tum semicirculus in plano p radio ba centro b; transibit is per P; atque recta per punctum hoc et punctum b tam in P quam in p incidet; nec ullum punctum præterea commune utrique est, nam tum utraque coinciderent. Patet simul planum p quoque transire in alteram plagam.

3. *Ad rectam e quovis eius puncto perpendicularem dari* patet (ex Fig. 14. pag. 36); uti etiam *e quovis plani puncto dari rectam ad planum perpendicularem*; quum quodvis planum, puncto quovis in c posito, primo ibidem generato congruere queat.

Sed quamvis e quovis puncto tam ad rectam quam ad planum dari perpendicularem, inferius demonstretur: duas ex eodem puncto perpendiculares ad eandem rectam, aut idem planum, diversas non dari facile patet; nam tum duæ illæ rectæ cum recta duo illa puncta in quæ perpendiculares caderent connectente, tale triangulum efficerent, cuius ad basim uterque angulus rectus esset. Hoc autem fieri nequit; quia si duæ rectæ in eodem plano ad eandem rectam in eadem plaga concurrerent, idem ob generationes utrinque æquales et in altera fieret; adeoque recta utraque propter duo puncta communia coincideret.

4. Interim *si recta ad* dc *et* fc *(Fig. 17.) duas plani rectas perpendicularis fuerit, erit ad omnes adeoque ad planum per* fcd *determinatum ipsum P perpendicularis.* Nam sit cp $\perp$ cf, et cq $\perp$ cd; moveatur fcp circa fc porro donec redeat, ita dcq circa dc; via ipsius cp erit (per pag. 36) planum K complectens omnes perpendiculares, quæ ex c ad fc fieri possunt; ita via ipsius cq erit planum Q complectens omnes perpendiculares ex c ad dc. Datur autem ex c perpendicularis ad planum P; atque ea tam ad fc quam ad dc est perpendicularis. Sed eiusmodi recta, quæ ad fc et dc simul perpendicularis sit, nonnisi una datur, nempe sectio planorum K et Q; adesse enim perpendicularis ex c ad fc in K,

Hosted by Google

et perpendicularis ex $\mathfrak{c}$ ad $\mathfrak{dc}$ in Q debet; adeoque illa quæ tam ad $\mathfrak{fc}$ quam ad $\mathfrak{dc}$ perpendicularis est, tam in K quam in Q adesse, id est utrique communis esse debet. Consequenter recta ad $\mathfrak{fc}$ et $\mathfrak{dc}$ simul perpendicularis, est ipsa ad P perpendicularis.

5. *Est etiam planum quodvis p, in quod perpendicularis ad P cadit, ad P perpendiculare.* Nempe angulus duorum planorum generatur modo sequente: sint (Fig. 18.) ad rectam $\mathfrak{ab}$ perpendiculares æquales $\mathfrak{dc}$, $\mathfrak{fe}$ in eodem plano P, atque $\mathfrak{ac}=\mathfrak{be}$; et moveatur plaga plani superior circa $\mathfrak{a}*\mathfrak{b}$ porro donec redeat; describent puncta $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ simultaneos arcus æquales circulorum radii æqualis, propter generationes omnino æquales. Ita si $\mathfrak{gh}\perp\mathfrak{gb}$, atque accipiatur $\mathfrak{pg}=\mathfrak{eq}$, erunt moto schemate circa $\mathfrak{p}*\mathfrak{q}$ viæ punctorum $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{f}$ simultaneæ æquales, ob generationes æquales: sed $\mathfrak{f}$ eodem modo movetur, sive $\mathfrak{a}*\mathfrak{b}$ sive $\mathfrak{p}*\mathfrak{q}$ quiescant, quum omnia simul quiescere debeant. Consequenter omnium perpendicularium æqualium extremitates arcus simultaneos æquales describent. Est autem (pag. 15) quantitas anguli planorum via eiusmodi; quæ si quadrans sit, erit (pag. 17) planum ad P perpendiculare. Patet hinc quantitatem anguli planorum esse quantitati anguli perpendicularium e quovis puncto sectionis eorum æqualem.

6. Oritur autem *anguli cuiusvis* tam duarum rectarum, quam duorum planorum, per transitum cuiusvis in alteram plagam *suus verticalis*: quos pro lineis rectis æquales esse vel ita patet. Sint anguli hi verticales u et v (Fig. 19.): si hi, moto β circa $\mathfrak{c}$ donec extremitas arcum δ describat, non sint æquales, erit unus ex. gr. $u>$ altero v, nempe $\gamma>\delta$ pro radiis α et β æqualibus. Fiat $z=\delta$; erit per generationes æquales, si α moveatur (in eodem plano intelligendo) circa $\mathfrak{c}$, donec arcum $z=\delta$ describat; erit z quoque $<$ arcu quem extremitas ipsius β interea descripsit. Est vero manifesto arcus hic $<\delta$, propter transitum rectæ per rectas β, ε in plagam alteram. Consequenter esset z, quod $=\delta$ est, minor arcu ipso δ minore. Pariter patet, si $v>u$ esset; et pariter de altero verticalium pari.

Atque rectis productis, quorum angulus respectu quantitatis angulo planorum æqualis est: manifesto etiam anguli planorum verticales æquales sunt.

Hosted by Google

7. Plani per centrum sphæræ positi sectionem cum superficie sphærica circulum radii radio sphæræ æqualis, *circulum maximum* dictum, esse (ex pag. 36) patet; quævis duo plana autem per centrum c posita se invicem in recta e centro eunte secare, cuius punctum p in superficiem sphæræ cadens circulis maximis e centro in utroque plano descriptis commune est; et patet rectam eandem, utriusque plani sectionem, continuatam alterum quoque eorundem circulorum punctum commune præbere.

8. Angulus vero circulorum maximorum sphæræ quantitas respectiva fit per arcum, quo quantitas anguli planorum, in quæ circuli illi cadunt, exprimitur. Si igitur (Fig. 20.) a puncto p supra tabulam sito in duobus circulis maximis quadrantes accipiantur, pa in uno et pb in altero: circuli maximi arcus ab exprimet angulum eorum; nam pc sectio plani pca cum plano pcb est, et propter quadrantes pa, pb anguli pca, pcb recti sunt.

9. Hinc etiam *arcus circuli maximi ad arcum* ab *perpendiculares in extremitate quadrantum concurrent, in* ita dicto *polo circuli* cuius ab arcus est. Nam pc est ad ac et bc simul perpendicularis; adeoque ad totum planum abc perpendicularis est; itaque (pag. 40) et plana acp, bcp sunt ad planum abc perpendicularia, adeoque angulus quadrantis utriusque cum arcu ab rectus est. Consequenter arcus ex a et b ad ab perpendiculares in p concurrunt. Patet autem schemate circa pc moto arcum quemvis per a describi posse, et perpendicularem circulum e quovis arcus ab puncto unum solum generari.

10. *Si* vero *plana P et Q se invicem ad angulum rectum secent in recta* ab: *e quovis puncto* p *ipsius P ad* ab *demissa perpendicularis est perpendicularis ad Q, atque e quovis puncto ipsius* ab *erecta ad Q perpendicularis in P cadet.* Nam sit $pb \perp ab$; ducatur in plano Q ad ab perpendicularis bk; erit angulus pbk rectus, quia $P \perp Q$; adeoque pb ad duas plani Q rectas nempe ab et bk perpendicularis, consequenter etiam ad Q perpendicularis est.

Quæcunque perpendicularis autem fuerit ex a ad planum Q, illa in planum P cadit; nam si extus caderet, ex eodem puncto a duæ essent,

Hosted by Google

quia per præcedentia perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ ad $\mathfrak{ab}$ in P cadens est ad Q perpendicularis.

11. Denique *si duo plana P et p secent se invicem, et utrumque perpendiculare sit ad planum Q, sectio priorum ad Q est perpendicularis.* Nam si $P \perp Q$ et simul $p \perp Q$, sit A sectio planorum P et Q, et a sectio planorum p et Q; secabunt A et a in Q cadentes se invicem; quia nisi secarent, nec plana ex A et a ad Q perpendicularia secare se invicem facile patet. Sit sectio rectarum A et a in $\mathfrak{a}$, perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ ad Q cadit per præcedentia tam in P quam in p, adeoque in sectionem solam planorum P et p, cui $\mathfrak{a}$ commune est.

12. Quoad angulum quem recta $\mathfrak{ac}$ facit cum plano P, in quo centro $\mathfrak{c}$ sit descriptus circulus radio $\mathfrak{bc}$, supposito (sed inferius demonstrando) hypotenusam esse catheto maiorem, et rectis crescentibus e quovis puncto eodem extra peripheriam ad eam ductis, angulum ad centrum crescere: facile patet, nisi $\mathfrak{ac} \perp P$ sit, esse angulum $\mathfrak{acb}$ minimum (pag. 16). Nempe sit $\mathfrak{b}$ punctum, in quod perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ ad P cadit; erit cathetus $\mathfrak{bc} <$ hypotenusa $\mathfrak{ac}$; tum radio $\mathfrak{bc}$ descripto in P circulo, erit quivis angulus $\mathfrak{dca} > \mathfrak{bca}$; nam concipiatur $\mathfrak{a}$ omnino supra planum $\mathfrak{dbc}$; erit in triangulo rectilineo $\mathfrak{abd}$ angulus ad $\mathfrak{b}$ rectus, quia $\mathfrak{ab} \perp P$; atque hinc hypotenusa $\mathfrak{ad} > \mathfrak{ab}$. Concipiantur iam duo triangula nempe $\mathfrak{abc}$ et $\mathfrak{adc}$, et ponatur $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}$, atque vertatur triangulum utrumque (Fig. 21.) in eandem a recta $\mathfrak{ca}$ plagam in P; patetque per supposita, esse angulum $\mathfrak{acb} < \mathfrak{acd}$.

§. 16.

Sed dicendum etiam (pag. 9) de planis et rectis se invicem, etiamsi in infinitum producta sint, non secantibus est. Si (Fig. 22.) rectæ $\mathfrak{ac}$ et $\mathfrak{bd}$ ad rectam $\mathfrak{ab}$, sive in eodem plano sive non, perpendiculares fuerint, nullum punctum commune habent (pag. 39); pariter si $\mathfrak{cabd}$ circa $\mathfrak{ab}$ usque ad reditum moveatur, plana per rectas $\mathfrak{ac}$ et $\mathfrak{bd}$, etsi infinitæ concipiantur, descripta nullum punctum commune habent; nam ibi aliqua recta $\mathfrak{ac}$ et aliqua $\mathfrak{bd}$ productæ secarent se invicem.

Hosted by Google

Patet etiam, quod si duo hæc plana per tertium secentur, rectæ illæ, in quibus hoc priora secat, in idem planum tertium cadant, nec se invicem secent; quia tum duo priora punctum illud, in quo hæ se invicem secarent, commune haberent.

I. At quæritur, num per punctum a solum planum prius detur, quod planum inferius nempe viam rectæ bd antea dictam haud secet? Atque hæc quæstio eo redit, num per a sola recta $\widetilde{ac}$ detur in eodem plano rectam $\widetilde{bd}$ non secans?

Aut solam rectam solumque planum in aliquo casu, aut innumera in omni casu dari patebit.

II. Moveatur $\widetilde{ab}$ (efficiens cum recta bd angulum v, qui sit ex. gr. $= R$, denotante R rectum) circa a (Fig. 22.) per quadrantem usque in ac; aliquamdiu secabit $\widetilde{ab}$ tam quadrantem quam rectam $\widetilde{bd}$ semper porro, in ac perveniendo autem non secat; dari igitur punctum aliquod ultimum p quadrantis debet (per Tom. I. pag. 20), per quod recta ex a ducta talis est, ut quævis alia interior secet rectam $\widetilde{bd}$; illa autem ipsam non secat, quia id in puncto aliquo rectæ $\widetilde{bd}$ esset, et recta $\widetilde{bd}$ e recta secante in plagam superiorem transiens, innumera puncta haberet, in quibus a recta circa a ulterius mota secari posset; adeoque recta $\widetilde{ap}$ non esset ultima earum, intra quas quævis secat rectam $\widetilde{bd}$. Itaque $\widetilde{ap}$ est primo non secans. Sed quæritur quantitas anguli u, nempe arcus bp?

Axiomatis Euclidei undecimi sensus est, quod si ad *quantaevis rectae* ab *extrema,* in eandem plagam, rectæ $\widetilde{ac}$ et $\widetilde{bd}$ ponantur, *quantavis fuerit summa angulorum internorum* u et v duobus rectis minor, et utvis *partita*: rectæ $\widetilde{ac}$ et $\widetilde{bd}$ se mutuo secant.

Tria igitur hoc continet, quorum quodvis solum ad reliqua duo demonstranda ex asse sufficeret; nempe

1. si pro uno solo ab non sit $u < R$, pro quantovis ab summa duorum internorum u et v pro quibusvis rectis se invicem primo non secantibus erit $= 2R$.

2. Si constaret summam internorum u et v dictorum omni dabili minorem fieri non posse, etsi recta, ad cuius extrema in eandem plagam positi sunt, quovis dabili maior fiat, tum quoque certum esset in omni

Hosted by Google

casu esse $u+v=2R$. Si nempe pro angulo utvis parvo u (Fig. 23.) posset $\mathfrak{ap}$ ita removeri, ut recta ex $\mathfrak{a}$ ad angulum u posita primo non secans ipsius $\mathfrak{bd}$ sit, ultra $\mathfrak{bd}$ quoque ad distantiam $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$, $\mathfrak{ab}$ æqualem, angulo u posito, erit rectarum ex $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ se invicem (ut facile patet) primo non secantium angulus uterque $=u$, et summa internorum $=2u$, quod $\backsim 0$. Eritque (ut patebit) aut semper quodvis $u=R$, aut $u \backsim 0$, si $\mathfrak{ab} \backsim \infty$.

3. Si constaret, quod si pro certis u et v e finibus certæ rectæ secent rectæ se invicem, etiam ad angulos $u+z$ et $v-z$ ad fines rectæ eiusdem positæ secent se invicem (nempe pro eadem internorum summa utvis partita): tum quoque facillime constarent omnia.

Vix concipi posset tantum Geometram tale axioma ponere potuisse: at in manuscriptis antiquis inter postulata positum repertum est. Nimirum tota Geometria Euclidis quasi una propositio considerari potest, si dicatur, *Posito A poni G*, (per *A* axioma XI, per *G* geometriam intelligendo). At plane hoc, quod poni debeat, atque et contrarium æque poni possit; nempe quum omnia reliqua axiomata, tam cum eo si (Fig. 22.) u rectus sit, quam cum eo si eo minor sit (imo quantusvis sit ab R inclusive usque ad 0 exclusive), æque subsistant: duo systemata oriuntur, prouti $u=$ vel $<R$ ponitur, utraque vera, unum sub conditione quod si $u=R$ sit, alterum posito $u<R$: quamvis contraria respectu eorum prodeant, quæ a quantitate dicta ipsius u dependent. Imo prouti quantitas ipsius $u<R$ pro certa recta $\mathfrak{ab}$ supponitur, eo respectu innumera systemata oriuntur; quæ tamen certo respectu consentiunt, et omnia sub systemate generali, quod suppositioni $u<R$ innititur, continentur; ex. gr. (Fig. 23.) summa internorum pro rectis se invicem primo non secantibus in omnibus $\backsim 0$, si distantia $\backsim \infty$; ita summa angulorum trianguli rectilinei $\backsim 0$, dum latus quodvis $\backsim \infty$ &.

Si igitur utrumque systema elaboratum sit, etsi per reliqua axiomata indecisum maneat, quodnam reipsa locum habeat: dabitur Geometria eo sensu, quod non solum quodvis dictorum systematum suppositive, sed etiam inconditionate verum sit, duorum aliquod reipsa esse; ea tamen cum restrictione, quod etsi constaret systema pro $u<R$ reipsa locum

Hosted by Google

habere, eorum quantitas, quæ plane a quantitate ipsius u recto minoris determinata dependent, eatenus indecisa maneret.

Aliud est, si res non a priori, sed quoad praxim consideretur; et (Fig. 22.) pro data ab, rectæ ac, donec adhuc secet rectam bd, angulus a posteriori mensuretur; nempe tum saltem a posteriori constabit u a recto, pro tantis lineis quas nobis tentare licet, haud multum differre. Sed quidsi ab usque ad Sirium protenderetur, aut ulterius? Utcunque sit; tempus ab æterno connata spatii soror, ei auxilio venit; et quum motus corporum cœlestium calculis $u = R$ posito innixis conveniant, pro omni mensurationum nostrarum sphæra in praxi eidem suppositioni tuto conquiescere monet.

III. Omnia systemata nobis, si præter axiomata reliqua nullum ponatur, subiective possibilia, id est e quibus unum tantum est, sed quodnam absolute verum sit, decidere haud valemus, generaliter comprehendens, *Appendicis Auctor* rem acumine singulari aggressus Geometriam pro omni casu absolute veram posuit; quamvis e magna mole tantum summe necessaria in Appendice huius tomi exhibuerit, multis, ut tetraëdri resolutione generali pluribusque aliis disquisitionibus elegantibus, brevitatis studio omissis.

Pro data quavis recta ab angulum u (Fig. 22.) geometrice construere docetur in Appendice dicta: de quantitate ipsius u tamen, quamvis in concreto quasi ante oculos stet, a priori decidi nihil potest, nisi quod non o et non $> R$ sit.

Ibidem porro in spatii scientia distinguuntur ea, quæ a quantitate dicta ipsius u non dependent; id est æque vera sunt, sive $u = R$, sive quævis alia quantitas eius inter o et R ponatur: atque Trigonometria sphærica, et quædam alia, ut talia, demonstrantur.

Illa vero quæ absolute a quantitate dicta ipsius u dependent, per eiusmodi functiones determinatas ipsius u exprimuntur, quæ pro quovis valore ipsius u, id est quicunque valor ipsius u reipsa fuerit, eo in expressione substituto ipsi u, quantitatem quæsitam exhibent. Si ex. gr. quantitas certa $x = f(u)$ in spatio absolute a quantitate ipsius u dependeat, et sit $f(u)$ talis expressio, quæ nonnisi ipsum u et quantitates da-

Hosted by Google

tas complectitur: concipiatur abscissa a o usque ad R crescens, omnes valores cogitabiles ipsius u (a o exclusive usque ad rectum inclusive) exhibens; et erigatur a fine cuiusvis abscissæ, ordinata $f(u)$ pro illo valore ipsius u, atque pro $u = R$ fiat ordinata valori illi æqualis, quem expressio pro $u = R$ capit.

Quum autem omnes istæ expressiones quantitatum, in toto spatio a quantitate ipsius u dependentium, cum reliquis axiomatibus æque subsistant, quicunque innumerabilium valorum dictorum substituantur ipsi u: ex iisdem axiomatibus quantitas ipsius u determinari nequit.

IV. Nihilominus tamen quæstio suboritur: quidsi novum axioma detur, per quod determinetur u? tentamina idcirco quæ olim feceram, breviter exponenda veniunt, ne saltem alius quis operam eandem perdat.

Distinxeram ea, e quibus Axioma undecimum Euclidis demonstrari, adeoque theoria parallelarum Euclidea stabiliri posset, in axiomata *situs*, in *quantitativa*, et *intervalli*, atque *similitudinis*.

I. Axiomata situs.

1. Summa duorum internorum, quas rectæ in plani eiusdem plaga eadem ad rectam positæ faciunt, utcunque hæc crescat, nequit continuo decrescendo omni dabili minor fieri, nisi eæ se invicem secent.

2. Si (Fig. 24.) a z non capitur y, neque a $z + v$ capitur $y + v$. Hæc est axiomatis Euclidei tertia pars, nempe eadem summa ad fines eiusdem rectæ aliter partita.

3. (Fig. 23.) Si C ante finem temporis t dabilem quamvis portionem spatii universi utvis infinitam (dummodo nullum punctum rectæ quæ post a ad dextram est incidat) complectatur, et ad finem temporis t fiat C ipsum spatium universum: id, quod e spatio præter C est, ante finem temporis t, semper illi C, quod tunc est, absolute æquale complecti nequit. Duo spatia hoc pacto quaquaversum infinita, nullo puncto præter dimidiam rectam excluso, prodire videntur; nisi XI axioma Euclidis verum sit (ut infra videbitur).

Hosted by Google

II. Quantitativa.

1. Si A habeat dimidia absolute æqualia: innumerabilia dimidia a se invicem prorsus distincta, prioribus absolute æqualia habere nequit.

2. Nullum A habet partes innumerabiles a se invicem prorsus distinctas, quarum quævis ipsi A absolute æqualis sit.

3. Nullum A tale est, ut (pro $n \backsim \infty$) $\frac{A}{n}$ queat ipsum A (uti est) continere, nonnisi $\frac{A}{n}$ deficiente.

III. Intervalli.

Si duarum linearum simplicium uniformium utrinque infinitarum, in plano se invicem secantium, apertura (id est angulus ad punctum sectionis) maneat utrinque constante quodam earundem linearum angulo semper maior ante temporis t finem: in puncto experte temporis ipsum t terminante una alteram transiliisse nequit.

IV. Similitudinis.

Sphæra nulla per ullam qualitatem, præter magnitudinem locumque ab ulla alia discerni potest.

Aut idem de *quibusvis duobus punctis in spatio* dici potest.

Quovis horum posito, XI axioma omnino cum rigore demonstratur: et aut aliquod horum vel alicui æquivalens adsumendum est, aut nulla alia Geometria absoluta datur, nisi quæ in *Appendice* stabilita est; et quæ in omnem casum absolute vera, magni imo eo maioris pretii est, quod nullum axiomatum propositorum simplicitate ceterorum Geometriæ axiomatum gaudeat. Si igitur nullum propositorum inter axiomata referatur, dabitur quidem Geometria, sed quantitas ipsius u semper indecisa manebit: fons purus veritatis in æternitate est, eoque nos per noctem sepulcrorum in lucem allicit; quum mortalibus labiis inde haurire haud liceat.

Interim quantitativum aliquod axioma in Geometria adsumere ne-

Hosted by Google

cesse est: nempe quod sub iis axiomatibus, quibus relatio totius ad partes exprimi solet, latet (Tom. I. pag. 52). Et hoc est sequens:

Quaevis portio spatii undique terminata, tam ipsa quantitas finita est quam superficies eius, si quantitas sit. Inde sequitur *etiam quantitates respectivas eiusmodi finitas esse.*

Hoc quasi introitum aperire videtur alicui axiomatum quantitativorum: utcunque sit; quomodo ope cuiusvis dictorum demonstretur $u = R$ esse, breviter referre, paucis primariis ab hoc independentibus suppositis liceat.

a) Ex (Ax. 1, 2) facile sequeretur modo sequente: (Fig. 24.) si nempe $u + v < 2R$, ad punctum $\mathfrak{d}$ deinceps positis, residuum dicatur y; ductaque e quovis puncto $\mathfrak{f}$ cruris anguli y recta ad $\mathfrak{c}$, angulus quem $\mathfrak{fc}$ cum $\mathfrak{cd}$ facit, dicatur z; ponaturque ad $\mathfrak{c}$ supra z angulus v. Manifesto y a z non capitur, adeoque (per Ax.) neque $y + v$ capitur a $z + v$. Consequenter pro internis u et $v + z$ sectio est; idque tanto fortius, si pro $v + z$ angulus minor v ponatur.

b) Quoad reliqua: consideretur (Fig. 25.) via extremitatis rectæ $\mathfrak{AB}$ perpendicularis ad $\mathfrak{AB}$ in eodem plano; accipianturque inde ab $\mathfrak{a}$ incipiendo sive ad dextram sive ad lævam partes huius viæ, quæ L dicatur, se invicem excipientes $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}$ &c. omnes inter se æquales; ducanturque rectæ $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}$ &c. Angulos omnes x propter generationes æquales patet æquales esse. At quum puncta $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, . . . in recta esse neutiquam constet, quæritur num x rectus vel obtusus aut acutus sit?

1. Si x rectus esset: tum (Fig. 26.) punctum lineæ L e meditullio $\mathfrak{C}$ ipsius $\mathfrak{AB}$ generatum quoque in rectæ $\mathfrak{ab}$ meditullium $\mathfrak{c}$ cadit. Nam recta meditullia $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}$ connectens per generationes utrinque æquales tam ad $\mathfrak{C}$ quam ad $\mathfrak{c}$ angulos utrinque æquales adeoque rectos facit. Si iam punctum lineæ L per perpendicularem ipsi α æqualem ex $\mathfrak{C}$ erectam in $\mathfrak{p}$ aut $\mathfrak{q}$ caderet: in casu primo fieret $a = b + k + h$, adeoque $a > R$, quia $x = k + h = R$ erat; at idem $a < R$ esset, quia $p = R$ externus interno a maior est, uti suo loco independenter demonstratur; in altero casu autem fieret $i = h$, adeoque $i < R$, quamvis externus i sit $> p = R$. Unde etiam $\mathfrak{aA} = \mathfrak{Cc}$ esset.

Hosted by Google

Atque eodem modo punctum lineæ L e meditullio rectæ $\mathfrak{AC}$ pariter in meditullium rectæ $\mathfrak{ac}$ caderet; atque hoc per dimidiationes cuiusvis dimidii in infinitum continuari patet. Tum vero nulla pars continua lineæ L ex $\mathfrak{a}$ supra aut infra rectam $\mathfrak{ab}$ cadere poterit; nam inter $\mathfrak{aA}$ et perpendicularem e puncto quovis lineæ dictæ ex $\mathfrak{a}$ incipientis (et omne punctum præter $\mathfrak{a}$ extra rectam $\mathfrak{ab}$ habentis) ad $\mathfrak{AB}$ demissam innumera lineæ eiusdem puncta per dimidiationem dictam generata dantur in rectam $\mathfrak{ab}$ cadentia. Essetque hoc pacto linea L eadem cum recta $\mathfrak{abcd}$ . . . (Fig. 25.); unde per inferiora omnia facile patent.

2. Si vero x acutus vel obtusus esset: tum $\mathfrak{abcd}$ . . . talis linea e rectis composita esset, cuius latera $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}$, . . . utrinque in infinitum essent æqualia, et anguli quoque lateris cuiusvis cum præcedente latere et sequente in eadem plaga æquales essent. Si $x < R$, tum angulus rectarum $\mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{bc}$ inferior est $< 2R$; si $x > R$ esset, tum ubique superior esset $< 2R$; potest quidem demonstrari $x > R$ non esse; quia tum per diagonalem $\mathfrak{aB}$ duo triangula fierent, quorum summa angulorum $> 4R$, adeoque triangulum daretur, cuius angulorum summa $> 2R$, (quia > 4 in duas partes dispesci ita nequit, ne aliqua > 2 sit); hoc autem fieri non posse, item independenter pluribus modis demonstrari potest. Sed sufficit nunc linea dicta $\mathfrak{abcd}$ . . ., cuius per quemvis angulum duobus rectis minor intelligatur: dicatur hæc linea λ.

3. Manifesto vero lineæ λ nullum latus ex. gr. $\mathfrak{cd}$ ad dextram continuatum, partem ipsius λ per perpendiculares ad $\overline{\mathfrak{AB}}$ a puncto $\mathfrak{C}$ ad lævam cadentes generatam, ita nec ullam perpendicularium porro ad lævam cadentium secare potest: nam tam omnes perpendiculares dictæ, quam omnia quæ inter tales perpendiculares sunt, in plagam plani illam cadunt, quæ a $\mathfrak{Cc}$ ad lævam est; itaque ut sectio dicta fiat, recta $\mathfrak{c\bar{d}}$ per rectam $\overline{\mathfrak{Cc}}$ alicubi præter $\mathfrak{c}$ transire deberet, et tum $\mathfrak{cd}$ in $\mathfrak{c\overline{C}}$ caderet.

4. Ita perpendicularis quævis $\overline{\mathfrak{Cc}}$ per verticem anguli ipsius λ ex $\mathfrak{c}$ ad $\overline{\mathfrak{AB}}$ missa, angulum ipsum omnino bisecans, nullum præter $\mathfrak{c}$ punctum cum λ (aut cum L) commune habet: nam si quod punctum $\mathfrak{p}$ ipsius λ adhuc cum $\overline{\mathfrak{Cc}}$ commune esset, hoc $\mathfrak{p}$ in perpendicularem e puncto

Hosted by Google

rectæ $\overline{\mathfrak{AB}}$ a $\mathfrak{C}$ diverso erectam caderet; et si $\mathfrak{p}$ etiam in $\mathfrak{Cc}$ caderet, duæ rectæ ad eandem rectam perpendiculares concurrerent.

5. (Fig. 27.) Rectæ $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{ad}$ &c ex eodem $\mathfrak{a}$ ad extrema laterum lineæ λ ductæ vocentur Q, Q', Q'', . . . et nomine generali dicantur Q; atque sit $\mathfrak{Q}$ angulum lineæ λ quæ ad $\mathfrak{a}$ est bifariam secans, adeoque perpendicularis ad $\overline{\mathfrak{AB}}$ per $\mathfrak{a}$: angulus $\mathfrak{abc}$ est $= \mathfrak{bcd} = \mathfrak{cde}$ &c; sed quæritur, quo cadat respectu alicuius Q latus sequens lineæ λ? Primo statim $\mathfrak{bc}$ infra $\mathfrak{ab}$ cadit, quia (pag. 49) angulus duobus rectis minor accipitur; porro $\mathfrak{cd}$ infra Q' cadit; secus enim aut in Q' aut supra Q' caderet. In Q' non cadit; quia id aut intra $\mathfrak{c}$, aut ultra $\mathfrak{c}$ ex. gr. in $\mathfrak{f}$ esset; et in casu posteriore angulus $\mathfrak{bcf} > 2R$ esset, in altero vero per $\mathfrak{c\bar{d}}$ secaretur pars ipsius λ ante generata (contra pag. 49). Idem fieret, si $\mathfrak{cd}$ supra Q' caderet, fieri enim hoc inter Q' et $\mathfrak{cb}$ deberet; nam si extra $\mathfrak{cb}$ caderet, angulus $> 2R$ esset.

Demonstratione eadem semper ulterius applicata, patet quodvis latus sequens infra rectam ex $\mathfrak{a}$ ad initium eius ductam cadere.

6. Hinc si Q circa $\mathfrak{a}$ moveatur per $\mathfrak{bcde}$ . . ., usquequo in $\mathfrak{Aa}$ perveniat: omnino semper in ulterius punctum lineæ λ veniet, adeoque eam secabit aliquamdiu, ipsum $\mathfrak{Aa}$ vero nullum latus lineæ λ secabit (pag. 49); itaque ut supra (pag. 43) datur aliqua recta $\mathfrak{Q}'$ lineam λ primo non secans, intra quam quodvis Q angulum utvis parvum z cum $\mathfrak{Q}'$ efficiens secat lineam λ.

Sed tum etiam nullum latus lineæ λ (ex. gr. $\mathfrak{c\bar{d}}$) ad dextram utvis continuatum secat rectam $\mathfrak{Q}'$ ullibi (ex. gr. in $\mathfrak{i}$). Nam perpendicularis e quovis puncto ulteriore (ad dextram) lateris cuiusvis utvis continuati quoque semper ulterius cadit: namque $\mathfrak{e}$ a perpendiculari $\mathfrak{Dd}$ ad dextram cadit; ita continuatio rectæ $\mathfrak{de}$ per perpendicularem $\mathfrak{eE}$ transit ad dextram, et perpendicularis e quovis puncto rectæ huius, quæ ab $\mathfrak{eE}$ ad dextram cadit, pariter ad dextram cadit; uti etiam perpendicularis e quovis puncto rectæ, quæ per novam perpendicularem ad dextram transit.

Itaque si sectio $\mathfrak{i}$ fieret: tota $\mathfrak{def}$ . . . excepto puncto $\mathfrak{d}$ intra triangulum $\mathfrak{adi}$, adeoque inter perpendiculares $\mathfrak{aA}$ et $\mathfrak{iJ}$ contineretur quodvis

Hosted by Google

punctum, et quævis perpendicularis generans ex eo ad $\mathfrak{AI}$ missa, et ultra $\mathfrak{I}$ nulla perpendicularis generans daretur. Idem valet quocunque cadat $\mathfrak{i}$, atque etiam si $\mathfrak{abcdef}\ldots$ versus $\widetilde{\mathfrak{AB}}$ convexa esset (quod ut dictum est, fieri non posse facile ostendi potest).

7. Manifesto autem hinc pro z utvis parvo, ex. gr. $z < \frac{q}{n}$ pro n integro utvis magno, crura alicuius anguli constantis q, producta in infinitum etiam, inter crura anguli z continentur. Atque hinc si q e vertice in n partes æquales dividatur, inter cuiusvis eiusmodi n-tæ partis crura quoque continebitur unum q cum cruribus infinitis, et omnes hi anguli q a se invicem prorsus distincti erunt, si in quovis $\frac{q}{n}$ ita accipiatur $z < \frac{q}{n}$, ut crura ipsius z e vertice anguli q intra crura anguli $\frac{q}{n}$ cadant.

Unde cum axiomate (II, 2) proposito, anguli u (pag. 43) quantitas $>$ aut $< R$ consistere nequit. Consequenter u rectus est.

8. Hinc (Fig. 28.) si (ex Fig. 25.) $\mathfrak{aA} = \mathfrak{bB}$, et anguli ad $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$ recti sint, erunt anguli $\alpha + \gamma$ et $\alpha' + \gamma'$ ac β, β' (*alterni* dicti) æquales, uti *externus* ex. gr. β'' *interno opposito* β' æqualis, et quæcunque recta $\mathfrak{aB}$ secet ipsam $\widetilde{\mathfrak{AB}}$ et $\widetilde{\mathfrak{ab}}$, summa internorum est duobus rectis æqualis. Nam triangula rectangula $\mathfrak{AaB}$ et $\mathfrak{bBa}$ propter hypotenusam communem et cathetum $\mathfrak{aA}$ catheto $\mathfrak{bB}$ æqualem sunt (per inferiora ab his independenter) æqualia; adeoque

$$\alpha = \alpha' \quad \text{et} \quad \beta = \beta';$$

et hinc quia $\beta = \beta''$ nempe suo verticali, est etiam $\beta'' = \beta'$. Atque hinc, quum

$$\beta'' + \gamma + \alpha = 2R,$$

erit etiam

$$\beta' + \gamma + \alpha = 2R.$$

9. Hinc item quodvis triangulum fuerit, (Fig. 29.) per verticem tali linea ut in præcedentibus generata, erit

$$\gamma = \gamma', \quad \text{et} \quad \beta = \beta';$$

adeoque

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta' + \gamma' = 2R.$$

Hosted by Google

10. Atque hinc

$$\delta + \gamma = \beta + \alpha + \gamma = 2R\,;$$

et

$$\delta = \alpha + \beta\,;$$

nempe producto latere quovis trianguli, angulus externus est summæ internorum oppositorum æqualis.

11. Et hinc iam facile sequitur, quod si (Fig. 30.) summa internorum $< 2R$, tum rectæ secent se invicem. Nam si

$$u + p + \omega + q = 2R,$$

et $\mathfrak{B}\tilde{\mathfrak{b}}$ ipsam $\mathfrak{A}\tilde{\mathfrak{a}}$ primo non secans sit, erit tum recta e quovis puncto $\mathfrak{a}$ ipsius $\mathfrak{A}\tilde{\mathfrak{a}}$ ad $\mathfrak{B}$ ducta, angulus ad $\mathfrak{a}$ trianguli $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{B}$ (per 9) æqualis

$$2R - u - p = u + p + \omega + q - u - p = \omega + q,$$

essetque semper $> q$; quod falsum esse patet (ex Fig. 31.): nam si $\alpha' = \alpha$, ita $\beta' = \beta$, et ita porro cuivis novo lateri ex $\mathfrak{b}$ ducto, e fine eius in $\mathfrak{A}\tilde{\mathfrak{a}}$ æquale accipiatur: orientur triangula æquicrura se in infinitum excipientia; in quibus

$$z = 2z', \quad z' = 2z'', \ldots$$

itaque angulis z, z', z'' . . . generaliter z dictis, $z \backsim 0$. Nempe trianguli æquicruri angulos ad basim esse æquales infra ab hoc independenter demonstrabitur.

12. Superius generatam L (per definitionem pag. 19) parallelam ad $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ esse patet; et iam hic posito axiomate dicto, manifesto recta $\widetilde{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ non secat rectam $\widetilde{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, quævis alia per $\mathfrak{a}$ ducta autem, quum ab aliqua parte summa internorum $< 2R$ fiat, secat rectam $\widetilde{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$; et manifesto datur eodem modo parallela ad rectam quamvis per punctum quodvis, eaque una sola est.

13. Atque hinc (Fig. 32.) si rectæ A, B secent se invicem in $\mathfrak{p}$, ubicunque sit A' ad A parallela, etiam A' secatur a B. Sit enim ex $\mathfrak{p}$ recta ad quodvis aliquod punctum $\mathfrak{q}$ rectæ A'; erit

Hosted by Google

$$z + v + u = 2R;$$

itaque

$$v + u < 2R;$$

consequenter B ultra $\mathfrak{p}$, et A' ultra $\mathfrak{q}$ continuatæ concurrent.

14. Pariter patet, quocunque moveatur B sibi parallele (ex. gr. in B'), rectas A' et B' quoque secare se invicem, et angulos z et k in sectione prima esse angulis z et k sectionis posterioris æquales.

15. E superius dictis autem sequitur etiam inter crura anguli utvis parvi v continuata in infinitum, angulum quatuor rectis quantovis minorem, simul cum cruribus continuatis in infinitum, imponi posse, nisi $u = R$ sit (pag. 43).

Nempe inter crura anguli utvis parvi v (pag. 51) angulus certus $b = \frac{R}{n}$, pro R rectum et n integrum denotante, imponi potest, adeoque etsi $v = \frac{1}{2} b$ fuerit; fiat id ad distantiam d a vertice anguli $v = \frac{1}{2} b$. Atque hinc fiat (Fig. 33.) linea polygonalis $\mathfrak{abcd} \ldots$, cuius latus quodvis $= d$, et angulus quivis (duobus rectis minorem intelligendo) sit

$$= 2R - \frac{1}{2} b.$$

Dicaturque α continuatio lateris $\mathfrak{ab}$ efficiens angulum $\frac{1}{2} b$ cum $\mathfrak{bc}$, et fiat ex $\mathfrak{b}$ recta $\mathfrak{bb}'$, ex $\mathfrak{c}$ recta $\mathfrak{cc}'$, ex $\mathfrak{d}$ recta $\mathfrak{dd}'$ &c., singulæ angulum $\frac{1}{2} b$ cum lateribus e punctis $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots$ incipientibus efficientes, ut inter crura cuiusvis $\frac{1}{2} b$ ad distantiam d sit $\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} b = b$ positum; quævis litera græca autem fuerit ad initium lateris alicuius, efficiens cum eo in plaga dextra angulum aliquem p: recta ad finem lateris eius, cum continuatione eiusdem efficiens angulum externum $= p$, insigniatur litera græca sequente; ex. gr. β efficiet cum continuatione lateris $\mathfrak{bc}$ angulum $\frac{1}{2} b$, ita γ efficiet cum continuatione lateris $\mathfrak{cd}$ angulum $2 \cdot \frac{1}{2} b$, ita δ cum continuatione lateris $\mathfrak{de}$ angulum $3 \cdot \frac{1}{2} b$ et ita porro, donec litera græca prodeat, quæ cum continuatione lateris præcedentis efficiat angulum $(4n - 1) \cdot \frac{1}{2} b$, adeoque cum latere sequente faciat angulum $4n \cdot \frac{1}{2} b = 2R$.

Manifesto $\tilde{\beta}$ in plano supra $\tilde{\alpha}$, et $\tilde{\gamma}$ supra $\tilde{\beta}$, ac $\tilde{\delta}$ supra $\tilde{\gamma}$ &c., ac quæ-

Hosted by Google

vis sequens supra omnes præcedentes cadit: imo si omnium rectarum literis græcis denotatarum tantum pars a linea bcde . . . in plagam dextram cadens consideretur: quævis supra omnes præcedentes cadet; nec illa, quæ cum latere sequente $2R$ facit, adeoque in recta erit, secat ipsam $\tilde{a}$. Erit igitur tota hæc recta utrinque infinita inter crura ipsius $v = \frac{1}{2} b$; nempe $b\tilde{b}'$ est intra $a\tilde{a}'$, $c\tilde{c}'$ intra $b\tilde{b}'$, $d\tilde{d}'$ intra $c\tilde{c}'$ &c.

Unde etiam (Fig. 34.) ad rectarum A, B angulum utvis parvum v efficientium, latus quodvis A potest talis perpendicularis poni, quæ utvis producta latus alterum B utvis productum secare nequeat. Sit enim C recta talis, quæ per præcedentia etiam utrinque infinita inter crura anguli v ab ea parte in infinitum producta maneat: demittaturque e quovis puncto p ipsius C perpendicularis pq ad A; cadet hæc in plagam eandem cum C, quia si in alteram caderet, fieret triangulum cuius unus angulus rectus esset, alter autem obtusus, nempe ipsi v acuto deinceps positus; continuatio ipsius pq vero transit per C in alteram plagam, quæ pariter tota inter crura anguli v continetur.

Atque hinc (Fig. 35.) inter crura anguli $2v$ (quod $\backsim 0$ si $v \backsim 0$) non solum totam perpendicularem $\tilde{c}\tilde{c}'$, sed $a'c = ac$ facta, etiam angulum $b'a'\tilde{b}'$ æqualem $4R - v$ simul cum cruribus infinitis imponi posse patet.

Si igitur ba circa a moveatur versus ac usquequo in ac perveniat, atque priusquam ab in ac perveniat, accipiatur semper tale a', et tale $a'b'$ ad angulum ei quem ab cum ac facit æqualem, ut $a'\tilde{b}'$ et $a\tilde{b}$ se invicem haud secent; atque cogitetur semper spatium quod, si schema circa aa' revolveretur, maneret a via ipsius ab ad lævam, et id quod a via ipsius $a'b'$ ad dextram esset. Hoc pacto quævis spatii portio s nihil cum recta $a\tilde{a}'$ (saltem præter punctum a) commune habens, manifesto alicui spatio ad lævam generato includetur pro v minore, quam angulus quivis, quem recta ex a ad aliquod punctum ipsius s ducta cum aa' facit; atque a' sufficienter remoto, ad angulum v alteri v æqualem, aderit alterum s quoque cum priore nihil commune habens. Unde applicatio Axiomatis propositi (I, 3) patet; non tamen duo spatia prodibunt, nam dum ab in ac pervenit, nascitur quidem totum spatium, sed a' in infinito disparens nullibi amplius in temporis puncto experte ultimo reperitur; et

Hosted by Google

antea quidem quodvis punctum in spatium ad lævam inclusum est, sed omne nunquam ante finem.

16. Ita facile demonstrantur sequentia:

1. Lineam uniformem L (pag. 50) nisi recta sit, extra lineam $\mathfrak{abcd}$ . . . fluere, cum hac (Fig. 27.) nonnisi puncta $\mathfrak{abcd}$ . . . communia habentem: atque hinc applicatio (Ax. III.) patet; nempe angulus quem continuatio inferior ipsorum Q cum L extus facit, infrorsum $\backsim\!\!\backsim a$, superius ad $2R'-a$, (si per R' intelligatur angulus quem continuatio rectæ $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ cum L facit), et uterque est semper $> a$; inferior crescit continuo, superior decrescit, et manifesto sunt anguli ad utramque continuationem cuiusvis Q æquales.

2. $\mathfrak{A}\widetilde{\mathfrak{B}}$ circa $\mathfrak{A}$ sursum motum illico secat lineam L, uti etiam quævis perpendicularis ad $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ inter $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{A}$; et statim post $\mathfrak{A}$, ad dextram lævamque secat ipsum L ad angulos utrinque æquales, a limite dicto a decrescentes, et dato constante aliquamdiu semper maiores.

3. Manente $\mathfrak{a}$ et remoto $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}\widetilde{\mathfrak{A}}$ semper porro deorsum in infinitum simul cum perpendiculari $\mathfrak{A}\widetilde{\mathfrak{B}}$, ac generatis super quavis $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ cum perpendiculari $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ lineis L, et angulo, quem recta ipsam L primo non secans cum $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ facit, generaliter u dicto, atque etiam quovis centro $\mathfrak{A}$ radio $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ descriptis circulis: angulus $u \backsim\!\!\backsim 0$; alioquin recta pro certo angulo perpendicularem utvis remotam secaret (contra pag. 54); porro lineæ L solum punctum $\mathfrak{a}$ commune habebunt, et descendent; circuli vero idem punctum $\mathfrak{a}$ solum commune habebunt, sed ascendent continuo, gaudebuntque limite geometrico certo eodem: quem existere, uti et superficiem per revolutionem huius lineæ circa $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$, atque utramque formam uniformem esse constat; estque si XI Axioma Euclidis verum sit, linea dicta *recta*, et superficies *planum*; in omni tamen casu tam linea hæc, quam superficies, *sola* determinatur in *spatio*.

Describi vero linea dicta motu puncti continuo potest modo sequente. Sit prius (Fig. 36.) $u = R$, et moveatur $\mathfrak{ab}$ circa $\mathfrak{a}$ usque in $\mathfrak{ac}$; simulac $\mathfrak{b}$ in arcu α viam aliquam describet, illico dabitur aliquod $\mathfrak{c}$, unde erecta perpendicularis primo non secans rectæ $\mathfrak{a}\widetilde{\mathfrak{b}}$ est, et pro $\mathfrak{ca}' = \mathfrak{ca}$ erit $\mathfrak{a}'\widetilde{\mathfrak{b}}'$ primo non secans ipsius $\mathfrak{a}\widetilde{\mathfrak{b}}$. Puncto $\mathfrak{b}$ in arcu α porro moto vero punctum $\mathfrak{c}$ ab $\mathfrak{a}$ incipiendo semper porro movetur: nam pro quovis puncto

Hosted by Google

interiore ipsius α datur $\mathfrak{c}$, et quidem semper ulterius; nec ullum punctum ultra quodvis $\mathfrak{c}$ ab $\mathfrak{a}$ incipiendo est, cui aliquod punctum ipsius α non respondeat, et cuivis ulteriori puncto interius punctum ipsius α respondet. Nam si $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}}$ primo non secans ipsius $\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{p}}$ sit, interius ducta recta secabit ipsam $\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{p}}$, adeoque illa perpendicularis, quam non secat, ulterius esse debet; si vero aliquod $\mathfrak{c}$ esset, cui non responderet punctum aliquod interius ipsius α, tum perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ esset primo non secans ipsius $\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{p}}$: atque tum pro recta $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ verum esset Axioma XI; et tum de omnibus facile demonstraretur. Potest igitur $\mathfrak{c}$ ex $\mathfrak{a}$ incipiendo ita moveri porro, ut mota $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ circa $\mathfrak{a}$, adeoque mota $\mathfrak{b}$ in α, donec u (prius $= R$) fiat $= 0$, $\mathfrak{c}\mathfrak{p}$ semper tale sit, ut $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}}$ primo non secans illius sit: atque hinc eadem ad $\mathfrak{a}'$ applicando, poterit $\mathfrak{a}'$ ex $\mathfrak{a}$ ita porro moveri, ut $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}}$ et $\mathfrak{a}'\tilde{\mathfrak{b}}'$ quævis alterius primo non secans sit.

Atque iam moveatur (Fig. 37.) $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}}$ circa $\mathfrak{a}$ versus $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ in eodem plano, donec u (prius $= R$) fiat $= 0$, atque interea in $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}}$ moveatur punctum $\mathfrak{b}'$ semper porro, ita ut $\mathfrak{b}'$ in moto $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}}$ semper in loco dicto ipsi u respondente sit: erit via ipsius $\mathfrak{b}'$ per motum hunc compositum *linea dicta*. Reliqua autem ultro patent; uti et ea quæ reliquorum axiomatum propositorum quovis posito, rem deciderent: nec operæ pretium est plura referre; quum res tota ex altiori contemplationis puncto, in ima penetranti oculo tractetur in *Appendice*, a quovis fideli veritatis puræ alumno digna legi.

Hosted by Google

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SECTIO II.

PLANIMETRIAE PARS PRIMA.

·21111.

Sectio nulla est duarum rectarum, si recta ab uno puncto unius ad aliquod punctum alterius ducta, summa internorum in plaga eadem sit duobus rectis æqualis.

Sectio nulla rectae et circuli est, si perpendicularis e centro ad rectam radio sit maior.

Sectio nulla duorum circulorum est, si recta a centro ad centrum summa radiorum maior sit.*

Sed de his heic ordinis gratia allatis, sub ·21112121 (pag. 58) et in *supplemento* post ·21112112 22 (pag. 66) dicetur; atque nunc sequitur:

·2111211.

Si duæ rectæ punctum commune habeant, formam angularem oriri e *Conspectu Geometriae generali* facile patet. Dictum etiam ibidem est angulum esse quantitatem respectivam quoad arcum α circuli e puncto sectionis radio certo r (eodem pro omnibus) descripti inter crura comprehensum; scilicet si peripheria tota sit p, anguli quantitas dicitur $\frac{\alpha}{p}$, ut nempe angulus rectus, ut quantitas, sit $= \frac{1}{4}$.

Patet vero pro duabus formis angularibus, quæ congruere queunt, arcum etiam congruentem describi, adeoque quotum eundem prodire.

* Quoad sectionem nullam aut quamvis duorum circulorum vide Fig. 240. (Ex Erratis Ed. I Tom. II, pag. 375).

Hosted by Google

Ita conversim si arcus $\mathfrak{ab} = \mathfrak{pq}$ (Fig. 38.) centro radioque eodem, formæ angulares $\mathfrak{acb}$, $\mathfrak{pcq}$ congruent. Nempe si forma $\mathfrak{pcq}$ superimponatur ipsi $\mathfrak{acb}$, ita ut $\mathfrak{c}$ in se maneat, et $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{a}$ cadat, atque arcus in eandem plagam cadant: arcus $\mathfrak{pq}$ ob generationes æquales simul cum arcu $\mathfrak{ab}$ incipit continuaturque, nec prius aut serius desinere potest, quia tum pars æqualis toti esset, quum circulus linea simplex sit. Consequenter $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{b}$ cadentibus, et rectæ $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bc}$ cum $\mathfrak{pc}$, $\mathfrak{qc}$ congruunt. Patet etiam pariter $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{a}$ poni potuisse, quum circuli generatio ad lævam dextramque prorsus æqualis sit.

Est etiam manifesto (Fig. 39.) omnium angulorum u, v, z, p, q, quotvis fuerint, summa $= 1$, nempe arcuum omnium summa est peripheria, quæ per se divisa quotum 1 dat. Ita quotvis u, v, z fuerint supra rectam $\mathfrak{ab}$, summa est $\frac{1}{2}$; pariter infra $\mathfrak{ab}$. Si e meditulliis dimidiarum peripheriarum supra et infra $\mathfrak{ab}$ ad $\mathfrak{c}$ rectæ ducantur, angulorum tam superius quam inferius æqualis summa prodibit; adeoque et quatuor rectorum summa est $= 1$, et duorum rectorum summa $= \frac{1}{2}$. Consequenter summa prior etiam quatuor rectis, et posterior duobus rectis æqualis dici potest.

Hinc anguli verticales sunt æquales; nempe (Fig. 40.) $u = v$ et $z = p$; nam $u + p = 2R = v + p$, et hinc $u = v$; ita $z + v = v + p$. Nempe (Fig. 41.) etiam recta $\mathfrak{dc}$ per rectam $\mathfrak{ab}$ in alteram plagam transit: nam in $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ nullum aliud punctum præter $\mathfrak{c}$ habet; itaque nisi transiret, in eandem plagam e qua venit redire deberet; tum vero esset tam $k + u + v$ quam $u = \frac{1}{2}$, adeoque pars peripheriæ dimidiæ esset ipsi peripheriæ dimidiæ æqualis.

·21112121.

De tribus rectis, quarum nonnisi unum par est se mutuo (continuatione sufficiente) non secantium.

§. 1.

Si angulus externus u aequalis sit interno opposito v, sive alterni u, v fuerint aequales, sive $v + z = 2R$, quorum quodvis manifesto ponit reliqua duo: *tum rectae* $\mathfrak{ab}$ *et* $\mathfrak{AB}$ *se invicem non secant* (Fig. 42.).

Hosted by Google

Si enim $\mathfrak{DB}$ et $\mathfrak{db}$ secarent se mutuo, idem et in plaga altera fieret; nam formæ $\mathfrak{dbDB}$ et $\mathfrak{DAda}$ congruunt recta $\mathfrak{dD}$ ita posita, ut $\mathfrak{d}$ formæ prioris in $\mathfrak{D}$ posterioris et $\mathfrak{D}$ prioris in $\mathfrak{d}$ posterioris cadat, atque vertatur forma prior, donec in plagam plani lævam cadat; namque tum $\mathfrak{db}$ propter alternos z æquales in $\mathfrak{DA}$, et $\mathfrak{DB}$ in $\mathfrak{da}$ cadet. Tunc vero punctum ipsis $\mathfrak{DB}$ et $\mathfrak{db}$ commune erit etiam ipsis $\mathfrak{da}$ et $\mathfrak{DA}$ commune. Consequenter $\mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{AB}$ duo puncta haberent communia.

Hinc si $\angle\, \mathfrak{adD} = \mathfrak{BDd}$ construatur (pag. 61), $\mathfrak{ab}$ ipsi $\mathfrak{AB}$ per $\mathfrak{d}$ fiet *parallela*.

§. 2.

(Fig. 43.). Etsi externus minor, nempe $v = u > u'$ fiat: $\mathfrak{de}$ ipsam $\mathfrak{AB}$ secare nequit. Nam per $\mathfrak{ab}$ prius transire deberet alicubi præter $\mathfrak{d}$, atque item duo puncta haberent $\mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{de}$ communia.

§. 3.

Hinc *si duae rectae* $\mathfrak{db}$ *et* $\mathfrak{DB}$ *secent se mutuo: oportet externum maiorem interno opposito* v *esse*; nam si externus æqualis aut minor esset, nulla sectio daretur (per §. 1 et 2). Pariter patet (Fig. 44.) externi u verticalem eadem ratione esse altero p duorum internorum oppositorum maiorem; nempe si æquales essent, tum $\mathfrak{Ed}$ et $\mathfrak{AB}$ non secarent se invicem &.

Itaque trianguli *latere quovis producto, externus quovis internorum oppositorum est maior.*

§. 4.

Unde etiam *summa quorumvis duorum angulorum trianguli est* $< 2R$.

Nam (Fig. 44.)

$$u + z = 2R;$$

sed

$$v < u,$$

Hosted by Google

consequenter

$$v + z < 2R.$$

Conversa huius, nempe quod rectæ se invicem secent, si summa duorum internorum duobus rectis minor fuerit, Axioma XI Euclidis est; de quo iam in sectione prima actum est, atque in sequentibus ubique supponetur.

§. 5.

Hinc perpendicularis acuto angulo obiecta cadit; secus enim triangulum fieret, cuius unus angulus rectus et alter obtusus esset. Atque hinc etiam patet ex eodem puncto duas perpendiculares ad rectam eandem non dari; nam triangulum fieret cum angulis rectis duobus.

·2111211 22.

Si *trium rectarum nullum par sit se mutuo* (continuatione sufficiente) *non secantium*: oritur *triangulum*, quod si angulo recto gaudeat, *rectangulum*, si obtuso *obtusangulum*, secus *acutangulum* audit; et quodvis horum, si duobus lateribus æqualibus gaudeat, *aequicrurum*, atque triangulum cuius omnia latera æqualia sunt, *aequilaterum* audit. Trianguli rectilinei latera angulum rectum intercipientia *catheti*, latus angulo recto oppositum vero *hypotenusa* dicuntur. Quomodo geometrice construi queant, mox dicetur.

·2111211221.

§. 1.

Aequalitatem duorum triangulorum, et quidem ita ut lateribus æqualibus anguli æquales, et angulis æqualibus latera æqualia respondeant, generaliter *ponit* quodvis sequentium:

1. *duo latera cum angulo intercepto*,

Hosted by Google

2. *unum latus et duo anguli, si unus adiacens adiacenti, et alter aut adiacens adiacenti aut non adiacens non adiacenti aequalis sit,*

3. *tria latera tribus aequalia.*

Casus 1. (Fig. 45.). Si $\mathfrak{AC}=\mathfrak{ac}$, atque $\mathfrak{AB}=\mathfrak{ab}$ et simul $\angle\mathfrak{CAB}=\mathfrak{cab}$: superimponatur triangulum $\mathfrak{cab}$ ipsi $\mathfrak{CAB}$, ita ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{B}$ cadat, et vertatur in eandem plagam; $\mathfrak{ac}$ nec supra nec infra $\mathfrak{AC}$ cadet, quia anguli ad $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{A}$ sunt æquales; cadetque etiam $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{C}$ propter $\mathfrak{AC}=\mathfrak{ac}$. Consequenter etiam recta $\mathfrak{bc}$ congruet cum $\mathfrak{BC}$, quum duo extrema congruant.

Casus 2. (Fig. 46.). Si $\mathfrak{AB}=\mathfrak{ab}$, atque anguli ad $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ angulis ad $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ æquales sint: superimponatur triangulum $\mathfrak{abc}$ ipsi $\mathfrak{ABC}$, ita ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{B}$ cadat, vertaturque in eandem plagam; cadet $\mathfrak{a\tilde{c}}$ in $\mathfrak{A\tilde{C}}$ et $\mathfrak{b\tilde{c}}$ in $\mathfrak{B\tilde{C}}$ propter angulos dictos æquales. Consequenter $\mathfrak{c}$ extra $\mathfrak{C}$ cadere nequit, secus enim duæ rectæ duo puncta haberent communia.

Ita (Fig. 47.) si $\mathfrak{AB}=\mathfrak{ab}$, atque $\angle u$ ad $\mathfrak{a}=\angle u$ ad $\mathfrak{A}$, et $\angle\mathfrak{acb}=\angle\mathfrak{ACB}$; superimposito triangulo $\mathfrak{abc}$ ipsi $\mathfrak{ABC}$, ita ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{B}$, et $\mathfrak{a\tilde{c}}$ in $\mathfrak{A\tilde{C}}$ cadat; $\mathfrak{c}$ nonnisi in $\mathfrak{C}$ cadere potest; nam $r>z>t$ (pag. 59).

Casus 3. (Fig. 48.). Si $\mathfrak{ab}=\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{ac}=\mathfrak{AC}$, $\mathfrak{bc}=\mathfrak{BC}$: superimponatur triangulum $\mathfrak{abc}$ ipsi $\mathfrak{ABC}$, ita ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{B}$ cadat, vertaturque in eandem plagam; et describantur centro $\mathfrak{a}$ radio $\mathfrak{ac}$ et centro $\mathfrak{b}$ radio $\mathfrak{bc}$ circuli: nisi $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{C}$ cadat, aderunt circulorum dictorum in plaga superiori duo puncta communia; itaque manifesto iisdem peripheriis et inferius duo puncta communia parient sectionem peripheriarum duarum ad minimum quatuor punctorum; quod fieri nequit, quum maximam earum sectionem nonnisi duorum punctorum esse iuxta ordinem in ·21112121 (pag. 81) demonstretur, quod hic quoque statim perlegere licet.

Hinc *si* (Fig. 38.) *e* $\mathfrak{q}$ *radio* $\mathfrak{ba}$ *secetur arcus* $\mathfrak{qp}$ *in* $\mathfrak{p}$, *fiet angulo* $\mathfrak{qcp}$ *angulus* $\mathfrak{bca}$ *aequalis.*

§. 2.

Triangula dicta, nempe *aequicrurum*, *aequilaterum*, *rectangulum*, *obtusangulum, acutangulum construi geometrice* possunt; nempe:

1. Si (Fig. 49.) centro $\mathfrak{a}$ et radio r dimidium rectæ $\mathfrak{ab}$ excedente, ac

Hosted by Google

centro $\mathfrak{b}$ item radio r fiant circuli, hi secabunt se alicubi; nam sit $\mathfrak{ac} = \mathfrak{cb}$, et $r = \mathfrak{af} = \mathfrak{be} = \mathfrak{be}'$; erit $\mathfrak{e}$ punctum peripheriæ centri $\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{f}$ punctum peripheriæ centri $\mathfrak{a}$; atque $\mathfrak{e}$ punctum internum peripheriæ centri $\mathfrak{a}$, quia $\mathfrak{ae} < \mathfrak{af}$; dum igitur centro $\mathfrak{b}$ radio $\mathfrak{be}$ scribitur circulus, punctum $\mathfrak{e}$ ut in $\mathfrak{e}'$ venire queat, e circulo priore egredi debet, nam $\mathfrak{e}'$ extra illum cadit, quia $\mathfrak{ae}' > r$. Transitus iste autem in recta $\mathfrak{ab}$ fieri nequit, quia partes ex $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ nonnisi in $\mathfrak{c}$ æquales radii esse possunt. Si igitur $\mathfrak{d}$ sit sectionis punctum, patet $\mathfrak{ad} = \mathfrak{db} = r$ esse.

Ita si $r = \mathfrak{ab}$ accipiatur, latera omnia manifesto æqualia sunt. Et si $r > \mathfrak{ab}$ accipiatur quoque, manifesto sectio fit, et triangulum *aequicrurum* in omni casu.

2. Rectangulum triangulum construi posse patet, si perpendicularis construatur. Hoc vero fit sive e puncto $\mathfrak{c}$ quopiam rectæ *erigendo*, sive e puncto $\mathfrak{d}$ extra eam *demittendo perpendicularem*.

Prius fit (Fig. 50.), si centro $\mathfrak{c}$ radio quovis sit circulus, et $\mathfrak{ca} = \mathfrak{cb}$; atque radiis eidem r æqualibus (ut antea) centris $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ fiat circulorum sectio in $\mathfrak{d}$: erit enim triangulum $\mathfrak{adc} = \mathfrak{bdc}$, quia $\mathfrak{ac} = \mathfrak{bc}$, $\mathfrak{dc} = \mathfrak{dc}$ et $\mathfrak{ad} = \mathfrak{db} = r$; consequenter angulus $\mathfrak{acd} = \mathfrak{bcd}$.

Alterum vero fit (Fig. 51.), si ex $\mathfrak{d}$ puncto supra $\mathfrak{AB}$ fiat recta ad quodvis punctum $\mathfrak{p}$ infra $\mathfrak{AB}$ situm, fiatque circulus centro $\mathfrak{d}$ radio $\mathfrak{dp}$; manifesto transibit $\mathfrak{p}$ per rectam $\widetilde{\mathfrak{AB}}$ tam ad lævam quam ad dextram eundo usque in $\mathfrak{p}'$ pro $\mathfrak{dp} = \mathfrak{dp}'$. Fiat hoc in $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$; fiatque centris $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ radio eodem r (ut antea) intersectio sive in $\mathfrak{e}$ sive in $\mathfrak{f}$: recta per $\mathfrak{d}$ et intersectionem erit perpendicularis ad $\mathfrak{AB}$. Nam $\mathfrak{ae} = \mathfrak{be}$, $\mathfrak{ad} = \mathfrak{bd}$, $\mathfrak{ed} = \mathfrak{ed}$; itaque triangulum $\mathfrak{ade} = \mathfrak{bde}$, et quidem ita, ut $\mathfrak{d}$ in se et $\mathfrak{e}$ in se manentibus, triangulum $\mathfrak{ade}$ verti possit, usquequo $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ cadat; tum vero et quodvis aliud punctum rectæ $\widetilde{\mathfrak{de}}$ adeoque et $\mathfrak{q}$ loco suo priore manet; consequenter $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}$, et $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ cadentibus, anguli ad $\mathfrak{q}$ manifesto æquales sunt. Pariter sunt triangula $\mathfrak{adf}$ et $\mathfrak{bdf}$ æqualia, et manentibus $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{f}$ (adeoque et $\mathfrak{q}$) superimponendo, $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}$, et $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ cadere potest. Rectam $\widetilde{\mathfrak{de}}$ per $\mathfrak{ab}$ transire inde patet, quod recta *e figurae cuiusvis puncto interno utrinque egredi, duoque ad minimum puncta communia cum figura habere debeat.* Etenim si centro $\mathfrak{k}$ radio

Hosted by Google

quamvis rectarum, quæ a f ad punctum aliquod figuræ est, excedente circulus fiat, recta ex f dicta in aliquam diametrorum cadet, quæ utrinque e circulo exit; adeoque radius e puncto figuræ interno f ad punctum extra figuram situm transit alicubi; pariter radius alter diametri eiusdem; in eodem figuræ puncto vero radius uterque transire nequit, quia tum recta rediret. Itaque et recta e puncto interno trianguli abd transit in duobus punctis; sed unum d est, alterum vero nec in da nec in db esse potest, quia tum duæ rectæ duo puncta haberent communia.

Patet etiam per df *angulum* adb, uti per ef *rectam* ab *bisecari.*

3. E quovis puncto f (Fig. 52.) sit recta fd: triangulum fad obtusangulum est; nam $z > R$ (pag. 59).

Acutangulum autem præbet etiam æquilaterum, quum statim probetur etiam angulos esse æquales, adeoque quemvis recto minorem. Sed inferius etiam nota rectarum e quibus triangulum construi potest relata, mox etiam nota e quibus dignosci queat, num triangulum rectangulum, obtusangulum vel acutangulum sit, exponetur.

§. 3.

Trianguli æquicruri et rectanguli primariæ quædam proprietates referendæ veniunt.

1. *Trianguli aequicruri anguli ad basim sunt aequales, et si anguli ad basim fuerint aequales, crura sunt aequalia, ac recta e vertice ad meditullium baseos ad hanc perpendicularis est.*

Prius patet (Fig. 53.): nam si ac = bc, congruet triangulum bca triangulo acb ad lævam, propter ac = bc, cb = ca, atque tertium latus tertio æquale (pag. 61). Consequenter c in c, b in a, a in b cadente, u' congruet cum u.

Alterum quoque patet (Fig. 54.) triangulo bda ipsi acb ita superimposito, ut b in a et a in b cadat; cadet enim propter adiacentes æquales (pag. 61) d in c, adeoque db in ca. Sed eodem modo potest triangulum

Hosted by Google

adb ipsi acb superponi, ita ut a in a et b in b cadat; atque tum erit ad = ac. Consequenter ac = bd = ad.

Tertium quoque ex (Fig. 55.) patet; nam si ad = db, ac = bc, et dc = dc, est triangulum adc = bdc.

2. *In triangulo rectangulo hypotenusa* ac *est maior catheto; imo et hypotenusa quaevis ulterior est maior* (Fig. 56.).

Est enimvero c extra circulum centro a radio ab scriptum, ita d extra circulum centro a radio ac factum cadit. Nam si c non extus caderet, esset aut in peripheria puncti b, aut intra eam; prius fieri nequit, nam tum pro bc′ = bc, et c′ in peripheriam eandem caderet, in qua adhuc duo puncta nempe b, c sunt (contra pag. 81); sed neque intra peripheriam cadere c potest, nam tum (pag. 62) e circulo in duobus saltem locis egrederetur, adeoque recta $\widetilde{bc}$ præter b adhuc haberet punctum commune, atque punctum rectæ $\widetilde{bc}$ ad eandem distantiam ad lævam pariter in peripheria radii ab esset, et recta circulum item in pluribus quam duobus punctis secaret.

Pariter patet d extra circulum centro a radio ac factum cadere: quum secus rectæ $\widetilde{bc}$ præter punctum c adhuc aliquod punctum rectæ $\widetilde{cd}$ supra ac, et ad lævam tertium ad distantiam a b eandem commune cum peripheria puncti c esset.

Hinc item *triangulorum rectangulorum aequalitas per catheti hypotenusaeque aequalitatem ponitur.* Si enim cathetus ipsi ab et hypotenusa ipsi ac æquales fuerint, superimponendo patet ex a hypotenusam in c cadere; omnes aliæ enim maiores minoresve sunt.

§. 4.

Hinc *summa laterum trianguli quorumvis duorum a et b est maior tertio.*

Nam aut anguli ad latus tertium ambo acuti erunt, aut alteruter rectus vel obtusus est. Si ambo acuti fuerint (Fig. 57.), perpendicularis *d* ad latus tertium e vertice opposito inter *a* et *b* cadit; atque tum $a > c$ et $b > c'$ (per præcedentia); itaque $a + b > c + c'$.

Hosted by Google

Si vero (Fig. 58.) $a' \perp c$, tum b solum quoque est $> c + c'$; tanto fortius $a' + b > c + c'$.

Item pro z obtuso u acutus est, cui perpendicularis e vertice obiecta cadit; adeoque b solum etiam maius latere tertio c' est, quia $b > c + c'$; et tanto fortius est $a + b > c'$.

Unde manifesto *triangulum nonnisi e talibus rectis construi potest*, quarum binarum quarumvis summa tertia recta maior est: atque ex omnibus talibus a, b, c construi potest, si ex una extremitate ipsius a radio b, et ex altera extremitate radio c circuli fiant; fiet enim (iuxta pag. 62) intersectio, e qua ad extrema ipsius a ductis rectis, triangulum petitum factum erit.

Sed patet etiam (Fig. 59.) e puncto trianguli interno rectis ad extrema baseos B ductis, *laterum extimorum summam esse summa internorum maiorem.*

Nam

$$a + d > b + c,$$

et

$$c + e > f;$$

adeoque

$$a + d + c + e > b + c + f;$$

unde

$$a + d + e > b + f.$$

At $U > u$, $V > v$; adeoque $U + V > u + v$.

§. 5.

Si hic (pag. 51) dictum legatur, erit in posterum semper summa omnium angulorum trianguli cuiusvis duobus rectis æqualis; atque producto latere quovis angulus externus summæ internorum oppositorum æqualis.

Hosted by Google

·2111211222.

Laterum angulorumque oppositorum dependentia mutua primario illa se offert, quod *lateri maiori angulus maior, et angulo maiori latus maius opponatur.*

Duorum laterum alterutrum aut recto vel obtuso opponitur, aut non. Quoad casum primum, si (Fig. 60.) latera sint hypotenusa a et cathetus c: est $a > c$, estque angulus ipsi a oppositus rectus R, adeoque maior quovis alio. Si obtusus sit, uti z: est quovis reliquorum maior, atque etiam $b > a'$, et $b > c + c'$ adeoque $b > c'$.

Quoad casum secundum autem demittatur e sectione duorum illorum laterum perpendicularis p ad tertium; cadet hæc utrique acuto u et v obiecta; sit $b > a$, cadet pro recta ad dextram ipsi c ad lævam æquali, b ulterius ad dextram; nam $a' = a$, et hypotenusarum ad dextram nonnisi ultra a' cadens ea maior est. Itaque fit $u > v$, nempe externus maior interno; sed huic u æqualis est alter ad lævam; adeoque uti $b > a$, est etiam $u > v$.

Conversa quoque patet: nam qualiavis fuerint u et v, si $u > v$, necessario et $b > a$; quia secus esset aut $b = a$ aut $a > b$, atque in casu priore esset $u = v$, in posteriore $v > u$.

Quæstio hinc suboritur, num duplo lateri duplus angulus obiiciatur &: facile patet dependentiam non talem quidem esse; sed ultro subvenit quærere, qualiter tamen angulus latusque oppositum a se mutuo dependeant; atque ista disquisitio originem *Trigonometriae* planæ dedit.

Supplementum numeri 211111.

Recta cum circulo nil commune habet, si perpendicularis e centro ad eam radio maior sit: nam quævis alia recta ad dictam e centro ducta est hypotenusa catheto maior (pag. 64).

Nec circulus cum circulo quidquam commune habet, si centrorum $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}$ distantia summam radiorum excedat: nam si punctum $\mathfrak{p}$ commune esset, hoc aut in recta $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{c}}$, aut extra eam esset; prius fieri nequit, nam

Hosted by Google

$\mathfrak{C}\mathfrak{c} >$ se ipso esset; nec posterius fieri potest, quia in triangulo $\mathfrak{C}\mathfrak{p}\mathfrak{c}$ $\mathfrak{C}\mathfrak{p} + \mathfrak{p}\mathfrak{c} > \mathfrak{C}\mathfrak{c}$ (contra hypothesim).

·21112113.

Sequuntur *quatuor rectae*: quarum si nullum par sit parallelum, quadrilaterum *trapezoides* dictum oritur.

Si duo paria parallela fuerint, quum sectio supposita sit, aliqua recta α paris unius secabit aliquam β paris alterius; atque tum parallela ad α quoque secabit tam ipsam β, quam eam quæ $\parallel \beta$ est; secus enim facile patet, rectam utrinque infinitam duarum rectarum se mutuo secantium utrique parallelam esse, atque tum summam internorum in parallelismo dari minorem duobus rectis. Oritur autem hoc pacto *parallelogrammum*, cuius species referuntur (in Tomo I. pag. 14).

§. 1.

Quodvis parallelogrammum per diagonalem in duo triangula aequalia dispescitur.

Nam (Fig. 61.) diagonalis latus commune est, et propter alternos v, v et u, u æquales, anguli adiacentes in uno triangulo adiacentibus in altero æquales sunt.

§. 2.

Utcunque fuerint ductae $\mathfrak{a}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ (Fig. 62.), *si centro* $\mathfrak{c}$ *radio* $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ *absecentur* $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{b}$ *aequalia*: $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{e}\mathfrak{d}$ *est rectangulum.*

Nam quodvis par triangulorum verticalium est æquale per angulum inter latera æqualia interceptum verticalem; hinc $\mathfrak{a}\mathfrak{d} \parallel \mathfrak{b}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \parallel \mathfrak{d}\mathfrak{e}$, nam alterni sunt æquales; itaque $4u + 4v = 4R$, quia quadrilateri omnium angulorum summa est summa angulorum omnium triangulorum, in quæ per diagonalem dispescitur, nempe $= 2.2R$. Itaque $u + v = R$, et omnes anguli $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}$ sunt æquales. Si angulus $\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d} = R$ tum $v + v = R$, $v = \frac{1}{2} R = u$, hinc $\mathfrak{a}\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, nam triangulum $\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ æquicrurum fit; est igitur $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{e}\mathfrak{d}$ *quadratum.*

Hosted by Google

Patet autem, punctum a ubivis in dimidia peripheria radii ac fuerit, ductis rectis prioribus ace, ad &, esse $u+v$ ad a item rectum; adeoque *angulus in semicirculo*, ut dici solet, nempe cuius vertex in peripheria est et crura per extremitates diametri eunt, *rectus est.*

Si vero acd rectus fuerit, atque cd = cb, et ca quoque = ce, sed ac non = cd, tum oritur *rhombus*; si acd non sit rectus, tum sub conditione dicta fiet *rhomboides.* Quadrati rhombique alia constructio e (Fig. 91*a*, *b*, *c*, *d*) patet.

§. 3.

Si ab || *et* = cd, *etiam* (Fig. 61.) ac || *et* = bd.

Nam triangulum abc = dcb, per duo latera cum angulo intercepto æqualia; itaque et alterni v et v sunt æquales, et ac || et = bd.

§. 4.

Intersectio c *duarum diagonalium* (Fig. 63.) *quamvis rectam per* c *ductam bisecat.*

Nam triangulum fcd = gcb; nam anguli ad d et b sunt alterni, ita ad f et g; cd vero = cb, quia triangulum dce = bca. Est etiam manifesto afgb = egfd.

·2111211322.

Si unum par parallelum per alterum non parallelum secetur, præter *trapezium* fiunt sequentia.

§. 1.

Sit (Fig. 64.) par parallelum c et C, par non parallelum A et B; posteriores se invicem secabunt, et formabuntur duo triangula abc et ABC sibi invicem æquiangula; nam angulus unus communis est, et angulus ac externus interno angulo AC opponitur, ita angulus bc ipsi angulo BC. Sit pro n, m integris, $a = nu$ et $A = mu + \omega$ pro $\omega = 0$ vel $< u$,

Hosted by Google

atque fiat a vertice incipiendo usque ad finem m-ti u, ab extremitate cuiusvis u, una parallela ad B et altera ad C. Facile patet ad a numero n, ad A numero m oriri hoc pacto triangula, quæ inter se æqualia sunt: nam unum latus u est in quovis, atque anguli adiacentes sunt æquales, nempe in quovis triangulo unus est internus externo oppositus, et alter externus interno oppositus. Patet quoque, quod si trianguli ad verticem latus ad dextram sit v et basis sit v', esse $a = nu$, $b = nv$, $c = nv'$, et $A = mu$ pro $\omega = 0$, atque $B = mv$, $C = mv'$, per parallelogrammorum ibidem exortorum latera opposita æqualia.

Quum vero

$$\omega < \frac{a}{n}, \ \lambda < \frac{b}{n} \quad \text{ac} \quad v' = \frac{c}{n};$$

crescenteque n in infinitum, manifesto $\omega \backsim 0$, $\lambda \backsim 0$, $v' \backsim 0$; sed etiam $\varkappa \backsim 0$, quia e fine ipsius $\varkappa$ ducta ad A parallela patet v' secari, adeoque $\varkappa < v'$. Consequenter typum proportionis applicari patet, essetque

$$A : a = B : b = C : c.$$

§. 2.

Hinc *si in duobus triangulis duo anguli sint duobus angulis aequales, latera prouti aequalibus angulis opponuntur sunt proportionalia.* Id est *per aequalitatem angulorum ponitur laterum proportio*, uti conversim *per laterum proportionem ponitur aequiangulitas triangulorum.* Sed ponitur præterea generaliter in triangulis laterum proportio simul cum angulorum illis oppositorum æqualitate, quod per *similitudinem* exprimi solet, *per duo latera* in iis *duobus proportionalia cum angulo intercepto aequali*; et pariter si latera unius sint a, b, c, et alterius A, B, C, ac singula utrinque in infinitum producta concipiantur, atque sive $a \parallel A$, $b \parallel B$, $c \parallel C$, sive a ad A, b ad B, c ad C perpendicularia sint, erunt

$$\wedge ab = \wedge AB, \ \wedge ac = \wedge AC, \text{ et } \wedge bc = \wedge BC;$$

adeoque triangula *similia. Quinque igitur hae conditiones similitudinis triangulorum*, nempe quarum quævis sufficit, exponendæ veniunt.

Hosted by Google

I. Nam quoad *primum*, sit (Fig. 65.)

$$\angle AB = \angle ab, \ \angle AC = \angle ac;$$

tum etiam tertius æqualis tertio.

Sit $a < A$; nam si $a = A$, patet, secus autem alterutrum est minus altero. Ponatur a super A, et angulus ab super angulum AB, sit y in fine ipsius a parallelum ad C; orietur $\triangle axy = \triangle abc$; nam angulus ad finem ipsius a erit externus interno angulo AC oppositus, qui est $= \angle ac$ *per hypothesim*; adeoque latus a cum duobus adiacentibus angulis in utroque triangulo sunt æqualia.

Itaque cum trianguli axy latera sint proportionalia lateribus maioris trianguli, sunt etiam trianguli abc latera iisdem proportionalia.

II. *Altera similitudinis* triangulorum *conditio generalis*, *nempe conversa prioris* est, si

$$A : a = B : b = C : c.$$

Fiet enim, parallela ad C ex fine ipsius a ducta,

$$A : a = B : x = C : y;$$

adeoque

$$x = \frac{aB}{A}$$

uti b; et

$$y = \frac{aC}{A}$$

uti c; itaque $x = b$, et $y = c$, atque $\triangle axy = \triangle abc$; est ergo et hoc uti illud eidem triangulo ABC æquiangulum.

III. *Tertia conditio similitudinis generalis* est, si (Fig. 65.)

$$A : a = B : b, \quad \text{ac} \quad \angle AB = \angle ab.$$

Ponatur nempe triangulum abc ita super ABC, ut a in A et angulus ab super angulum AB cadat, sitque $y \parallel C$; erit $A : a = B : x$.

Consequenter et hic ut in præcedentibus erit $x = b$; adeoque

Hosted by Google

$\triangle axy = \triangle abc$; et hoc quoque æquiangulum ipsi triangulo ABC, uti triangulo axy est.

Hinc autem *modus* oritur $\frac{n}{m}$-tum *rectae cuiusvis C geometrice exhibendi*, adeoque C per $\frac{n}{m}$ *geometrice multiplicandi*, aut per $\frac{m}{n}$ *dividendi*. Sit ex. gr. (Fig. 64.) $n = 2$, $m = 5$; ponatur ad initium ipsius C ad quemlibet angulum recta indefinita; item ab initio ipsius C ponantur in rectam dictam rectæ u qualesvis æquales se invicem excipientes numero m, atque inde, ubi desinunt, ponantur retrorsum numero n; erit parallela ad C e fine n-tæ partis, usque ad rectam e fine m-tæ partis (antrorsum) per extremitatem alteram ipsius C ductam, recta quæsita. Ex. gr. si $A = mu$, et $a = nu$, erit et $C = mv$, et $c = nv$, adeoque c recta quæsita est. Patet autem parallelam pro $n > m$ infra C cadere, et pro $n = 1$ esse $c = \frac{C}{m}$.

IV. *Quarta conditio generalis similitudinis* triangulorum. Sit (Fig. 67.) $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ ipsi C parallela; erunt anguli partim ob verticalitatem partim ob parallelismum illi, qui adscripti sunt; et erit in illo puncto sectionis rectarum commune germen quasi omnium triangulorum, quorum latus unum ipsi A, alterum ipsi B, tertium ipsi C parallelum est.

Nam $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ motu parallelo in quamvis rectam ipsi C parallelam pervenire potest, adeoque in c quoque; $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ in quamvis ipsi B parallelam, adeoque in b quoque; $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ in quamvis ipsi A parallelam, adeoque in a quoque. Si duæ rectæ sint duabus parallelæ, illarum angulus est æqualis angulo harum (pag. 53); itaque

$$\wedge ab = \wedge AB, \ \wedge ac = \wedge AC, \text{ et } \wedge bc = \wedge BC.$$

Sed A cum B facit angulum z et alterum deinceps $u + v$; A cum C facit u et alterum $v + z$; B cum C facit v et alterum $z + u$. Dicatur Z deinceps ipsius z, et V deinceps ipsius v, ac U deinceps ipsius u; certum est in triangulo abc esse angulum ab aut $= z$ aut $= Z$, ita angulum ac esse aut u aut U, et angulum bc esse aut v aut V; itaque sunt sex literæ, tres minusculæ tres maiusculæ nominis eiusdem

Hosted by Google

$$z,\ Z = u + v$$
$$v,\ V = z + u$$
$$u,\ U = z + v.$$

In triangulo duo deinceps esse nequeunt, adeoque litera parva et magna simul non accipiuntur: erunt itaque combinationes sequentes, z, v, u; Z, V, U; z, v, U; z, u, V; v, u, Z; Z, V, u; Z, U, v; V, U, z; quarum præter primam et illas, in quibus una tantum maior litera est, quævis summam angulorum trium dat duobus rectis maiorem; nam in triangulo ABC est $u + v + z = 2R$, et substituto valore cuiusvis literæ maioris ex. gr. $Z + V + u = u + v + z + u + u$ patet excedi $u + v + z$, adeoque duos rectos; sed si una tantum maior litera sit, ex. gr. $Z + u + v = u + v + u + v = 2u + 2v$, hoc potest esse $= 2R$, si $u + v = R = z$, adeoque z et Z duo deinceps æquales.

Itaque in triangulo abc angulus ab nonnisi $= z$, angulus ac nonnisi $= u$, et angulus bc nonnisi $= v$ esse potest.

V. *Quinta conditio similitudinis* triangulorum sequitur. (Fig. 68.). Sit

$$\mathfrak{ab} = a,\ \mathfrak{bc} = b,\ \mathfrak{ca} = c.$$

Quum in triangulo dentur duo acuti, sit u ad $\mathfrak{b}$ acutus; fiatque e lateris $\mathfrak{cb}$ puncto $\mathfrak{k}$ interno perpendicularis $\mathfrak{kh}$ ad $\mathfrak{ab}$, fiatque e puncto huius interno $\mathfrak{A}$ perpendicularis $\mathfrak{AI}$ ad $\mathfrak{ac}$, et $\mathfrak{Ar} \perp \mathfrak{cb}$; atque productis $\mathfrak{Ar}$, $\mathfrak{AI}$, $\mathfrak{cb}$, $\mathfrak{kh}$, moveatur perpendicularis $\mathfrak{Ar}$ super $\mathfrak{bc}$. In triangulo $\mathfrak{khb}$ est angulus $q < R$, gaudetque suo verticali q, adeoque propter summam internorum $< 2R$ fit triangulum $\mathfrak{eBk}$, in quo est $u' + q = R$, at in triangulo $\mathfrak{khb}$ quoque est $q + u = R$; itaque $u' = u$.

Est porro $v' + x = 2R$, sed in quadrilatero $\mathfrak{Iahr}$ est $v + x = 2R$; adeoque $v' + x = v + x$, et hinc $v' = v$. Est igitur $v' + u' < 2R$, quia $v + u < 2R$ est. Consequenter fit triangulum $\mathfrak{ABC}$, et in hoc tertius angulus $z' =$ tertio nempe z in triangulo $\mathfrak{abc}$.

Consideratis autem trianguli $\mathfrak{ABC}$ et $\mathfrak{abc}$ lateribus angulisque dictis, patet cuivis angulo unius ex. gr. a lateribus A, B facto esse illum alte-

Hosted by Google

rius trianguli æqualem, qui a talibus lateribus a, b efficitur, ut $a \perp A$, et $b \perp B$ sit pro $\mathfrak{AB} = A$, $\mathfrak{BC} = B$.

Applicetur iam præcedens: est (Fig. 69.) $\mathfrak{Ar} \parallel \mathfrak{BC}$, quia e figura præcedente sunt $\mathfrak{Ar}$ et $\mathfrak{Ce}$ ad idem $\mathfrak{be}$ perpendiculares; unde per angulos alternos verticalesque patet germen trianguli cuiusvis $a'b'c'$, cuius latus $a' \parallel A$, $b' \parallel B$, $c' \parallel C$, esse ad $\mathfrak{A}$, ut antea; adeoque omnia ibi dicta locum habere, quum quodvis A, quod perpendiculare ad $a = \mathfrak{ab}$ est, parallelum ad $\mathfrak{AB}$ sit, et quodvis B, quod perpendiculare ad $b = \mathfrak{bc}$ est, parallelum ad $\mathfrak{Aa}$ sit, ac quodvis C, quod perpendiculare ad $c = \mathfrak{ca}$ est, parallelum ad $\mathfrak{CA}$ sit.

§. 3.

Ex

$$A : a = B : b$$

autem (in §. 1. pag. 69) sequitur etiam

$$a : A - a = b : B - b\,;$$

nempe *segmenta crurum per rectam basi parallelam facta in proportione esse.*

Conversa quoque huius valet: nempe *si segmenta sint in proportione, recta secans parallela fit.*

Nam (Fig. 66.) si

$$a' : a = b' : b,$$

nec tamen $c \parallel C$, fiat parallela alia k supra vel infra c, et sit pro k ex. gr. segmentum x; erit

$$a' : a = b' + \omega : x,$$

et hinc

$$x = \frac{a}{a'}(b' + \omega)\,;$$

sed ex

$$a' : a = b' : b$$

est

$$b = \frac{a}{a'} \cdot b'\,;$$

unde $x > b$, nempe pars $>$ toto. Pariter patet, si parallela infra c cadat. Estque manifesto (Fig. 70.) ubivis accipiantur $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{i}$, quum $\alpha : \alpha = \beta : \beta$ sit, $\mathfrak{cm}$ recta per $\mathfrak{c}$ ad $\mathfrak{ab}$ *parallela.*

Hosted by Google

§. 4.

(Fig. 66.). *Si* $A : a = C : c$, *et una extremitas rectae* c *ad* C *parallelae sit in* A *ad extremitatem ipsius* a : *altera in* B *erit.*

Nam parallela c producta secat rectam B; fiat $c \pm \omega$ ex c; erit $A : a = C : c \pm \omega$, atque hinc $c \pm \omega = \frac{aC}{A}$; sed etiam $c = \frac{aC}{A}$ (per $A : a = C : c$ suppositum). Est ergo $c \pm \omega = c$, adeoque $\omega = 0$.

§. 5.

Si $A : a = B : b$, est etiam $A : B = a : b$; adeoque si $A = nu$ atque $B = mu$ pro n, m integris: est etiam $a = nv$ et $b = mv$. Hinc si A contineat n milliaria, atque B contineat m milliaria: et a continet n milliaria minuta, atque b continet m milliaria minuta, si nempe pars n-ta ipsius a dicatur *milliare minutum.*

Atque etiam si in triangulis ABC, abc, $A = n$ milliaribus, $B = m$ milliaribus, et $C = \mu$ milliaribus, atque $a = n$ pollicibus, $b = m$ pollicibus, $c = \mu$ pollicibus: patet esse

$$A : B = a : b, \text{ et } A : C = a : c;$$

adeoque

$$A : a = B : b, \text{ et } A : a = C : c;$$

consequenter tria latera tribus esse proportionalia; atque triangula ABC, abc esse similia.

Imo etiam si in triangulis ABC, abc fuerit

$$A : a = u : v,$$

(seu brevius unum latus uni proportionale, nempe uti u ad v), et angulus ipsi B oppositus æqualis erit angulo ipsi b opposito, atque angulus ipsi C oppositus æqualis angulo ipsi c opposito: tum etiam

$$B : b = u : v \quad \text{et} \quad C : c = u : v.$$

Nam tum est

$$A : a = B : b = C : c,$$

adeoque quia

$$A : a = u : v,$$

est etiam

$$B : b = u : v = C : c.$$

Hosted by Google

§. 6.

Si (Fig. 71.) e vertice trianguli rectanguli demittatur ad hypotenusam perpendicularis, orientur duo triangula α, β toti triangulo, adeoque sibi invicem similia; atque hinc *perpendicularis* dicta *est proportionalis media inter segmenta hypotenusae*, atque *cathetus quivis est proportionalis media inter hypotenusam et segmentum adiacens.*

Namque in toto triangulo et in triangulo α est u angulus communis, et $R = v' + u'$, itaque tertius æqualis tertio, nempe $v' = v$; pariter in β et toto triangulo est v communis, atque $R = v' + u'$, adeoque et $u' = u$. In triangulis α, β et toto ergo sunt in quovis anguli R, u, v; adeoque in quibusvis binis triangulis latera sunt, prouti angulis æqualibus opponuntur, proportionalia.

Nempe adsumantur prius anguli v, u in α, item v, u in β, tum v, R in α, et v, R in toto; fiet e priore

$$i : y = y : l,$$

atque e posteriore fit

$$i : K = K : h;$$

unde

$$y^2 = il \quad \text{et} \quad K^2 = ih,$$

consequenter

$$y = \sqrt{il} \quad \text{et} \quad K = \sqrt{ih}.$$

Si igitur ex. gr. i unitas rectarum ponatur, et iungatur l in directum; atque e meditullio ipsius $i + l$ radio $\frac{i+l}{2}$ semicirculus fiat, et e puncto rectarum i et l communi erigatur perpendicularis usque ad peripheriam: erit ductis inde ad diametri extremitates rectis angulus in semicirculo rectus (pag. 68), atque perpendicularis erecta radix quadrata ex l. Pariter patet, et si non $i = 1$, sed radix e facto ex i et l extrahenda fuerit, eam $= y$ esse. Idem etiam per cathetum fieri posse patet.

Unde etiam quum

$$K^2 = hi,$$

Hosted by Google

et

$$k^2 = hl = h(h-i) = h^2 - hi,$$

fit addendo

$$K^2 + k^2 = h^2;$$

atque hinc $k^2 = h^2 - K^2$, et

$$k = \sqrt{h^2 - K^2};$$

adeoque *quaecunque bina e cathetis hypotenusaque data fuerint, tertium innotescit.*

De secundis potentiis adhuc tantum sermo est, de areis quadratorum inferius dicetur.

Si vero (Fig. 72.) *u obtusus* fuerit, demissa perpendiculari d, erit

$$h^2 = d^2 + (K+x)^2 = d^2 + K^2 + 2Kx + x^2;$$

sed $k^2 = d^2 + x^2$; adeoque

$$h^2 = k^2 + K^2 + 2Kx.$$

Atque si *u acutus* fuerit: tum aut et v acutus erit, aut v rectus vel obtusus erit; si v acutus sit (Fig. 73.), tum perpendicularis y intus cadet, fietque

$$y^2 = k^2 - x^2,$$

item

$$y^2 = h^2 - (K-x)^2,$$

atque hinc

$$k^2 = h^2 - K^2 + 2Kx,$$

adeoque

$$h^2 = k^2 + K^2 - 2Kx.$$

Si vero v obtusus esset: tum per præcedentia esset (Fig. 74.) $k^2 = h^2 + K^2 + 2Kz$, adeoque $h^2 = k^2 - K^2 - 2Kz$. Pro v recto fit $z = 0$.

E quo manifestum est:

a) quod si $h^2 = k^2 + K^2$, *angulum ipsi h oppositum nec obtusum nec acutum, sed rectum esse.*

b) e lateribus dignosci, num triangulum rectangulum, acutangulum vel obtusangulum fuerit, et cuivis lateri qualis angulus opponatur.

c) (Fig. 73.). Ex $k^2 = h^2 - K^2 + 2Kx$ prodit

$$x = \frac{k^2 + K^2 - h^2}{2K},$$

Hosted by Google

ubi k et K intercipiunt angulum u, h vero ei opponitur, atque recta ab extremitate ipsius x ad apicem est perpendicularis ad K.

§. 7.

Sed etiam si $A = 1$ fuerit, (Fig. 75.) eiusque extremitas cum extremitate factoris dati B, in alterum crus positi, recta iungatur; atque huic rectæ per finem factoris alterius quoque dati a, in crus ubi A est, ab apice positi, parallela fiat: erit b *factum e factoribus* B et a; quia

$$A : a = B : b, \quad \text{seu} \quad A : B = a : b.$$

Si vero facto dato b et alterutro factore B, huius socius quæratur: unitatis A et factoris dati B extremitatibus recta iunctis, ab extremitate ipsius b, ex apice ad crus in quo B est translati, huic rectæ parallela fiat: erit recta in crure, in quo A est, ab apice usque ad parallelam factor socius, nempe *quotus* a ex b diviso per B.

Patet autem tam in multiplicatione quam in divisione angulum rectarum A, B arbitrarium esse.

Idem pluribus quoque modis fieri posse e dictis liquet.

·21112114.

Plures rectae numero quovis.

De *parallelismo generali* præter in pag. 19 dicta plura referre, uti et subdivisioni figuræ rectilineæ in triangula immorari brevitas necessaria vetat: quamvis non solum partem plani a figura quavis rectilinea, sed etiam a duabus figuris rectilineis, ex. gr. a duobus polygonis, clausam in triangula dispesci posse demonstrari debeat, possitque.

·2111211422.

Si quævis figura rectilinea $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ . . . (Fig. 76.) fuerit in triangula subdivisa; atque e puncto $\mathfrak{k}$ extra eam sito, quamvis proprie ubivis in spatio

Hosted by Google

accipi queat, ad omnes angulorum apices rectæ cogitentur; et quavis harum per quantitatem eandem α multiplicata, factum in eadem recta e puncto $\mathfrak{k}$ incipiendo accipiatur; nempe $\alpha . \mathfrak{kA} = \mathfrak{ka}$ in $\mathfrak{k}\widetilde{\mathfrak{A}}$, $\alpha . \mathfrak{kB} = \mathfrak{kb}$ in $\mathfrak{k}\widetilde{\mathfrak{B}}$ &; atque fiant rectæ $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$ . . .; imo si a litera magna ad aliam fuerit recta in $\mathfrak{ABC}$ . . ., fiat et inter literas minores nominis eiusdem: erit $\mathfrak{abc}$ . . . *figura* ipsi $\mathfrak{ABC}$ . . . *similis per definitionem* (pag. 10), uti singula triangula sibi invicem respondentia; et simul latera duarum figurarum, uti se invicem excipiunt, in eadem proportione, angulique laterum correspondentium æquales erunt; imo quævis puncta $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ fuerint, recta $\mathfrak{pq} = \alpha . \mathfrak{PQ}$ erit.

Et *conversim* figura quævis $\mathfrak{abc}$ . . ., cuius latera, uti se invicem excipiunt, proportionalia lateribus ipsius $\mathfrak{ABC}$ . . ., angulique æquales eo ordine sunt, hoc pacto generari potest; imo si $\mathfrak{ab} = \alpha . \mathfrak{AB}$, *quaevis figura, cuius latera modo dicto proportionalia angulique aequales sunt, dictae* $\mathfrak{abc}$ *congruit.*

Nam

I. Etsi ad omnia puncta figuræ *iuxta definitionem* rectæ concipiantur, idem prodibit. Quodvis punctum $\mathfrak{P}$ enim concipiatur ex. gr. in recta $\mathfrak{AB}$, punctum illi homologum $\mathfrak{p}$ prodibit in recta $\mathfrak{ab}$; est enim tum

$$\alpha . \mathfrak{kA} = \mathfrak{ka}, \ \alpha . \mathfrak{kB} = \mathfrak{kb}, \ \alpha . \mathfrak{kP} = \mathfrak{kp};$$

itaque

$$\mathfrak{kA} : \mathfrak{ka} = 1 : \alpha = \mathfrak{kB} : \mathfrak{kb} = \mathfrak{kP} : \mathfrak{kp};$$

sunt igitur crura $\mathfrak{ka}$, $\mathfrak{kb}$, $\mathfrak{kp}$ ipsi $\mathfrak{kA}$, $\mathfrak{kB}$, $\mathfrak{kP}$ proportionalia cum angulis interceptis communibus; est ergo et $\mathfrak{ab}$ ipsi $\mathfrak{AB}$, ita $\mathfrak{ap}$ ipsi $\mathfrak{AP}$ proportionale; adeoque $\mathfrak{ab} \parallel \mathfrak{AB}$ et $\mathfrak{ap} \parallel \mathfrak{AP}$; per $\mathfrak{a}$ autem ipsi $\mathfrak{AB}$ unica parallela datur; itaque $\mathfrak{p}$ punctum rectæ $\mathfrak{ab}$ est.

II. Quodvis latus $\mathfrak{AE}$ ipsi $\mathfrak{ae}$ homologum in eadem proportione est uti $\mathfrak{AB}$ ad $\mathfrak{ab}$: nam

$$\mathfrak{kE} : \mathfrak{ke} = 1 : \alpha = \mathfrak{kA} : \mathfrak{ka};$$

est vero angulus inter crura $\mathfrak{kA}$, $\mathfrak{kE}$ cruribus $\mathfrak{ka}$, $\mathfrak{ke}$ proportionalia communis; quapropter et $\mathfrak{AE}$ ipsi $\mathfrak{ae}$ proportionale est.

Hosted by Google

Sed anguli etiam homologi æquales sunt: nempe ex. gr. quivis anguli $\mathfrak{AED}$ et $\mathfrak{aed}$ considerentur, concipiantur triangula $\mathfrak{ADE}$ et $\mathfrak{ade}$; est

$$\mathfrak{AD} : \mathfrak{ad} = \mathfrak{AE} : \mathfrak{ae} = \mathfrak{DE} : \mathfrak{de};$$

itaque et anguli respondentes æquales (pag. 70), adeoque

$$\angle \mathfrak{AED} = \mathfrak{aed},$$

atque si angulus convexus sit, et convexus convexo æqualis est. Pariter de angulis $\mathfrak{ABC}$ et $\mathfrak{abc}$ patet.

III. Sint etiam quibusvis punctis $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ homologa $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$; erit recta $\mathfrak{PQ}$ ipsi $\mathfrak{pq}$ homologa, eique proportionalis. Nam

$$\mathfrak{kP} : \mathfrak{kp} = \mathfrak{kQ} : \mathfrak{kq} = \mathfrak{AB} : \mathfrak{ab},$$

atque quodvis punctum rectæ $\mathfrak{PQ}$ fuerit, illi homologum, ut antea, in $\mathfrak{pq}$ cadit.

IV. Quævis figura rectilinea $\mathfrak{abc}\ldots$ fuerit talis, ut latera, uti se invicem excipiunt, proportionalia angulique æquales sint: illa modo dicto generari potest. Sit enim $\mathfrak{ab} = \alpha . \mathfrak{AB}$ &c.; talem prodire patet. Et quævis alia $\mathfrak{a}'\ \mathfrak{b}'\ \mathfrak{c}'\ldots$ fuerit, cuius latera ad latera literis maioribus denotata sint uti α ad 1, angulique inter crura proportionalia æquales: figuræ dictæ congruere potest. Nam posito $\mathfrak{a}'\ \mathfrak{b}'$ in $\mathfrak{ab}$, ita ut $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}'$ in $\mathfrak{b}$ cadat, vertendo in eandem plagam, propter angulos ad $\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{a}$ ac $\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{b}$ æquales et latera æqualia &c..., manifesto congruent.

Patet vero superius α etiam negative accipi posse, ut omnia facta ultra $\mathfrak{k}$ in altera plaga accipiantur.

Scholion. Notandum autem est, hic iam ut theorema demonstrari posse elegantem *Wolfii* observationem, quam pro definitione rectæ haberi voluit: quod nempe omnium formarum sola recta utrinque finita sit, cui quævis pars continua similis sit; sed huic quoque brevitas necessaria supersedere iubet.

Hosted by Google

2111212.

Rectae cum circulo minima sectio punctum est, maxima e duobus punctis constat.

§. 1.

(Fig. 77.). Sit ab recta inter duo puncta peripheriæ, et m sit medium arcus ab, ac c sit centrum; superponatur forma ex arcu am et rectis ac, cm composita ipsi mcb; patet rectæ mc quodvis punctum in suo loco manere, et dictas formas congruere, adeoque oa super ob cadente, angulos ad o esse æquales, adeoque rectos.

Hinc perpendicularis *e medio chordae per centrum transit, atque medium arcus medium chordae et centrum sunt in recta eadem ad chordam e centro perpendiculari.*

§. 2.

(Fig. 78.). Modus hinc se offert, datis quibusvis tribus punctis a, b, d non in recta sitis, centrum c reperire, e quo radio ca scripti circuli peripheria per a, b, d eat. Nempe si ab, bd modo (pag. 63) bisecentur, perpendicularis e meditullio f rectæ ab perpendicularem e meditullio i rectæ bd secabit: nam recta fi cum quavis perpendicularium dictarum efficiet angulum $< R$, adeoque summa internorum est $< 2R$. Sit c sectio perpendicularium; erit

$$\triangle afc = bfc, \quad \text{adeoque} \quad ac = bc,$$

ita

$$\triangle bic = dic, \quad \text{adeoque} \quad bc = dc;$$

consequenter

$$ac = bc = cd.$$

Unde etiam pari modo arcus cuiusvis, quum in eo tria puncta quævis accipere liceat, neque in recta sint, centrum reperire licet. Nempe

Hosted by Google

§. 3.

Recta circulum in tribus punctis secare nequit. Nam tum duæ chordæ essent eiusdem rectæ partes, et centrum circuli esset in perpendiculari ex utriusque medio erecta; adeoque duæ perpendiculares de eadem recta secarent se.

§. 4.

(Fig. 77.). Patet etiam chordam totam præter extrema intra circulum cadere. Nam pars arcus nequit intra cadere, pars extra; quia tum haberet recta $\widehat{ab}$ cum circulo adhuc punctum commune, ubi ex a motum in peripheria punctum ex una plaga in alteram transiret eundo usque ad b; neque in eandem plagam cadere queunt duo arcus; nam tum esset $cf = ca$ (contra pag. 64).

§. 5.

(Fig. 79.). *Sectio minima rectae cum circulo est punctum.* Nam si bf faciat cum radio bc rectum, b erit punctum contactus rectæ et circuli centro c scripti, nec ullum aliud punctum recta bf quamvis infinita in eodem circulo habet. Nam si haberet ad dextram, item ad lævam esset; itaque duobus punctis fieret sectio maior. Vocatur bf tangens.

Est vero etiam conversim tangens ad radium perpendicularis; nam nisi id sit, sit bd alia tangens, hæc faciet ab aliqua parte angulum acutum cum radio; perpendicularis co ex c ad bd acuto angulo obiecta cadit, adeoque hypotenusa bc semper decrescit usque ad o; itaque quævis recta inter b et o ad c ducta est radio minor; adeoque bo intra peripheriam cadit, et quum continuata egrediatur, tangens non est.

Quamvis autem e quovis puncto arcus bd possit ad tangentem bf demitti perpendicularis, nulla tamen recta ex b inter arcum bd et tangentem bf duci potest. Nam quævis recta bd ducatur inter bc et bf, angulus rectus illico decrescet, et demonstratione præcedente applicata, patet punctum ex b in recta illa viam infra peripheriam incipere, ut per arcum obiectum transeat.

Hosted by Google

·2III2I22.
Plures rectae circulum secantes;

·2III2I22I.
Se invicem quoque secantes;

·2III22II.
In eodem puncto;

·2III2I22III.
In peripheria.

I. Considerentur prius *duae tantum.*

§. 1.

Si prius *alterutra* duarum *tangens* circuli sit: *est anguli v, quem tangens cum chorda facit, quantitas dimidio arcus a chorda subtensi aequalis.*

Nam (Fig. 80.) si chorda per centrum transit, tum v est rectus, et arcus tunc subtensi dimidium est quadrans. Alioquin autem fiat per centrum chorda parallela; perpendicularis e medio chordæ datæ per centrum transit: eritque $u+v$ ad centrum $=R$; sed alterni u et u sunt æquales, atque $u+v$ angulus tangentis cum radio est $=R$; itaque angulus v ad centrum $=v$ illi, quem tangens cum chorda facit; prioris v quantitas $=$ dimidio arcus subtensi; adeoque etiam posterioris v quantitas eadem est.

Idem patet de angulo deinceps $u+R$; nempe $v+u+R$ est totius circuli dimidium; itaque subtracto v, et dimidio arcus a chorda subtensi, manebit $u+R=$ arcus a chorda ab altera parte subtensi dimidio.

§. 2.

Hinc si *duae chordae a, b* se invicem in peripheriæ puncto $\mathfrak{k}$ secent (Fig. 81.), orietur *u angulus ad peripheriam.* Fiat tangens ad punctum $\mathfrak{k}$.

Hosted by Google

Est $u+v+z=$ totius peripheriæ dimidio, $v+z=$ dimidiæ summæ arcuum subtensorum; manet itaque pro u *dimidium arcus illius cui insistit.*

Et hinc patet (uti pag. 68) angulum v (Fig. 82.) *in semicirculo esse rectum*; et quadrilateri abcd circulo inscripti angulos oppositos simul duos rectos efficere; nempe $p+q$, ita $v+x=$ dimidio peripheriæ totius.

Sunt etiam arcus α, β per chordas parallelas absecti æquales propter alternos u et u, simul angulos ad peripheriam, æquales. Ita si tangens chordæ parallela fuerit, sunt alterni z et z æquales; quorum unius quantitas $\frac{\gamma}{2}$ est, alter autem (pag. 82) $=\frac{\delta}{2}$ est.

II. Si *plures* rectæ secuerint se invicem in eodem peripheriæ puncto (Fig. 83.): est

$$r+r>b+b';$$

id est diameter est chordarum maxima. Porro

$$a+b'>r \text{ et } r=a+a',$$

atque hinc

$$b'>a';$$

sed

$$a'+b>c;$$

itaque

$$b'+b>c.$$

Decrescente igitur arcu infra semicirculum, chorda quoque decrescit, ac maiori arcui chorda maior, maiorique chordae arcus maior respondet.

·2111212211 2.

De sectione intra peripheriam in eodem puncto.

I. *Prius duarum rectarum* (Fig. 84.).

1. *Quantitas anguli u aequalis est* $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

Nam ducta parallela, fit $u'=u$; est vero

$$u'=\frac{1}{2}(\alpha'+\beta), \text{ atque } \alpha=\alpha'.$$

Hosted by Google

Consequenter

$$u = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

2. Triangula ibidem verticalia sunt similia, quia anguli ad peripheriam iisdem arcubus insistunt. Hinc $a : b = b' : a'$, atque

$$aa' = bb';$$

nempe *facta segmentorum sunt aequalia.*

II. *Si duabus rectis plures secuerint se invicem intra peripheriam* (Fig. 85.), sitque sectio extra centrum c: rectarum inde usque ad peripheriam *minima* p, *maxima* $s + r$ est; atque rectæ dictæ a p crescunt semper porro usque ad $s + r$.

Nam

$$s + a > k + k' \text{ et } k + k' = s + p;$$

hinc

$$a > p.$$

Porro

$$b + k' > a;$$

sed

$$b' + k > r, \quad r = k + k';$$

hinc

$$b' > k';$$

itaque in $b + k' > a$ substituendo b' ipsi k', fiet

$$b + b' > a.$$

Item

$$s + r > b + b'.$$

·21112122113.

De sectione extra peripheriam.

I. *Duarum rectarum* (Fig. 86.).

1. Est, parallela ducta, externus $u' = u$ interno opposito; adeoque etiam anguli quantitas eadem est, nempe $\frac{\beta - \alpha'}{2}$; sed $\alpha = \alpha'$ (pag. 83);

Hosted by Google

itaque

$$u = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

2. *Est*

$$A : B = b : a.$$

Nam $x + y = 2R$, sed $y + v$ quoque $= 2R$, nam sunt duo anguli ad peripheriam, ambo toti insistentes circulo: adeoque $x = v$; u vero est communis duobus triangulis; itaque proportione instituta patet esse etiam

$$Aa = Bb.$$

II. Si *duabus plures* secuerint se invicem (Fig. 87.): ag minima, af maxima est; illa crescit usque ad tangentem ab, hæc decrescit eousque.

Nam

$$ac + ce = af > ae;$$
$$ck + ke > ce = ck + kd,$$

hinc

$$ke > kd;$$

sed

$$dk + ka > da,$$

itaque

$$ek + ka > da.$$

Idem pro tangente, si k′ pro k et b pro d ponatur, applicari patet.

Demum

$$ah + hc < ai + ic$$

(pag. 65), sed

$$ic = hc;$$

itaque

$$ah < ai.$$

Ita

$$ag + gc < ah + hc,$$

adeoque

$$ag < ah.$$

2111212212.

In ·2111212212 usque ad ·211121222 (numerum posteriorem, ipsum iam pag. 82 relatum, excludendo) figuræ rectilineæ continentur, quarum

Hosted by Google

aut apices omnes in peripheria sunt, aut latera omnia eam tangunt. In casu priore *rectilineum* circulo *inscriptum*, *circulus* autem *rectilineo circumscriptus*; in posteriore autem *circulus rectilineo inscriptus*, et *rectilineum circulo circumscriptum* dicuntur.

De quovis rectilineo P itaque quatuor quæstiones oriuntur:

1) circa P circulum scribere,
2) circulo ipsi P æquiangulum inscribere,
3) ipsi P circulum inscribere,
4) circulo ipsi P æquiangulum circumscribere.

§. 1.

Sit prius exemplo triangulum. Circa triangulum quodvis scribi circulus (pag. 80) potest; atque si radii per apices producantur, quivis circulus centri eiusdem in tribus punctis secabitur, quæ si rectis iungantur, orietur triangulum priori æquiangulum; sunt enim latera lateribus parallela, quia crura e centro sunt ut radius ad radium.

Si trianguli $\mathfrak{abc}$ (Fig. 88.) anguli u, v bifariam divisi sint: patet summam internorum $u'+v'$ sectionem parere, e qua ad latera missæ perpendiculares sunt æquales. Formantur enim triangula $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ per latus unum commune, et angulos u' et R in α et α', ac v' et R in β et β'. Si circulus centro $\mathfrak{p}$ radio $\mathfrak{pq}$ fiat: erit quodvis latus tangens; atque *triangulo dato circulus inscriptus.*

Si vero perpendiculares producantur: per puncta peripheriæ cuiusvis, cuius centrum $\mathfrak{p}$ est, in quibus perpendiculares priores eam secant, tangentes ductæ efformabunt $\triangle\mathfrak{ABC}$ ipsi $\mathfrak{abc}$ æquiangulum (pag. 71); atque hoc pacto *dato circulo* triangulum dato triangulo *aequiangulum circumscriptum erit.*

§. 2.

Si arcus α sit $=\frac{p}{n}$, denotante p peripheriam, n integrum; atque ducatur chorda cuiusvis arcus α, uti se invicem in p excipiunt: oritur *polygonum regulare* n laterum; erunt nempe latera chordæ arcuum

Hosted by Google

æqualium, et anguli quoque æquales, utpote quivis est angulus ad peripheriam arcui $p - 2\alpha$ insistens.

Sunt etiam manifesto æqualia quævis triangula per radios ad cuiusvis lateris extrema ductos generata, per tria latera tribus æqualia; suntque triangula eiusmodi tot, quot latera, et quum duo latera sint in quovis æqualia, quodvis æquicrurum est, et angulus quilibet ad basim est dimidio anguli polygoni æqualis.

§. 3.

Conversim quoque *si figurae rectilineae* abcde *latera aequalia, angulique aequales fuerint: apices omnes in eadem peripheria sunt.*

Nam (Fig. 89.) perpendiculares e meditulliis f, g laterum ab et bc secant se invicem, quia ad rectam fg summa internorum est $< 2R$; fiat in p. Erunt triangula afp et bfp æqualia, propter duo latera cum recto intercepto æqualia; adeoque in triangulo apb anguli u ad basim sunt æquales. Est quoque $\triangle$ pfb = pgb, propter hypotenusam cathetosque æqualia (pag. 64); adeoque et angulus pbg = u = dimidio anguli polygoni; $\triangle$ pbg vero = pcg, ita uti $\triangle$ afp = bfp erat. Erit igitur angulus pcd = u; demissaque perpendiculari ph, est $\triangle$ pgc = pch, per pc commune et angulos æquales; atque hinc

$$ch = cg = hd;$$

est igitur $\triangle$ pch = pdh, per ph commune, ch = hd, et rectum interceptum. Quod continuando patet esse

$$ap = bp = cp = dp \text{ \&c.}$$

§. 4.

Sunt etiam e præcedentibus perpendiculares pf, pg, . . . æquales; adeoque centro p radio pf circulus polygono inscriptus erit, uti prior circumscriptus.

Si vero ut supra de triangulo dictum est, tam perpendiculares quam

Hosted by Google

radii ad apices producantur: quivis circulus centri p fuerit, ubi a perpendicularibus secabitur peripheria, tangentibus ductis, polygonum regulare totidem laterum circumscriptum erit; et si radiorum sectiones iungantur, circulo inscriptum erit; nempe quævis duæ rectæ duabus parallelæ angulos æquales facient, omniaque circumcirca æqualiter generantur.

§. 5.

Si arcus lateris sexta pars peripheriæ sit, chorda erit = radio, nam tum angulus ad centrum est $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, adeoque duo anguli ad basim trianguli æquicruri sunt $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, adeoque unus $= 60^\circ$, et triangulum æquilaterum est.

§. 6.

Angulus polygoni n laterum aequalis est $\frac{(2n-4)R}{n}$.

Nam e centro ductis ad apices angulorum rectis triangula numero n prodibunt, quorum omnium angulorum summa $= 2nR$; unde subtracta summa angulorum ad centrum, residuum est $(2n-4)R$, quod cum n anguli sint, dividi per n debet.

Patet etiam quemvis externum, latere in eandem plagam respectu antecedentis producto, esse eidem q æqualem. Itaque quum hoc pacto q numero n prodeat, et quodvis q sit $= 2R -$ angulo polygoni

$$= 2R - \frac{(2n-4)R}{n},$$

erit

$$nq = 2nR - \frac{n(2n-4)R}{n} = 2nR - 2nR + 4R = 4R.$$

·211121222.

De rectis circulum secantibus parallelis dictum (pag. 83) *est.*

·2111213.

De circulis se invicem secantibus.

I. 1. *Prius de sectione duorum circulorum*: sectio minima est punc-

Hosted by Google

tum, maxima duo punctorum est. Duos circulos in tribus punctis secare se invicem non posse vel inde patet, quod tum duæ chordæ essent utrique circulo communes, e quarum mediis erectæ perpendiculares centrum utriusque idem determinarent; adeoque aut toti coinciderent, aut nullum punctum haberent peripheriæ utrique commune.

2. Si circuli unum tantum punctum habeant commune, dicuntur *tangere* se invicem, et quidem is *intus tangere*, qui præter punctum tactus totus intra alterum est, et circulus alterum tangens, qui non intra hunc cadit, *extus tangere* dicitur; adeoque duo circuli possunt se invicem *extus* aut *intus tangere*: nempe

Centris $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$ in perpendiculari ad $\mathfrak{ab}$ (Fig. 90.) acceptis, radiorum extremitate altera $\mathfrak{a}$ scriptos circulos se ita tangere patet: quia si præter punctum $\mathfrak{a}$ adhuc haberent commune, ex. gr. ad lævam respectu $\mathfrak{Cc}$, id etiam ad dextram fieret; adeoque duo circuli duobus punctis plura haberent communia.

3. *Sunt* vero *centra circulorum se contingentium et punctum tactus in recta eadem.*

Nam si circulus ab altero intus tangatur: eadem in puncto $\mathfrak{a}$ utriusque tangens erit. Nam sit $\mathfrak{ab}$ tangens interioris; nisi eadem esset etiam exterioris, sit $\mathfrak{ap}$; hæc secabit interiorem adeoque tum etiam exteriorem: itaque tangens huius esse nequit. Si vero $\mathfrak{ab}$ tangens communis est, tum perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ per $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$ transiens unica est.

Si duo circuli se invicem extus tangant (Fig. 90.), tum nisi $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}$ in recta sint, sit $\mathfrak{cdC}$ recta: erit $\mathfrak{Ca}+\mathfrak{ca}>\mathfrak{cdC}$; nempe summa duorum radiorum addita aliqua recta esset summa duorum radiorum minor. Unde patet, a duobus ad tres, inde ad quatuor & progrediendo, omnium quotquot fuerint, se invicem in eodem puncto (sive extus sive intus) contingentes: centra cum puncto tactus in recta eadem esse.

4. Forma per sectionem minimam generata est duplex, prouti intus aut extus se tangunt: sed (Fig. 91.) forma per maximam sectionem generata constat e duabus lunulis et intermedia fenestra, ad quarum communem chordam e meditullio huius erecta perpendicularis per centra amborum circulorum transit.

Hosted by Google

Aequalitatem per unum angulum in qualibet duorum circulorum sectione determinatam esse patet. Nam tunc ex utroque congruit portio, et tria puncta determinant circulum.

II. *Si circulus A duos circulos B et C secet*: aut tanget utrumque, aut unum *B* solum tanget, aut neutrum.

In casu primo (Fig. 92., 93., 94., . . .) aut intus aut extus cadet uterque ab *A* tactus; aut unus extus alter intus. In quolibet horum casuum aut habebunt hi duo aliquid commune, aut non: si ita, id aut punctum erit, aut duo; si punctum solum fuerit, hoc aut in *A* cadet, quo pacto sectio omnibus commune punctum erit, aut non in *A* cadet. Si *B* extus, *C* intus cadat, tum casus unus tantum est, ut *C* et *B* aliquid commune habeant, nempe sectio unius puncti. In casu secundo ubi *A* nonnisi ipsum *B* tangit, habet tamen cum *C* aliquid commune, secabit ipsum *C* in duobus punctis; tum vero *B* et *C* aut habebunt aliquid commune, aut non; si ita, erit id aut punctum, aut duo.

In casu tertio *A* neutrum ipsorum *B*, *C* tangens habere cum quovis ipsorum *B* et *C* communia duo puncta debet; et *B* et *C* aut habebunt aliquid commune aut non; si ita, id erit aut unum aut duo puncta; et hæc aut ambo erunt eadem cum iis, quæ *A* cum *B* et *C* habet communia, aut unum tantum, aut neutrum.

Facile patet omnes hos casus, quorum aliquot conincidunt, pervestigando, sectionem esse minimam 1 puncti, 6 punctorum maximam, et dari sectiones 1, 2, 3, 4, 5, 6 punctorum, atque formas varias, et angulos infra in duas species distinguendos generari.

Ob facilitatem immorari cum necesse non sit, exempli caussa casum unum casus primi attulisse sufficiat; nempe casum sectionis trium punctorum, in quo quilibet bini ipsorum *A*, *B*, *C* tangent se invicem, at non in eodem puncto.

Fieri hoc nonnisi *B* et *C* utroque extus aut utroque intus *A* cadente patet.

Hosted by Google

§. 1.

Si C et B extus cadant (Fig. 93.), sit a radius ipsius A, et in continuatione eius accipiatur punctum illud, ubi (quantavis fuerint b, c) rectæ $a+b$ et $b+c$ circa extrema rectæ $a+c$ motæ occurrunt; quod fieri patet, cum quorumvis duorum laterum summa excedat tertium.

Tum si e tribus verticibus trianguli tanquam centris circuli fiant radiis a, b, c, nempe radiis circulorum A, B, C: patet e quantislibet a, b, c triangulum tale generari, quale oritur in schemate e tribus arcubus, cuius vertices sunt puncta tactus externi.

§. 2.

Si B et C intus cadant (Fig. 94.), sit $\mathfrak{a}$ centrum ipsius A, et $\mathfrak{b}$ centrum ipsius B, et $\mathfrak{c}$ centrum ipsius C. Sit r radius ipsius C, ac radius ipsius A sit $r+u$; et radius ipsius B sit β; pro quovis β, dummodo $<u$ sit, reperietur $\mathfrak{b}$ ibi, ubi $r+\beta$ circa $\mathfrak{c}$, et $u+r-\beta$ circa $\mathfrak{a}$ mota occurrent.

Si occurrant, res patet. Nam tum

$$\mathfrak{bi}=\beta,$$

quia

$$\mathfrak{ai}=r+u \quad \text{et} \quad \mathfrak{ba}=u+r-\beta;$$

itaque $\mathfrak{i}$ est punctum tactus ipsorum B et A, quia $\mathfrak{i}$ in recta per amborum centra est; ita recta $\beta+r$ ex $\mathfrak{b}$ ad $\mathfrak{c}$ transit per $\mathfrak{c}$ et tactum ipsorum B et C.

Datur vero $\mathfrak{b}$ pro quolibet β quod $<u$.

Nam tum latera $\beta+r$ et u ac $u+r-\beta$ talia sunt, ut quorumlibet binorum summa tertio maior sit; de reliquis patet pro quovis β; at postremorum summa priore tunc tantum est maior, si $\beta<u$ sit. Nam summa hæc est $2u+r-\beta$, quod debet esse $>\beta+r$; subtracto utrinque r, manet $2u-\beta>\beta$; adeoque pro $\beta=u\mp\omega$, est

$$2u-(u\mp\omega)=2u-\beta=u\mp\omega;$$

et manifesto $u\mp\omega$ est $<u\mp\omega$, et $u\mp\omega>u\mp\omega$.

Hosted by Google

§. 3.

(Fig. 95.). Sit quantusvis angulus bac, et ba = ac; et sit chordæ bc meditullium d, fiantque centro b radio bd = bg, centro c radio cd, et centro a radio ag = ah circuli; fiet triangulum ghd, ubi arcus gd, utvis mutetur angulus a, manet = dh; nimirum in triangulo æquicruro abc sunt ad basim.

Porro arcus gd ∽ R, si ∧a ∽ o; et gd ∽ o, si ∧a ∽ $2R$; arcus Ed vero ∽ R in casu primo, et in altero ∽ $2R$. Radius ga autem in casu primo ∽ ba, b ipsi f quam proxime eunte; in altero vero ga ∽ o, b ipsi f, et d ipsi a quam proxime euntibus.

§. 4.

Plurium circulorum sectionibus prætermissis unum tantum attigisse sufficiat (Fig. 96.).

Si bc sit latus figuræ regularis, cuius vertices sunt in peripheria radii ab: patet per dicta generari e verticibus tanquam centris, dimidio latere pro radio accepto, circulos æquales coronam claudentes, quorum quivis quemlibet inter quos est tangit, uti in schemate.

De formis etiam in casibus dictis notasse sufficiat:

1. Figuras ibidem oriri, quæ duobus lateribus concavis, aut duobus lateribus convexis spatium claudunt.

2. Oriri triangula *circularia*, de quibus statim dicetur.

3. *Angulum*, sub quo occurrere arcus arcui potest, in duas species distingui posse: nempe in *convexum*, scilicet cuius crura possunt circa verticem in talem situm moveri, ut recta quædam per verticem ducta sit chorda utriusque, arcubus in diversas plagas cadentibus: alioquin angulus *concavus* vocetur. Ex. gr. (Fig. 95.) dgh, et (Fig. 97.) gah convexi sunt, gaf concavus est.

4. Triangulum eiusmodi combinari posse e tribus convexis angulis, e 2 concavis et 1 convexo; at non posse e 3 concavis, aut ex 1 concavo et 2 convexis, patet.

Hosted by Google

§. 5.

Quantitas anguli esse eadem potest, quæ anguli est, quem tangentes crurum ad verticem faciunt; at illa tangentis dimidietas intelligatur, cum qua arcus non formam fluentem facit (pag. 16). Hoc pacto $u = 0 = v$, (Fig. 92.), et (Fig. 95.) trianguli gdh angulorum summa $= 0$; at (Fig. 98.) trianguli adbfcea summa angulorum $= 12R$; maior summa trium angulorum esse nequit.

Nempe (Fig. 99.) sit abc triangulum æquilaterum, et q, r, s meditullia laterum, angulique u æquales, atque e punctis a, b, c erectis ad crura ipsorum u perpendicularibus, intersectiones p, w, i fiant centra radiis pa, ib, wc æqualibus: patet angulum dae convexum accipi, et dabili quovis minus sumi posse.

Datur triangulum, cuius angulorum summa dabili quovis minor esse potest.

Sint nempe (Fig. 97.) duo arcus akd et ahd ad angulos convexos a et d se invicem secantes, (et angulus concavus dato quovis minor fieri potest); et sint tangentes in a rectæ ab et af; moveatur arcus akd circa a per arcum ahd, tangentem suam ab secum ferens; poterit ab ire quam proxime ipsi af; itaque angulus ad a fiet omni dabili minor; sed is solus erit summa trium angulorum trianguli, qui e meditullio o chordæ aE radio og ad chordam perpendiculari scripto semicirculo ghm clauditur.

Interim haud sufficit quantitas duorum angulorum dicta ad angulorum æqualitatem geometricam: necesse est et anguli species easdem, radiosque unius radiis alterius æquales esse; poterit autem inferius, ubi de areis tractabitur, angulus quivis eiusmodi etiam per areas certo modo determinatas exprimi.

§. 6.

Aequalitas triangulorum circularium determinatur modo sequente:

1. *Duo latera cum angulo intercepto non sufficiunt*; nam latus tertium esse potest radiorum variorum.

Hosted by Google

2. *At tria latera sufficiunt, nisi sit aliquod convexum et illi respondens concavum.*

3. *Ita duo anguli et unum latus adiacens.*

4. *Imo tres anguli quoque ponunt triangulorum horum aequalitatem, sed duo non.*

Cum casus reliqui sint faciliores, ultimum tantum referre libet.

At sequens prius demonstrandum est (Fig. 100.). Peripheria centri a radii pa dicatur *a*, peripheria centri h radii ha vero *A*, peripheria radii hp autem dicatur *H*.

Utcunque secet a ipsum H ad angulum z, omne punctum peripheriae A tale est, ut circulus ex eo tanquam centro scriptus cum radio ap, *plane ad angulum z secet ipsum H; nullum vero extra peripheriam A tale punctum* q *datur, ut arcus radii* ap *peripheriam H ad angulum z secet.*

Prius (Tom. I. pag. 12. V.) patet; sed nec ullum tale punctum q est.

Nam sive intra *A* sive extra sit, recta $\widehat{qh}$ transit per *A*; fiat in c, et sit q extra *A*; radius pro centro utroque c et q sit = ap, terminabitur uterque in hq in duobus diversis punctis m et r.

Fiant centro c radio cm et centro q radio qr circuli; neuter horum potest tangere ipsum *H*, quia si unus tanget (extus aut intus), ex. gr. extus, et alter extus tangeret, si ex q et c descripti circuli circulum *H* ad angulum ipsi *z* æqualem secarent; tum vero quia tactus punctum in hq esse debet, radii inæquales fierent æquales.

Itaque secaret ipsum *H* uterque in duobus punctis, unus in fl, alter in vi; et quidem ita ut si f ultra v cadat, et l plane ita ultra i cadere, et si f in v cadit, l in i cadere debeat.

Neutrum vero fieri potest. Nam quum hoc pacto esset angulus mfo = rvo, et per angulum unum ponatur æqualitas figuræ e duobus arcubus compositæ (pag. 90), esset fmovf = vrov; adeoque f et l non possunt non in v et i cadere: at neque in v et i possunt, quia tum m cum r coincideret, quia per angulum f = v non posset m e peripheria vri egredi.

Si q intus *A* cadat demonstratio eadem est. Itaque assertum patet.

Hosted by Google

Liquet hinc quamvis triangulorum circularium speciem per tres angulos determinari, ponique æqualitatem per tres angulos æquales (Fig. 101.).

Nam sit unus arcus trianguli circularis e peripheria *H* cuius centrum h, alter e peripheria *I* cuius centrum i, tertius ex *K* cuius centrum q est; adeoque sit triangulum abc.

Tum manente angulo c, omne centrum, e quo angulus = a cum *H* produci potest, est in peripheria *A*, et omne centrum, e quo cum *I* angulus = b produci potest, est in peripheria *B* per præcedentia; describitur vero arcus ab latus angulo c oppositum, ex uno centro; adeoque centrum hoc adsumi debet, ubi *A* et *B* se invicem secant; adeoque ad summum duo puncta esse possunt uti p et q, nimirum plura puncta *A* et *B* communia habere nequeunt, unde angulus = a cum *H*, et angulus = b cum *I* produci possit; scilicet $z =$ a, et $v =$ b.

At z patet (cadentibus p et q in diversas plagas) vertere convexam partem ipsi c, si a concavam ostendit, ita ut z semper aliter sit versus c versus quam a.

Itaque unicum adhuc triangulum construi potest, ut c = k sit, b = v, et $z =$ a; hæc vero sunt æqualia. Ita △ acn = $z$km; sed z est concavus, et illius deinceps positus est convexus, ita in altero triangulo. Nempe triangulo zvk considerato, si $z =$ a angulus concavus sit, angulus deinceps positus dicti anguli convexus est.

·211122.

De sectione sine angulo, quae itaque formam fluentem parit.

I. *Recta cum recta*: si circa punctum sectionis moveantur, donec fiat angulus = 2*R*, id est nullus angulus sit, forma fluens evadet.

Recta cum circulo:

1. Cum *uno*; tangens dimidia cum dimidia altera peripheria forma fluens est. Ex. gr. dak (Fig. 102.).

2. *Cum duobus circulis* dupliciter fieri potest; scilicet tangente recta on duos circulos in duobus sui extremis, aut in eadem plaga aut in diversa; uti est ponr et ponm.

Hosted by Google

3. *Cum tribus circulis* fieri nequit; quia si ad finem rectæ ponatur tertius: is cum priore circulo faciet angulum, si ita ponatur, ut cum recta non faciat; in puncto intermedio quovis vero angulum fieri clarum est.

II. *Circulus cum circulo*:

1. *Cum uno*; nempe duo arcus qualiumvis radiorum eadem tangente gaudentes, in plagas respectu rectæ centrorum diversas, et aut in eandem respectu tangentis plagam aut diversas cadentes, sine angulo secant se invicem: talis forma fluens est lfs. (Fig. 103.).

2. *Circulus cum duobus circulis*: si arcus cuiuspiam ambo extrema modo plane dicto cum aliquo arcu iungantur, uti abcd aut fmnv aut fmnl. (Fig. 104.).

§. 1.

Formæ fluentes sunt quasi rivi, quibus naturæ viventis vena fluit, rarius iter frangens, ut in dulciorem cursum refluat, demum in mortis regni angulatis terminis hærens.

Lineamenta quævis describi quam proxime possent, ad cuiusvis arcus finem, certi radii arcu certæ quantitatis in eandem aut alteram respectu tangentis plagam posito.

§. 2.

Figuram duo arcus non eiusdem circuli, sine duobus angulis claudere nequeunt. Tres arcus requirunt ad minimum unum angulum; quatuor possunt sine angulo figuram claudere.

Prius manifestum est. Alterum quoque (pro Fig. 105.) patet. Nam sint tres illi arcus *A*, *B*, *C*, centra a, b, c; punctum tactus ipsorum *A* et *B* sit 𝔄, punctum tactus ipsorum *B* et *C* sit d, et punctum tactus ipsorum *A* et *C* sit p; patet p, a, c in recta, atque etiam d, b, c in recta esse debere, itaque c eo cadere oportere, ubi rectæ pa et db se intersecant: nam p et d in arcu ex uno centro c scripto esse oportet; ibi vero oreretur triangulum abc, essetque radius cp = cd; porro quia

Hosted by Google

$$bd = ab + a\mathfrak{A}l = ab + ap,$$

atque

$$ac + ap = cd = cb + bd,$$

esset

$$ac + ap = cb + ap + ab;$$

atque hinc esset

$$ac = cb + ab;$$

quamvis duo trianguli latera nequeant æqualia esse tertio.

Idem facile patet pro casu, si trium arcuum aliquis contrarie flexus sit.

§. 3.

At nec e tribus lineis, quarum quælibet recta aut circulus est, figura sine angulo claudi potest. Nam si quævis sit recta, aut duæ rectæ et unus arcus, patet.

Si vero una sit recta et aliæ duæ arcus sint, patet modo sequente. (Fig. 106.)

Sit vw tangens arcus mq; tum ut tertia linea figuram claudens arcus sit, necesse est dari tale p, ut pv ad vm perpendicularis sit $= pq$, rectæ per arcus mq centrum c ductæ, quia tunc tantum petitum præstari per arcum a q usque ad v centro p radio pv scriptum posset.

At

$$vp < pq;$$

nam

$$mc = vo = cq,$$

porro

$$po < pc,$$

ergo

$$vo + po < pc + cq.$$

§. 4.

Fieri posse cum uno angulo figuram e tribus arcubus patet: si (Fig. 107.) centrum $\mathfrak{k}$ arcus aeb in recta per eius extremum a et centrum c ipsius afd ducta accipiatur, et centro i radio $di = bi$ semicirculus describatur: generabitur hoc pacto figura $afdgbea$, nonnisi ad b angulo gaudens.

Hosted by Google

Ita ex una recta et duobus arcubus datur figura cum uno angulo (Fig. 108.).

Nam arcus mo, cuius tangens est mn, centrum in c habet; itaque facile patet in oc producta posse centrum k arcus on accipi, et ad n angulum generari.

E duobus rectis et uno arcu quoque datur figura cum uno angulo. Nempe si abcd quadratum sit (Fig. 108.*), et centro a radio ab fiat arcus bec.

§. 5.

Figuram quatuor arcus possunt sine ullo angulo claudere; et 4 est minimus numerus, cum e paucioribus fieri non posse dictum sit.

Nimirum ab extremitatibus a et b arcus afb (Fig. 109.) ducantur rectæ per eius centrum C; et acceptis ca ex a et bk ex b æqualibus, scribantur radiis ca et kb centris c et k arcus æquales be et af, ducanturque rectæ ke, cf; et fiat ex intersectione k′ radio k′e arcus ef. Figuram fbefa quæsitam esse e præmissis facile patet. Talem etiam esse AbdeBfghA patet (Figg. 110. et 111.), centris in apicibus quadrilateri æquilateri ikck′ acceptis, radiisque ih=ib=ce=cf e centris i, c, et radiis k′h=k′f=kb=ke e centris k′, k. Facile ex inspectione patet id quoque, quod si $u \backsim R$, limes ipsius hAb et eBf semicirculus, et limes ipsius bde ita ipsius hgf rectæ sint, quamvis ipsa (Fig. 112.) nunquam attingatur. Si vero $u \backsim 0$, tum bAh $\backsim$ 0 (in Fig. 110.), in Fig. 111. autem bAh peripheriæ toti quam proxima venit, et hk′ semper minus distantia puncti k′ ab ic esse debet, ih vero $\backsim \frac{1}{2}$ ic.

Potest e duabus rectis et duobus arcubus quoque figura sine angulo fieri; talem esse patet defgab (Fig. 112.); ita ex una recta et tribus arcubus, qualis est (Fig. 113.) demba: ubi arcuum ad, em centra i, c sunt, et arcus abm centrum k est, ac remoto k in perpendiculari $b\tilde{k}$ dato quovis ulterius, limes (Fig. 112.) erit.

E tribus rectis et uno arcu figura talis fieri nequit.

Quum omnia hæc aliaque huius generis e præmissis facile perspicianturque; brevitatique consulendum sit: pauca hæc, quo ordo ipse induxit,

Hosted by Google

attulisse, nec plura adferre concessum sit. Aliquid tamen adhuc addetur inferius.

·2112.

De areis figurarum planarum rectilinearum circulariumque.

I. *De facto e rectis*; hinc *area rectanguli*, area *parallelogrammi* cuiusvis, area *trianguli*, area *quadrilateri* cuius dantur duo latera parallela, area *quadrilateri cuiusvis*, area *cuiusvis rectilinei*, per summationem triangulorum aut trapeziorum, e quibus constat; ita area *polygoni regularis*; hinc *area circuli.*

II. *Transmutatio arearum et reductio ad formam rectae* (Tom. I. pag. 27), nempe ad rectangulum datæ altitudinis; et mutatio plurium quadratorum in unum.

III. *Comparatio arearum* figurarum similium aliarumque. Inde lunula Hippocratis et id genus alia.

IV. *Additio*, *subtractio*, *divisio* figurarum sub certis conditionibus.

V. Si alicui figuræ aliæ sub certa conditione imponantur, impositarum summa limesque huius quæritur.

I.

§. 1.

Factum e quotvis rectis, recta est (pag. 77); *at si rectarum unitas sit* α; *et pro planorum unitate accipiatur tale quadratum, cuius latus* α *est*; *ita pro unitate omnium spatii portionum sit cubus, cuius latus* α; *tum si* l, l', l'' *rectae sint*: *1. recta* $l.l'$ *mensurata per unitatem* α *plane eos numeros dat, quos area rectanguli ex* l *et* l' *compositi mensurata per arearum unitatem, nempe quadratum* α; *ita ut si ex. gr. recta* $l.l'$, *nempe factum lineare, sit* $\frac{n}{m}$*-tum ipsius* α, *et area rectanguli dicti sit* $\frac{n}{m}$*-ta quadrati* α. *2. Ita factum* $l.l'.l''$ *si* $\frac{n'}{m'}$*-tum ipsius* α *sit, etiam parallelepipedum* (de quo infra) *ex* l, l' *et* l'' *est* $\frac{n'}{m'}$*-tum unitatis solidorum, nempe cubi cuius latus* α *est.*

Nam heic tantum de areis loquendo (Fig. 114.) sit l unitatis $\frac{p}{q}$-ta, l' vero $\frac{r}{s}$-ta; est

$$l.l' = \frac{pr}{qs} = \frac{ps}{qs} \cdot \frac{qr}{qs} = \frac{psqr}{qsqs}.$$

Hosted by Google

Dividatur $\alpha = 1$ in qs partes æquales, continebit l partes eiusmodi numero ps, l' vero numero rq, (patet $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ ad eandem denominationem reductis). Ductis vero parallelis e fine cuiusvis $\frac{\alpha}{qs}$, orientur in strato inferiore quadrata, quorum cuiusvis latus est $\frac{\alpha}{qs}$, numero rq; et quum l strata eiusmodi numero ps producat, erunt eiusmodi omnia quadrata numero $psrq$; itaque totum rectangulum ex l et l', erit $\frac{psrq}{qsqs}$-tum quadrati α; namque stratum inferius continet eiusmodi quadrata numero qs, et cum strata quoque numero qs dentur, constat quadratum α ex eiusmodi quadratis numero $qsqs$.

Patet itaque, uti factum lineare superius $\frac{psqr}{qsqs}$-tum unitatis linearis est, ita rectangulum, ex eiusmodi factoribus compositum, esse $\frac{psqr}{qsqs}$-tum unitatis arearum.

Si vero L et l sint incommensurabiles, tum id ex l, quod $< \frac{\alpha}{qs}$ est et remanet, sit λ, et id ex L, quod $< \frac{\alpha}{qs}$ remanet, sit ω; utrumque $\backsim 0$, quia qs omni dabili maius accipere licet.

Sit rectangulum ex L et l æquale P, atque rectangulum ex L' et l' æquale P'; erit $P - P' =$ rectangulo ex L et λ, et rectangulo ex l' et ω; λ et ω aut sunt æqualia, aut alterutrum est maius altero, sit $\lambda > \omega$; erit $P - P' <$ rectangulo ex $(L + l)$ et λ; sed hoc quoque $\backsim 0$; quia basis $L + l$ manet, et λ omni dabili minus fieri potest; adeoque non datur tam parva assignabilis recta k, ut quadrato eius non fiat rectangulum dictum minus; nam dividatur $L + l$ in tot partes n, ut una sit $< k$, deinde fiat λ tam parvum, ut sit $< \frac{k}{n}$, et si superstruantur rectangula p sibi invicem, $n\lambda$ non adæquet altitudinem k; patet oriri rectangulum, cuius tam basis quam altitudo est $< k$; adeoque $P - P'$ esse dato quadrato ipsius k minus; potest vero cuivis assignabili figuræ circulus, et huic quadratum includi; itaque P' quod $= L'.l'$ (id est $L'.l'$-to quadrati unitatis), nulla assignabili quantitate differt a P, et tendit ad limitem P; sed $L' \backsim L$ et $l' \backsim l$, adeoque (Tom. I. pag. 85) $L'.l' \backsim L.l$, et cum $L'l' = P'$, P ab $L.l$ nulla assignabili quantitate differt.

Hinc rectanguli, cuius basis L altitudo l, area $= L.l$.

Hosted by Google

§. 2.

Parallelogramma (et triangula), basibus aequalibus et altitudinibus aequalibus gaudentia, sunt aequalitate quoad portiones terminata aequalia; per altitudinem intelligendo in parallelogrammo distantiam baseos a latere opposito parallelo, in triangulo autem perpendicularem e vertice ad basim.

Vide Tom. I. pag. 66. Fig. 17. c. ubi trianguli A latus lævum ad latera parallelogrammi $\mathfrak{a}'\mathfrak{e}'\mathfrak{E}\mathfrak{B}$ (nempe $\mathfrak{E}\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{a}'$), et latus dextrum ad parallelogrammi $\mathfrak{E}\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{e}$ latera $\mathfrak{E}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{a}$ translata sunt, donec aut nihil aut aliquid supersit: atque rectas, in quovis parallelogrammorum dictorum fines quotarumvis partium connectentes, basi parallelas esse, imo in utroque rectas tales, uti parallelas per $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$, in eadem recta esse patet; nempe ad quotævis partis finem subsistere libeat, ex. gr. ad $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$; triangulum $\mathfrak{d}\mathfrak{E}\mathfrak{C}$ desinens ad partium primarum fines erit triangulo $\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{E}$ simile, ob angulum interceptum communem et latera intercipientia proportionalia; adeoque latus tertium tertio parallelum est. Et manifesto si supra $\mathfrak{g}$ residuum manet, idem supra $\mathfrak{h}$ fieri debet; secus enim parallela $\mathfrak{e}\mathfrak{a}$ infra $\mathfrak{e}'\mathfrak{a}'$ caderet, si adhuc una pars daretur supra $\mathfrak{h}$, et supra $\mathfrak{e}'\mathfrak{a}'$ caderet, si in $\mathfrak{h}$ adeoque in $\mathfrak{e}'$ ultima pars terminaretur.

Est demum hinc

$$\triangle F = f' + f,$$

per unum latus tanquam distantiam parallelarum eandem, et angulos externos internos oppositos; atque etiam trapezia $E' + E$, et $e + e'$ æqualia esse patet.

In casu (Fig. 115.) autem est manifesto $A = C$, et $B = B$.

§. 3.

Quum igitur parallelogrammum quodvis, rectangulo baseos æqualis et altitudinis æqualis, sit æquale: erit parallelogrammum quodvis æquale facto ex altitudine in basim; triangulum autem utpote dimidium paralle-

Hosted by Google

logrammi, baseos æqualis et altitudinis æqualis, est manifesto æquale basi per altitudinem dimidiam multiplicatæ.

§. 4.

Quævis autem figuræ F et f fuerint inter duas parallelas p et q: si pro quacunque recta utrinque infinita inter p et q ipsis parallela, eo quod hæc cum F commune habet C dicto, et eo quod eadem cum f commune habet c dicto, pro quibuslibet C, c simultaneis sit $C = \alpha c$; (e Tom. I. pag. 210 &) liquet esse $F = \alpha f$, areas intelligendo, etsi æqualitas interminata esset.

§. 5.

Hinc si unius parallelogrammi basis b altitudo a sit, alterius basis B altitudo A sit: erit area prioris $= ab$, et area posterioris $= AB$; itaque, si $ab = AB$, est $a : A = B : b$, nempe altitudines parallelogrammorum areæ æqualis sunt in ratione inversa basium. Quum vero triangula sint dimidia parallelogrammorum altitudinis baseosque æqualis, idem de triangulis areæ æqualis valet. Si vero $a = A$, areæ sunt uti bases.

§. 6.

(Fig. 73.*). *Altitudo* y trianguli *solis lateribus datis innotescit*: nempe

$$y = \sqrt{a^2 - x^2};$$

sed erat (pag. 76)

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b};$$

atque hinc

$$a^2 - x^2 = \frac{2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2};$$

et hoc (ex Tom. I. pag. 146)

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4b^2};$$

Hosted by Google

e quo radix quadrata per $\frac{1}{2}b$ multiplicata fit

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}$$

$=$ *areae* trianguli *e solis lateribus* computatæ.

§. 7.

Trapezium (Fig. 116.) constat e parallelogrammo ex b et a, et triangulis $b'a$, $B'a$; estque

$$=ba+\frac{b'a+B'a}{2}=\frac{2ba+b'a+B'a}{2}=a\cdot\frac{b+b+b'+B'}{2}=a\cdot\frac{b+B}{2}.$$

Notandum b esse $<B$. Hinc si e medio ipsius l sit $\beta \parallel B$, patet esse

$$b''=\frac{1}{2}b' \text{ et } B''=\frac{1}{2}B',$$

adeoque

$$b+\frac{b'+B'}{2}=\beta$$

esse per a multiplicandum. Et idem generaliter de quadrilatero patet, si duobus lateribus parallelis gaudeat.

§. 8.

Quadrilateri cuiusvis abcd *area est aequalis duplo parallelogrammi* a'b'c'd', *quod oritur* (Fig. 117.) *latus quodvis bisecando.*

Nam

$$aa'=\frac{1}{2}ab,\ ad'=\frac{1}{2}ad,$$

atque in triangulis aa'd' et abd angulus a communis est, hinc a'd' $\parallel$ bd; ita b'c' $\parallel$ bd, adeoque a'd' $\parallel$ b'c', atque ita a'b' $\parallel$ d'c'. Sunt vero triangula similia, uti secundæ potentiæ laterum homologorum (vide pag. 111); itaque

$$\triangle aa'd'=\frac{1}{4}abd,\ \text{et}\ \triangle b'cc'=\frac{1}{4}bcd;$$

Hosted by Google

adeoque triangulorum $\mathfrak{aa'd'}$ et $\mathfrak{b'cc'}$ summa $= \frac{1}{4}\,\mathfrak{abcd}$. Sed eodem modo est triangulorum $\mathfrak{a'bb'}$ et $\mathfrak{d'dc'}$ summa $= \frac{1}{4}\,\mathfrak{abcd}$. Consequenter triangulorum $\mathfrak{aa'd'}$, $\mathfrak{a'bb'}$, $\mathfrak{b'cc'}$, $\mathfrak{c'dd'}$ summa $= \frac{1}{2}\,\mathfrak{abcd}$, et

$$\mathfrak{a'b'c'd'} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{abcd}\,;$$

atque $\mathfrak{a'b'c'd'}$ parallelogrammum est.

§. 9.

Si vero quadrilaterum (Fig. 118.) in duo triangula dispescatur, et basis communis sit B, altitudoque unius sit A, alterius a; erit area

$$= \frac{BA}{2} + \frac{Ba}{2} = B\,\frac{A+a}{2}.$$

§. 10.

Porro *area cuiusvis figurae rectilineae* reperitur per summam arearum omnium triangulorum, e quibus illa constat; et polygonum regulare n laterum e totidem triangulis æqualibus constat, quorum quodvis æquale est lateri multiplicato per dimidium perpendicularis e centro ad illud demissæ; patetque factum hoc pro tota polygoni area n-ies sumendum esse. Adeoque si summa laterum p et altitudo r' fuerit, erit area $= \frac{pr'}{2}$.

§. 11.

Sit p summa laterum polygoni interni, areaque eius sit a, area circuli sit C, et summa rectangulorum circumcirca (Fig. 119.) *sit $\lambda = zp$; est*

$$a + \lambda = \frac{r'p}{2} + zp\,;$$

eritque

$$a + \lambda > C > a.$$

Duplicato semper n numero laterum polygoni, $\lambda \backsim 0$, nempe

Hosted by Google

$z = r - r' \backsim 0$, atque p limite gaudet: prius inde patet, quod e radio potest quam proxime ad punctum contactus eundo perpendicularis usque ad arcum erigi, quo arcu datur minor talis, qui in peripheria $n \,.\, 2^m$-ies contineatur; sed etiam p habet limitem; semper enim crescit, sed r' quoque crescit, atque etsi r' non cresceret, si p in quantumvis magnum excrescere posset, a supra C cresceret. Sit limes P ipsius p; tum

$$\frac{pr'}{2} \backsim \frac{Pr}{2},$$

quia $p \backsim P$, et $r' \backsim r$ (Tom. I. pag. 85).

At vero tum etiam $C = \frac{Pr}{2}$. Nam $a + \lambda$ erat $> C > a$, et $(a + \lambda) - a \backsim 0$; itaque $C - a \backsim 0$, id est

$$C - \frac{pr'}{2} \backsim 0.$$

Consequenter

$$\frac{pr'}{2} \backsim C \quad \text{et} \quad \frac{pr'}{2} \backsim \frac{Pr}{2},$$

adeoque

$$C = \frac{Pr}{2};$$

estque *area circuli areae trianguli, cuius basis P et radius r est, aequalis.*

Sit $a = \frac{xr}{2}$, quod $\frac{pr'}{2}$ erat; nempe si latus l polygoni prioris n laterum datum sit, (ex. gr. latus hexagoni æquatur radio); r' prodibit

$$= \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} l^2},$$

quo subtracto ex r, manebit z, cathetus trianguli rectanguli, cuius alter cathetus $= \frac{1}{2} l$ est; e quibus prodit hypotenusa, nempe latus polygoni $2n$ laterum; quod continuari posse donec libuerit, manifestum est; uti et x crescere crescente a, quum r constans maneat.

Sitque $a + \lambda = \frac{p'r}{2}$; et hoc est

$$> C = \frac{Pr}{2} > \frac{xr}{2};$$

Hosted by Google

adeoque

$$p' > P > x;$$

si igitur computando (pro $\omega < 1$ et $k < 1$, atque integris μ, ν) prodierit

$$p' = \frac{\nu + \omega}{\mu} r \quad \text{et} \quad x = \frac{\nu + k}{\mu} \cdot r,$$

constabit P certo continere ν eiusmodi partes, quales radius r numero μ continet, sed numero $\nu + 1$ non continere. Ex. gr. pro diametro 1 fit

$$3,\ 15 > p' > 3,\ 14,$$

pariter

$$3,\ 15 > x > 3,\ 14;$$

adeoque P constat pro diametro 1, usque ad secundam notam decimalem inclusive rite prodiisse. Valor verus ipsius P pro diametro 1 dicitur π.

Computatum est π in prope 300 notis decimalibus, ita ut ubique abrumpatur, π parte ad lævam maior est, sed minor fit, si nota ultima ad dextram uno augeatur.

Si quis igitur talem ipsius π valorem se reperisse iactaverit, qui in fractionem decimalem conversus in aliqua a dictis nota aberrat, oleum operamque perdidit. Si aream proposuerit, ea per $\frac{1}{4}$ nempe dimidium radium divisa dabit factorem alterum cum fractione dicta decimali conferendum.

Ope fractionum continuarum fractionibus approximantibus valor ipsius π alternatim maior minorque terminis minimis exprimitur: talis expressio est $\frac{22}{7}$, quam Archimedes reperit a hexagono incipiendo, duplicandoque laterum numerum usque 96; estque $\frac{22}{7} > \pi$ quidem, sed ad vulgarem praxim sufficit.

$$\frac{3}{1} \quad \frac{22}{7} \quad \frac{333}{106} \quad \frac{355}{113} \ldots$$

sunt hæ approximantes, quarum prima $< \pi$, secunda $> \pi$, tertia $< \pi$, quarta $> \pi$ &c., ultima tamen tam exacta est, ut in æquatoris peripheria quoque parum aberret.

Hosted by Google

§. 12.

Paucis exceptis, qui desperatam hanc caussam aggredi ausi sunt, nec id quod quærerent, satis intellexerunt; multique similes his mirantur mathematicos rem tam absurdam desiderare, nempe circulum quadratum; aut per polygona circulum consequi velle, cum nulla pars peripheriæ sit recta. Natura curvæ plane in eo consistit, ut nulla pars eius recta sit, plura spatia curvilinea tamen exacte quadrata sunt; nec quidquam aliud in problemate quadrationis circuli quæritur, nisi constructione geometrica sensu stricto (saltem sensu lato) exhibendum punctum illud, in quo P (pag. 105) terminari (Tom. I. pag. 20) tanquam limes ipsius p debet; atque punctum istud, uti inde et circulo cuivis quadratum æqualitate saltem interminata æquale, (pagg. 105, 109) certo datur: nemo vero adhucdum demonstravit huius impossibilitatem possibilitatemve; uti diametrum cum peripheria esse commensurabilem incommensurabilemve, aut circulum ulli quadrato esse æqualitate terminata æqualem. Quævis interim expressio terminorum numero finito, quo simplicior, eo magis laudanda erit. Series aliæque expressiones infinitæ dato quovis propius euntes permultæ sunt (uti Tom. I. pag. 442).

§. 13.

Si unius circuli sit diameter $=1$ alteriusque diameter $=2r$, atque construatur ex. gr. hexagonum in utroque, semperque simul duplicentur laterum numeri in utroque: erunt manifesto semper triangula per rectas e centris ad laterum extremitates ductas generata, in utroque similia, atque polygonum circulo diametri 1 inscriptum, erit ad polygonum circulo diametri $2r$ inscriptum, uti radius ad radium. Hinc etiam limes polygoni prioris ad limitem posterioris ita erit, uti $\frac{1}{2} : r$ seu $1 : 2r$. Quum igitur pro diametro 1 sit peripheria π, erit pro diametro $2r$ peripheria $2r\pi$. Eritque area

$$=2r\pi \cdot \frac{r}{2} = r^2\pi;$$

Hosted by Google

unde iterum ex area α reperitur radius; nempe si $\alpha = r^2\pi$, est $r = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$. Si vero peripheria P data sit, reperietur ex $P = 2r\pi$ radius $r = \frac{P}{2\pi}$.

§. 14.

Annulus A quoque (Fig. 120.) hinc facile prodit e maioris circuli radio R et minoris radio r; nempe

$$A = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi.$$

Ita sector prodit pro arcu β in circulo radii r; nempe sectoris area erit ad totius circuli aream, uti arcus ad peripheriam, seu β ad $2r\pi$. Data chorda radioque etiam segmentum innotescit, si sectoris area nota fuerit, subtracto triangulo a chorda et duobus radiis facto, e sectore; nimirum area trianguli e tribus lateribus prodit (pag. 103).

II.

Transmutatio figurarum quoad areas; et hinc *reductio earum ad formam rectae* (Tom. I. pag. 27).

§. 1.

(Fig. 121.). *Si $a.A = b.B$, et angulus $aA =$ angulo bB: tum parallelogrammum ex a et A parallelogrammo ex b et B quoad contentum aequalitate terminata aequale est.*

Nam si e fine $\mathfrak{M}$ ipsius B, (quod in parallelogrammi $\mathfrak{GCEF}$ lateris $\mathfrak{EC}$ prolongationem ponatur), $\mathfrak{MJ} \parallel$ et $= \mathfrak{GC}$ fiat, $\mathfrak{JC}$ secabit ipsam $\mathfrak{FE}$, quia $\mathfrak{MJ} \parallel \mathfrak{FE}$; pariter ducta per $\mathfrak{D}$ parallela ad $\mathfrak{EM}$ secat ipsam $\mathfrak{JM}$. Oriuntur autem hoc pacto triangula $\mathfrak{CHD}$ et $\mathfrak{JMC}$ similia propter $\mathfrak{HD} \parallel B$, $\mathfrak{MJ} \parallel \mathfrak{HC}$; itaque prodit tale x, ut sit $a : x = B : A$, adeoque $aA = xB$; atque hinc manifesto $x = b$, quum per hypothesim sit $aA = bB$.

Est etiam $\mathfrak{GJ}$ in recta eadem cum $\mathfrak{GF}$, atque ipsi $\mathfrak{ME}$ parallela est; nam $\mathfrak{GF} \parallel \mathfrak{ME}$, atque $\mathfrak{MJ} \parallel$ et $= \mathfrak{GC}$.

Hosted by Google

Estque $\mathfrak{MCHK}$ parallelogrammum ex b et B cum angulo $bB = z$, uti $\mathfrak{GCEF}$ ex a et A cum angulo $aA = z$. Hæc duo parallelogramma autem æqualitate terminata esse æqualia patet: si ad latera posterioris ipsi A æqualia transferatur b, donec fieri potest, et ad latera prioris ipsi B æqualia transferatur a, donec fieri potest; nam parallelogramma orta sunt æqualia, uti $1 = 1$, ita si plura quotquot essent: porro $\triangle k = \triangle k$; si a in B exacte certo numero adesset, patet tum β non remanere, neque α adesse, et A etiam certo numero continere b, quia $a : B = b : A$, atque tum pro k quoque parallelogrammum reliquis æquale adesset. At si adsint α et β, tunc si in latere ipsi B opposito inferiore, ex ultimo a dematur β, et sit ab extremitate eius parallela ad A; erit hæc $= \alpha$, et tertium latus $= \gamma$; ita si ex ultimo b in $\mathfrak{EF}$ dematur α, et fiat ab extremitate eius parallela ad B; erit hæc $= \beta$, et triangula $\alpha\beta\gamma$ omnia erunt æqualia, per unum latus in quibusvis duobus æquale, et angulos per latera parallela æquales.

Hinc etiam quinquelaterum $\beta s \alpha a b$ = alteri $\beta s \alpha a b$; nam latera et anguli ordine quo semet excipiunt sunt æqualia; nam s remanet utrinque e diagonalibus æqualibus subtracto γ; patet etiam ex $a + \beta$ demto β remanere a, uti ex $b + \alpha$ demto α remanere b. Itaque parallelogrammum Aa = parallelogrammo Bb æqualitate terminata est.

§. 2.

Hinc patet, quod cum cuique parallelogrammo detur aliud æquale angulo z gaudens, nempe inter parallelas easdem rectis ad angulum z ductis ab extremitatibus baseos parallelis: dari hoc modo cuivis parallelogrammo aliud ad datum latus et angulum æquale; ita cuivis triangulo, quia hoc parallelogrammo altitudinis æqualis baseos dimidiæ = est.

Ita etiam plura quotvis parallelogramma summari possunt, omnia ad angulum z et latus datum reducendo; adeo ut, quum z etiam rectus esse possit, quævis area, quæ ad summam triangulorum reduci potest, in rectangulum eiusdem altitudinis summari, adeoque ad formam rectæ reduci queat. (Tom. I. pag. 27).

Hosted by Google

§. 3.

Si in præcedentibus $aA = B^2$, (uti pag. 75), prodit $b = B$; atque quadratum ipsi b superstructum rectangulo ex a et A æqualitate terminata $=$ erit.

Hinc si (Fig. 122.) α, β catheti fuerint, et demissa e vertice anguli recti ad hypotenusam γ perpendiculari, quadratum hypotenusæ in rectangula p et q dividatur: erit (pag. 75) $\alpha^2 = a\gamma$, et $\beta^2 = b\gamma$. Consequenter e quadrato ipsius α exstrui modo in §. 1 relato poterit rectangulum p, uti rectangulum q e quadrato β; adeoque *quadratum hypotenusae exstruetur e quadratis cathetorum.*

Unde *duo quadrata in unum commutari possunt*, si priorum latera ad angulum rectum iungantur, et ducatur hypotenusa: huius quadratum enim summa priorum erit. Pari modo tertium quadratum, et tum quartum et ita porro in unum mutantur.

§. 4.

Si vero figuræ cuiusdam area a in figuram certæ speciei per x determinatam mutanda sit, sitque hæc $= f(x)$, tum x ex $a = f(x)$ eruitur. Ex. gr. si $f(x)$ circulum, cuius radius x est, denotet: erit

$$f(x) = x^2\pi = a,$$

et hinc

$$x = \sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

Ita si $f(x)$ hexagonum circulo radii x inscriptum denotet: erit area eius perimetro per perpendicularis y e centro ad latus missæ dimidium multiplicatæ æqualis, adeoque

$$6x \cdot \frac{y}{2} = 6x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}x^2\sqrt{3};$$

nam latus hexagoni æquatur radio, et

$$y = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{3}.$$

Hosted by Google

Unde aream dictam hexagoni, pro radio x, ipsi a æqualem ponendo, prodit x.

Ita si $f(x)$ annulum circa circulum radii r per circulum radii x factum denotet, erit

$$f(x) = (x^2 - r^2)\pi = a;$$

unde

$$x = \sqrt{\frac{a}{\pi} + r^2}.$$

E quibus ad alia applicatio patet.

III.

Comparatio figurarum similium quoad areas.

§. 1.

Si in duobus triangulis latera a, b et latera A, B angulos aequales intercipiant, uti (Fig. 123.)

$$\angle ab = \angle AB = v,$$

area trianguli abc est ad aream trianguli ABC uti ab ad AB.

Nam sint pro basibus b et B altitudines p et P; erunt triangula apq et APQ similia, itaque pro $a = np$ erit $A = nP$. Est autem

$$\triangle abc = \frac{pb}{2} \quad \text{et} \quad \triangle ABC = \frac{PB}{2},$$

atque

$$\frac{pb}{2} : \frac{PB}{2} = npb : nPB = ab : AB.$$

Idem de parallelogrammis patet, quum quævis parallelogramma uno angulo æquali gaudentia eiusmodi triangulorum dupla sint.

§. 2.

Sunt porro *areae triangulorum similium cbh et CBH* (Fig. 124.), *uti quadrata linearum homologarum.*

Hosted by Google

Sint enim latera quævis homologa b et B pro basibus accepta, sintque altitudines a et A: erunt propter angulos v et R triangula cqa et CQA similia; itaque si per hypothesim sit

$$B : b = C : c \quad \text{et} \quad B = nb,$$

adeoque

$$C = nc;$$

erit etiam

$$A = na,$$

propter

$$C : c = A : a.$$

Est vero area trianguli cbh

$$= \frac{ab}{2}$$

et area trianguli CBH

$$= \frac{AB}{2} = \frac{nanb}{2}.$$

Consequenter

$$\triangle cbh : \triangle CBH = \frac{ab}{2} : \frac{AB}{2} = ab : AB = ab : nanb =$$
$$= 1 : n^2 = b^2 : n^2b^2 = b^2 : B^2.$$

§. 3.

Hinc etiam *quarumvis figurarum rectilinearum similium areae sunt in ratione duplicata linearum homologarum.*

Nam sit unius figuræ latus quodvis ad latus illi ex altera figura homologum, uti 1 ad n: erit area trianguli cuiusvis ad homologum, uti 1 ad n^2, adeoque et summa triangulorum figuræ prioris ad summam triangulorum figuræ alterius ita erit, uti 1 ad n^2, areaque ad aream uti a^2 ad A^2, si a latus prioris, et latus posterioris ipsi a homologum $A = na$ sit.

§. 4.

Unde etiam patet *areas circulorum esse uti quadrata diametrorum.*

Nam si diameter unius sit d, alterius D, inscriptis polygonis utrique

Hosted by Google

totidem laterum, erit area polygoni prioris ad aream posterioris, (quum manifesto sint polygona per triangula e centro propter angulos æquales similia), uti radiorum quadrata, nempe uti $\frac{d^2}{4}$ ad $\frac{D^2}{4}$, seu uti d^2 ad D^2. Erit vero ratio eadem semper, etsi numerus laterum simul duplicetur in infinitum, quo pacto id, quod in uno alterove supererit, $\backsim 0$. Dicatur area polygoni prioris p, et posterioris P, area circuli prioris autem sit c, posterioris sit C, sitque $c = p + \omega$ et $C = P + \lambda$; erit

$$p : P = d^2 : D^2,$$

adeoque et

$$\frac{p+\omega}{P+\lambda} = \frac{d^2}{D^2},$$

quia $\omega \backsim 0$, et $\lambda \backsim 0$ (Tom. I. pag. 89).*

Idem ad alias figuras quoque extendi potest.

§. 5.

Hinc si (Fig. 125.) lateribus a, b, c trianguli rectanguli figuræ similes A, B, C superstruantur: erit C, *hypotenusae* c *superstructa*, *summae cathetis superstructarum aequalis*; nempe

$$C = A + B;$$

posito a, b, c latera figurarum A, B, C homologa esse.

Namque tum

$$A : B = a^2 : b^2, \quad \text{atque hinc} \quad A : a^2 = B : b^2;$$

itaque si

$$A = na^2,$$

erit

$$B = nb^2.$$

Porro

$$A : C = a^2 : c^2, \quad \text{et hinc} \quad A : a^2 = C : c^2,$$

adeoque

$$C = nc^2.$$

* §. 4. brevius sequitur ex pag. 107 §. 13. Erit enim pro diametris D et d area prioris $= D^2\pi : 4$, posteriorisque erit $d^2\pi : 4$. (Errata Ed. I. Tom. II. pag. 386).

Hosted by Google

Sed

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Consequenter

$$nc^2 = na^2 + nb^2,$$

seu

$$C = A + B.$$

§. 6.

Hinc (Fig. 126.) lunula Hippocratis æquatur triangulo rectilineo; nempe $\alpha' = t$, si $a = b$; atque $\alpha' + \beta' = t + t'$.

Nam

$$\alpha + t + t' + \beta = \alpha + \alpha' + \beta + \beta',$$

nempe summa dimidiorum circulorum super cathetis a, b tanquam diametris constructorum est semicirculo diametri c æqualis. Subducto igitur utrinque $\alpha + \beta$, manet

$$\alpha' + \beta' = t + t';$$

si vero $a = b$, est $\alpha' = \beta'$ et $t = t'$.

Quomodo Hippocrates ope suæ lunulæ quadraturam circuli tentaverit, referre haud operæ pretium est.

§. 7.

(Fig. 127.). Superius (pag. 93) mentio facta erat quantitatis anguli arcuum circularium per areas exprimendæ: si circuli A et B se invicem extus aut intus contingant, et $B < A$, saltem non $> A$ fuerit, atque B cum tangente angulum u, A vero angulum v faciat; quantitas anguli circuli A cum B exprimi per $U + V$ potest, si U aream denotet, quæ est inter dimidiam peripheriam ipsius B et quadrantem peripheriæ centro c diametro ipsius B tanquam radio descriptæ; atque ita V aream inter dimidiam peripheriam ipsius A et quadrantem peripheriæ centro c diametro ipsius A tanquam radio descriptæ denotet; atque si U et V in diversas respectu tangentis plagas cadant, U positive, si vero in eandem plagam cadant, negative addatur positivo V. Quoad congruentiam tamen

Hosted by Google

geometricam, et seorsim angulorum æqualitas requiritur: idem etiam, si operæ pretium esset, ad angulos (pag. 93) circulares alios quoque applicari posset, qui ex angulo tangentium, et angulis arcuum cum suis tangentibus componuntur.

Pauca adhuc notasse sufficiat.

1. Si (Fig. 127.) circuli A diameter $=1$ sit: erit area eius $\frac{\pi}{4}$ (pag. 107), area circuli vero, cuius radius est diametro ipsius A æqualis, est $=\pi$; area igitur quadrantis circuli posterioris est $=\frac{\pi}{4}$, et area dimidii A est $=\frac{\pi}{8}$, quod si ex $\frac{\pi}{4}$ subtrahatur, manet

$$V=\frac{2\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}.$$

Est itaque $V=$ dimidio A, atque quadrantem cpqh dimidia peripheria cih ut diagonalis bifariam dividit.

2. Si vero diameter ipsius B sit d: erit

$$B=\frac{d^2}{4}\pi,$$

adeoque

$$\frac{1}{2}B=\frac{d^2\pi}{8},$$

et quadrantis radio ac descripti area

$$=\frac{d^2\pi}{4},$$

adeoque

$$U=\frac{d^2\pi}{8}.$$

Unde

$$U+V=\frac{\pi}{8}(d^2+1),$$

atque si $A=B$, area trianguli $\omega=\frac{\pi}{4}=A$.

Plura huius generis Tyrones ipsi reperire possunt.

Hosted by Google

IV.

Additio, subtractio, divisioque figurarum sub certis conditionibus.

§. 1.

Si (Fig. 128.) *fiat* (pag. 71)

$$\alpha : \beta = n : m,$$

atque e vertice trianguli AB ducatur recta ad finem ipsius α, *triangulum in ratione eadem divisum erit*; nam altitudo utriusque est eadem, adeoque areæ sunt uti bases (pag. 102).

§. 2.

Quodvis punctum $\mathfrak{p}$ in A sit, area trianguli ax est ad aream trianguli AB, uti $a.x$ ad $A.B$ (pag. 111); itaque area prior erit ad posteriorem, uti n ad m, si fuerit

$$a.x : A.B = n : m,$$

adeoque

$$x = \frac{n.A.B}{ma};$$

et tum triangulum AB per punctum datum $\mathfrak{p}$ in dicta ratione divisum erit.

§. 3.

Area figurarum similium sunt uti quadrata linearum homologarum. Hinc (Fig. 129.) si $b \parallel B$, est

$$A^2 : x^2 = \triangle AB : \triangle xb,$$

adeoque si

$$A^2 : x^2 = n : m;$$

erit

$$\triangle AB : \triangle xb = n : m,$$

et per parallelam hoc pacto triangulum in dicta ratione dividetur.

Hosted by Google

§. 4.

Si vero (Fig. eadem) fuerit trapezium Bb, e quo data area ipsi t æqualis sit subtrahenda, per $z \parallel B$ (inferius aut superius) absecta: concipiatur lateribus trapezii non parallelis productis expleri triangulum; erit

$$a + x : x = B : b ;$$

adeoque

$$x = \frac{ab}{B-b},$$

et

$$A = a + x = \frac{aB}{B-b},$$

atque α nempe area trianguli, quod supra b est, erit

$$= \frac{pb^2}{2(B-b)};$$

nam

$$a : p = x : q,$$

et hinc

$$q = \frac{px}{a} = \frac{pb}{B-b},$$

adeoque

$$\alpha = \frac{1}{2} b \cdot \frac{pb}{B-b}.$$

Si iam t sit subtrahendum, et sit

$$\alpha + t : \alpha + t + t' = m : n ;$$

erit

$$A^2 : (x+y)^2 = n : m ;$$

adeoque

$$mA^2 = nx^2 + ny^2 + 2nxy ;$$

et

$$y^2 + 2xy + x^2 - \frac{mA^2}{n} = 0 ;$$

unde cum x iam cognitum sit, prodit y. Patet quoque, si inferius sit t subtrahendum, etiam tum datum esse t, et tantum y esse reperiendum.

Si trapezium t' trapezio t addi debeat, reperto x datum erit $x + y$,

Hosted by Google

fietque

$$(x+y)^2 : A^2 = \alpha + t : \alpha + t + t';$$

unde etiam A reperietur.

§. 5.

Hinc quævis figura rectilinea per lineas parallelas in data ratione dividi poterit. Nam si triangulum aut trapezium nimis magnum fuerit, potest ex eo trapezium subtrahi; si nimis parvum, e sequente trapezio subtrahi debet, addique parti priori, quod ita ad finem usque continuare licet.

§. 6.

Possunt etiam areæ per triangula addita, et ita posita, ut etsi lineæ dividentes parallelæ non sint, nec tamen ab una parte nimis lata, ab altera nimis angusta portio sit, quod tamen magis praxim spectat, in ratione data dividi: nempe portio exhibenda in duas partes α et α' (Fig. 130.) dividi potest; eritque

$$\alpha' = x\frac{b}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{2\alpha'}{b};$$

itaque e fine perpendicularis x ducta ad b parallela, triangulum α' efficiet cum α formam quæsitam; quod item continuare licet, ut prodeat portio altera $\beta + \beta'$ &c.

Scholion: Omnia hæc vero etiam geometrice perfici possunt, cum nonnisi additionem linearum, subtractionem, multiplicationem, divisionemve earundem, ad summum extractionem radicis quadratæ requirant. In praxi tamen, ne error multiplicibus constructionibus multiplicetur, satius est calculo repertas lineas ope scalæ accipere: quamvis omnia geometrice possint in rectangulum summari, et hoc in data ratione dividi, atque portioni cuivis e figura data æqualis exhiberi. Ex. gr. sit rectanguli illius altitudo a, potest α in rectangulum altitudinis a transmutari, et si e portione exhibenda remaneat rectangulum α', hoc potest in triangulum baseos b transmutari &c; quibus amplius inhærere supervacuum est.

Hosted by Google

V.

Exempla quaedam ad certarum figurarum, cuipiam figurae sub certa conditione impositarum, summam, huiusque limitem.

§. 1.

Sit triangulum æquilaterum (Fig. 131.) circulo radii r inscriptum, sitque $\mathfrak{e}$ lateris $\mathfrak{ab}$ meditullium; est tum $\mathfrak{ad} = \mathfrak{ac} = r$ latus hexagoni; et $\mathfrak{ce}$ est perpendicularis ad $\mathfrak{ab}$, ac triangula $\mathfrak{ace}$ at $\mathfrak{aed}$ sunt æqualia, quia $\mathfrak{ac} = \mathfrak{ad}$, et $\mathfrak{ae} = \mathfrak{ae}$; hinc

$$\mathfrak{ce} = \frac{1}{2} r,$$

estque radius circuli inscripti; nam si $\mathfrak{h}$ sit alterius lateris meditullium, triangula $\mathfrak{cah}$ et $\mathfrak{cae}$ sunt æqualia, quia $\mathfrak{ah} = \mathfrak{ae}$, et $\mathfrak{ca} = \mathfrak{ca}$, angulus ad $\mathfrak{h}$ meditullium chordæ vero est rectus. Hinc $\mathfrak{cf}$ etiam

$$= \frac{1}{2} r = \mathfrak{fg},$$

et

$$\mathfrak{ge} = \frac{3r}{2};$$

$\mathfrak{ae}$ vero

$$= \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{1}{2} r \sqrt{3};$$

et

$$\mathfrak{ab} = r \sqrt{3}.$$

Area A trianguli $\mathfrak{agb}$ est latus trianguli multiplicatum per dimidiam altitudinem; itaque est

$$= \frac{3r}{4} \cdot r \sqrt{3};$$

area A' circuli inscripti autem est

$$\left(\frac{1}{2} r\right)^2 \pi = \frac{r^2 \pi}{4};$$

et si trianguli æquilateri latus sit n-ies minus, est area α circuli huic

Hosted by Google

triangulo inscripti

$$\frac{r^2\pi}{4n^2};$$

quia radius quoque per similitudinem est n-ies minor, nempe $\frac{r}{2n}$.

§. 2.

Si vero (Fig. 132.) trianguli æquilateri latera omnia per n dividantur et agantur e quovis divisionis puncto lateris cuiusvis ad duo reliqua latera parallelæ, atque inscribatur cuivis minorum triangulorum æquilaterorum hoc pacto ortorum circulus, imo etiam ponatur eiusmodi circulus quocunque, ubi is in triangulo æquilatero iuxta Figuram eandem locum habere potest; dicatur summa arearum omnium horum circulorum A''.

Patet heic triangula æquilatera oriri in strato inferiore numero $n+n-1=2n-1$, qui est numerus n-tus impar; ita in strato sequente est triangulorum numerus $(n-1)$-tus impar, et ita porro; ut summa omnium sit n^2. Itaque etiam numerus circulorum inscriptorum est n^2. Sed si per vertices horum triangulorum ducantur rectæ, nempe quorum bases aut coincidunt, aut sunt parallelæ: erunt hæ ad bases perpendiculares, et centrum circuli inscripti est in intersectione talium perpendicularium; remanet vero ultra peripheriam circuli inscripti, usque ad verticem recta æqualis radio inscripti; itaque eodem radio potest circulus centro in vertice sex triangulorum communi sumto describi, sex circulos triangulis inscriptos tangens; inscriptus circulus vero ad summum a tribus inscriptis, sed potest ab uno quoque aut duobus tangi; tangere se hos circulos patet, quum centra cum puncto communi in rectam cadant.

Hinc novorum circulorum centris stellulatis gaudentium a sex circulis tactorum numerus inter duo strata inferiora est $n-2$; tum $n-3$, dein $n-4$ . . . usque ad 1.

Itaque, ut A'' prodeat, circulis prioribus, qui numero n^2 erant, additis novis, fiet

Hosted by Google

$$A'' = \frac{r^2\pi}{4n^2}(n^2 + n - 2 + n - 3 + \cdots + 1)$$
$$= \frac{r^2\pi}{4n^2}\left(n^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)$$
$$= \frac{r^2\pi}{4} + \frac{r^2\pi}{2.4} + \frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2.4n}$$
$$= \frac{3r^2\pi}{2.4} + \frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2.4n}.$$

Quæratur valor summæ duorum posteriorum, (cum terminus primus sit pro quovis n idem), num crescat crescente n, aut decrescat. Est

$$\frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2.4n} = \frac{2r^2\pi - 3r^2\pi n}{2.4n^2} = \frac{r^2\pi}{2.4} \cdot \frac{(2-3n)}{n^2},$$

e quo, si $n+1$ substituatur ipsi n, fiet

$$\frac{r^2\pi}{2.4} \cdot \frac{[2-3(n+1)]}{(n+1)^2};$$

et tantum

$$\frac{2-3n}{n^2} \quad \text{et} \quad \frac{2-3(n+1)}{(n+1)^2}$$

consideranda veniunt; reducta ad denominationem eandem, erunt

$$\frac{2+n-4n^2-3n^3}{n^2(n+1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{-n^2-3n^3}{n^2(n+1)^2},$$

ubi in priore plus negativi est; nam $2+n-3n^2$ nonnisi pro $n=1$ est $=0$, pro maiore n vero fit negativum; $-n^2-3n^3$ autem quod manet, est idem negativum quam $-n^2-3n^3$. Crescente igitur n in infinitum, decrescit quidem $A-A''$, nempe summa vacuitatum a circulis in triangulo relictarum: at datur limes ad quem tendit ista differentia, ita ut aliquanta pars trianguli hoc modo expleri haud unquam queat.

Est nempe

$$A - A'' = \frac{3r^2}{4} \cdot \sqrt{3} - \left(\frac{3r^2\pi}{2.4} + \frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2.4n}\right),$$

quod $\backsim \frac{3r^2}{2.4} \cdot (2\sqrt{3} - \pi)$; quia summa posteriorum fit crescente n in

Hosted by Google

infinitum omni dabili minor; adeoque si summa vacuitatum dicatur v', et limes huius sit v; decrescet v' infra $\frac{A}{10}$, sed non decrescet usque $\frac{A}{11}$; nam $\frac{A}{v}$ est

$$= \frac{2 \cdot 3r^2\sqrt{3}}{2 \cdot 4} : \frac{3r^2(2\sqrt{3} - \pi)}{2 \cdot 4} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \pi};$$

est autem $\sqrt{3} = 1{,}732 \ldots$; adeoque $2\sqrt{3} = 3{,}46 \ldots$; π vero pro diametro 1 est $= 3{,}141 \ldots$; itaque $2\sqrt{3} - \pi$ est $0{,}32 \ldots$ quod per 11 multiplicatum est $3{,}52 \ldots$, adeoque excedit $3{,}46 \ldots$, sed decies acceptum infra hoc manet.

§. 3.

Si pro n, m integris rectanguli basis sit $= mu$, altitudo $= nu$; atque ducantur e fine cuiusvis u in basi ad altitudinem, in altitudine ad basim parallelæ: oriuntur quadrata lateris u numero nm, et totidem circuli radii $\frac{u}{2}$, si cuivis quadrato circuli inscribantur; eritque cuiusvis circuli area $= \frac{u^2\pi}{4}$, adeoque summa erit omnium $= nm\frac{u^2\pi}{4}$.

Dividatur quodvis u in partes numero μ; ductis ut prius parallelis, orientur quadrata lateris $\frac{u}{\mu}$ numero $nm\mu^2$, et totidem circuli his inscripti, quorum cuiusvis radius $= \frac{u}{2\mu}$, adeoque $= \frac{u^2\pi}{4\mu^2}$, eritque summa omnium

$$= nm\mu^2 \cdot \frac{u^2\pi}{4\mu^2} = \frac{nmu^2\pi}{4},$$

ut prius. Manet igitur summa vacuitatum semper eadem, nempe

$$nmu^2 - \frac{nmu^2\pi}{4} = \frac{nmu^2(4 - \pi)}{4}.$$

Quæstionibus tamen huius generis pluribus vacare non licet.

Hosted by Google

·212.

De quorundam, quorum e prioribus possibilitas innotuit, constructione geometrica.

§. 1.

Recta a extrema et media ratione secatur, ut olim dicebatur; si construatur triangulum rectangulum, cuius alter cathetus est $\frac{1}{2}a$: erit (Fig. 133.) x id quod quæritur; nempe

$$a : x = x : a - x.$$

Nam (pag. 76)

$$\left(\frac{1}{2}a + x\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2.$$

Hinc

$$a^2 - ax = x^2 = a(a - x);$$

unde

$$a : x = x : a - x.$$

§. 2.

Hinc construitur decagonum in circulo radii r: nempe si r modo præcedente secetur, erit x latus decagoni (Fig. 134.).

Nam $r : x = x : r - x$; itaque triangula acb et dab sunt similia; quia angulus u est communis, et latera intercipientia r et x, atque x et $r - x$ sunt proportionalia; itaque anguli lateribus proportionalibus oppositi sunt æquales.

Nempe lateribus

$$r = \mathfrak{bc},\ x = \mathfrak{ab},\ x = \mathfrak{ab},\ r - x = \mathfrak{db}$$

opponuntur

$$y + v,\qquad z,\qquad p,\qquad v,$$

adeoque

$$y + v = p \quad \text{et} \quad z = v;$$

sed $y + v = u$, quia $r = \mathfrak{ac}$, adeoque $p = u$, hinc $k = x$, et inde $z = y = v$; adeoque

$$y + v = 2z \quad \text{et} \quad z + y + v + u = 5z = 2R,$$

Hosted by Google

et

$$z = \frac{2R}{5} = \frac{4R}{10}.$$

Patet e decagono pentagonum quoque datum esse.

Peripheriæ divisio per constructionem geometricam sensu stricto in 2, 3, 5, 3 . 5, atque 2^{μ}, $3 . 2^{\mu}$ et $3 . 5 . 2^{\mu}$ pro μ integro iam Euclidis temporibus nota fuit; omnesque Geometræ tanquam certum pronunciaverant per nullum alium integrum id fieri posse: quid summus recentioris ævi Geometra hac in re quoque præstiterit, vide Tom. I. pag. 384; de quo tamen amplius dicere locus heic non est; et pluribus aliis quoque brevitas necessaria supersedere iubet.

Supplementum numeri ·2111211222;

in quo

Origo ideaque Trigonometriae

exponitur: in triangulo angulorum laterumque illis oppositorum mutuam a se invicem dependentiam, atque huius ope modum e datis ignota computandi quærere, ea quoque necessitas impulit, quod pro magnis distantiis quæsita constructio exhibere nequeat.

§. 1.

Hic prius omnino de triangulis rectilineis in plano agetur; de sphæricis suo loco dicetur: nempe *sphaera*, eiusque (crescente radio in infinitum) limes geometricus, qui sub conditione pag. 55 exposita *planum* est, certo sensu infinite differentia, alio conveniunt, et in utroque e quovis puncto quaquaversum omnia æqualiter determinantur; atque in utroque lineæ figuræque considerandæ sunt, imo veritates unius plures certa mutatione et alteri conveniunt. Ex. gr. *fundamentale utriusque Trigonometriae tam planae quam sphaericae est, dependentia angu-*

Hosted by Google

lorum laterumque oppositorum mutua: in plana sunt sinus angulorum, uti latera opposita, in sphaerica uti sinus laterum oppositorum, nempe ibi et latera trianguli sunt arcus sinu gaudentes. Quid *sinus, cosinusque*, et aliæ lineæ auxiliares, nempe *sinus versus, tangens, secans, cosinus versus, cotangens, cosecans*, significent, dictum (pag. 14) est; quorum tamen proprie omnia reliqua e sinu promanare e loco citato liquet, quum *cosinus e sinu prodeat* per theorema Pythagoricum (Fig. 135.) e triangulo rectangulo, cuius hypotenusa radius et unus cathetus sinus anguli u, alter vero cosinus est; nempe

$$\cos.^2 u = r^2 - \sin.^2 u,$$

unde

$$\cos. u = \sqrt{r^2 - \sin.^2 u};$$

quod pro radio 1 fit

$$= \sqrt{1 - \sin.^2 u}.$$

Atque hinc omnes reliquas functiones trigonometricas, loco citato nominatas, per sinum solum exprimi pro radio 1 posse manifestum est; at sæpius expressio brevior clariorque et concinnior per nomina functionum trigonometricarum reliqua fit.

§. 2.

Sed priusquam dependentiæ angulorum et laterum mutua demonstraretur, quod nempe sinus sint uti latera opposita, atque inde omnes trianguli rectilinei resolutiones deducerentur: dependentia sinus ipsius cosinusque et reliquarum functionum trigonometricarum ab *angulo seu arcu anguli quantitatem* exprimentis consideratur; sinus nempe uti reliquæ functiones trigonometricæ tam angulo quam arcui illius quantitatem exprimenti æque tribuuntur.

I. Pro integro m positivo, et q quadrantem positivum denotante, quantusvis sit arcus α, sive $\vdash\!\!+$ sive $\vdash\!\!-$; $\mp$ vel $\pm 4mq \pm \alpha$ et $\pm \alpha$ sinu eodem gaudent; id est si arcus $\pm \alpha$ ita mutetur, ut ei addatur sive $4mq$ sive $-4mq$, nec sinus nec cosinus mutatur: nempe quotiescunque de-

Hosted by Google

curratur peripheria sive positive sive negative arcus $\pm\alpha$ ibi terminatur, ubi $\pm$ vel $\mp 4mq \pm \alpha$. Ita si $\alpha + \gamma = \pm 4mq$ fuerit, α et $-\gamma$ sinu cosinuque iisdem gaudent: nam $-\gamma = \mp 4mq + \alpha$.

II. Si α mutetur in $-\alpha$, sin. α et sin. $(-\alpha)$ sunt oppositi, alioquin æquales; cos. α et cos. $(-\alpha)$ autem est idem. Nam aliquod ipsorum α et $-\alpha$ terminabitur supra diametrum primariam, nisi plane in ipsa terminetur, et tum alterum infra terminabitur; atque tum manifesto extremitates arcuum α et $-\alpha$ a principio $*$, æqualibus arcubus distabunt, chordaque extremitates has connectens per diametrum primariam perpendiculariter bisecabitur: unde reliqua patent; quum distantia extremitatis unius sit positiva, altera negativa, alioquin æquales; distantia centri vero sit eadem. Si vero in diametro terminetur, fiet id aut in principio aut in fine: si prius, tum sinus est $0 = \pm 0$, cosinus vero $= 1$, pro radio 1; si posterius, sinus item $= 0 = \pm 0$; cosinus autem $= -1$, nempe distantia centri est -1 (pag. 14).

III. Si α mutetur in tale γ, ut sit

$$\alpha + \gamma = q;$$

adeoque γ complementum ad q ipsius α sit, tum

$$\sin.\gamma = \cos.\alpha \quad \text{et} \quad \sin.\alpha = \cos.\gamma.$$

Si vero

$$\alpha + \beta = 2q,$$

tunc

$$\sin.\alpha = \sin.\beta, \quad \text{et} \quad \cos.\alpha = -\cos.\beta.$$

Nempe si tabula sequens, valores ipsius α, complementaque ipsius ad q, tum complementa ipsius α ad $2q$, et demum complementorum istorum ad $2q$ complementa ad q exhibens, percurratur, facile patet: sit k arcus positivus $< q$, aut sit 0.

Hosted by Google

Valores ipsius α	Compl. ad q	Compl. ad $2q$	Compl. complementorum ad $2q$
k	$q-k$	$2q-k$	$-q+k$
$q+k$	$-k$	$q-k$	$+k$
$2q+k$	$-q-k$	$-k$	$q+k$
$3q+k$	$-2q-k$	$-q-k$	$2q+k$
$-k$	$q+k$	$2q+k$	$-q-k$
$-q-k$	$2q+k$	$3q+k$	$-2q-k$
$-2q-k$	$3q+k$	$4q+k$	$-3q-k$
$-3q-k$	$4q+k$	$5q+k$	$-4q-k$
0	q	$2q$	$-q$

E quo casibus singulis percursis patet, quum in columna prima quotiesvis $4q$ addi valoribus positivis, et quotiesvis $-4q$ addi valoribus negativis possit, atque eatenus reliquæ columnæ mutari salva re (per I) possint.

IV. Si α a 0 crescat positive usque ad q, sinus a 0 crescet usque ad radium r, qui *sinus totus* vel *maximus* audit, quum nullus eo maior sit; crescente vero arcu porro ultra q decrescit, usque 0 pro arcu $=2q$; crescenteque porro arcu ultra $2q$, crescit sinus negative a 0 infra diametrum, donec pro arcu $3q$ fiat $-r$; et ultra $3q$ crescentis arcus sinus decrescit negative usquequo $=0$ fiat pro arcu $=4q$.

Cosinus autem arcus 0 aut $\pm 4mq$ est $=r$, nempe $\cos. 0 = \sin. q$; quia $q+0=q$, et $\sin. q$ pro radio r est r; et postea decrescit usquequo $\cos. q = 0$ fiat, decrescente nempe crescentis arcus complemento; at ultra q crescentis arcus cosinus, eousque ab r ad 0 decrescens, abinde negative crescit, donec pro arcu $2q$ fiat $=-r$; atque dein porro crescente arcu $2q$, item negative decrescit cosinus usquequo pro $3q$ fiat $=0$, et abinde denuo crescit positive usquequo pro $4q$ fiat $=r$.

Sinus versus ipsius α vero, omnia hic pro radio r intelligendo, exprimi per $r-\cos. \alpha$ potest: nam si sinus inter principium $*$ arcus atque centrum c cadat, tum $\cos. \alpha$ est positivus, et manifesto $\sin. \text{vers.} \alpha$ est $=r-\cos. \alpha$; atque si sinus ultra centrum cadat, tum ut distantia principii

Hosted by Google

* a sinu prodeat, radio recta illa, quæ ultra centrum usque ad sinum est, positive addenda est; quod per $r - \cos.\alpha$ exprimitur, quia plane rectæ illius addendæ oppositum est $= \cos.\alpha$. Patet vero sinum versum crescere a 0 usquequo pro arcu $2q$ fiat $=$ diametro, et dein decrescere donec pro $4q$ fiat item $= 0$.

Tangens ipsius α autem dicitur $\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$ pro radio 1, aut pro radio r generaliter $\frac{r \sin.\alpha}{\cos.\alpha}$; crescitque a 0 positive, usquequo pro q fiat ∞; deinde decrescit negative usque ad 0 pro arcu $= 2q$; et tum item positive crescit, donec pro $3q$ fiat ∞, atque demum negative decrescit, donec pro $4q$ fiat $= 0$. Nempe pro arcu crescente a 0 usque q, tam sinus quam cosinus positivus est, crescitque sinus a 0 usque ad radium, cosinus autem a radio decrescit usque 0; abinde usque ad $2q$ sinus manet positivus, sed divisor negativus est, adeoque quotus fit negativus, atque dividendus a radio usque ad 0 decrescit, divisor autem a 0 crescit negative usque ad radium; postea vero usque ad $3q$ tam sinus quam cosinus negativus est, adeoque quotus fit positivus; crescit vero sinus a 0 usque ad radium positive, cosinus autem item positive decrescit usque ad 0; et tum sinus decrescit usque ad 0 positive, cosinus autem crescit negative, usque ad radium; postea vero sinus crescit negative, et cosinus decrescit negative; atque demum usque ad $4q$ sinus decrescit negative usque ad 0, cosinus autem positive crescit a 0 usque ad radium.

Secans ipsius α dicitur $\frac{1}{\cos.\alpha}$ *pro radio* 1, generaliter pro radio r (et cosinu α pro radio 1 accepto) autem $\frac{r}{\cos.\alpha}$ *secans ipsius* α *pro radio* r dicitur; crescitque crescente arcu a 0 usque ad q, positive a radio in ∞, et inde usque ad $2q$ decrescit ex ∞-to negative, donec pro $2q$ fiat $=$ radio; et tum item crescit negative, donec pro $3q$ item fiat $= \infty$, atque abinde decrescit positive, donec pro $4q$ item fiat $=$ radio. Nempe (ut statim patebit) pro radio r cosinus ipsius α fiet $r \cos.\alpha$, ($\sin.\alpha, \cos.\alpha$ & *semper, nisi aliud monitum fuerit, pro radio* 1 *intelligendo*): adeoque secans pro radio r fiet $\frac{r^2}{r \cos.\alpha} = \frac{r}{\cos.\alpha}$; fietque hoc pacto secans in primo et ultimo quadrante $+$ propter cosinum positivum, et $-$ in

secundo et tertio, propter cosinum negativum; quamvis tangens per singulos quadrantes signum mutet, atque eadem linea secans geometrice statim exhibenda fiat pro quadrante ultimo positiva, et negativa pro secundo.

Cosinus versus, *cotangens*, *cosecans* quomodo crescente arcu a 0 usque ad $4q$ mutentur, quum pari modo facile pateat, præterire licet. Sufficiat heic prius commemorare, quomodo e signo functionis trigonometricæ ad arcum eius concludatur, tum tangentem, secantemque geometrice exhibere.

Quod prius attinet: manifesto sinu positivo (et non 0) nonnisi arcus $4mq+p$, aut $-4mq-2q-p$ respondere, pro p positivo et $<2q$, potest; ita sinus positivus radio minor respondet tam angulo acuto, quam obtuso eum ad duos rectos complenti; atque ex aliis datis eruendum est, utrinam appertineat. Cosinus negativus et non $=0$ angulo obtuso respondet, positivus acuto; cosinus $=0$, uti sinus $=$ radio, angulum rectum indicat: arcus autem cosinui negativo et non 0, respondet quivis sub formulam $4mq+q+p$, aut $-4mq-q-p$, pro p positivo et $<2q$. Reliquis, quum pari modo e dictis facile pateant, immorari supervacuum est.

Quoad alterum videatur (Fig. 135.): sinus arcus $\mathfrak{ad}$ est $\mathfrak{di}$, et tangens est $\mathfrak{ae}$, secans $\mathfrak{ec}$, sinus versus $\mathfrak{ai}$, arcus $\mathfrak{ag}$ item arcus $\mathfrak{adfbg}$ tangens est $\mathfrak{ah}$, secans $\mathfrak{ch}$; atque per similitudinem triangulorum $\mathfrak{dci}$ et $\mathfrak{eca}$ atque $\mathfrak{gic}$ et $\mathfrak{hac}$ proportiones sequentes valent, si α dicatur arcus $\mathfrak{ad}$ et r radius $\mathfrak{ac}$; nempe

$$\mathfrak{ic} : \mathfrak{id} = \mathfrak{ac} : \mathfrak{ae},$$

id est (heic cosinu, sinu et tangente pro radio præsenti r acceptis)

$$\cos.\alpha : \sin.\alpha = r : \tang.\alpha;$$

ita

$$\mathfrak{ic} : \mathfrak{dc} = \mathfrak{ac} : \mathfrak{ec},$$

seu

$$\cos.\alpha : r = r : \sec.\alpha,$$

adeoque

Hosted by Google

$$\sec.\alpha = \frac{r^2}{\cos.\alpha},$$

si $\cos.\alpha$ pro radio r accipiatur. Pariter infra diametrum, et de reliquis, uti de functionibus trigonometricis complementorum omnia facile patent.

V. Si vero radius mutetur, ex. gr. ex 1 in r, functiones trigonometricæ omnes, quæ pro radio 1 cuipiam arcui competunt, per r multiplicari debent, ut eidem arcui pro radio 1 valeant; uti illæ, quæ pro radio r valent, per r dividendæ sunt ut pro radio 1 valeant. Nam sinus arcuum totidem graduum, atque pariter etiam cosinus ita sunt, uti radii, unde reliqua ultro sequuntur: nempe (Fig. 136.)

$$\mathfrak{ei} : \mathfrak{bd} = \mathfrak{ec} : \mathfrak{bc},$$

quia $\mathfrak{ei}$ et $\mathfrak{bd}$ sunt ad $\mathfrak{ac}$ perpendiculares; ita

$$\mathfrak{ic} : \mathfrak{dc} = \mathfrak{ec} : \mathfrak{bc};$$

nempe sinus ad sinum, et cosinus ad cosinum, uti radius ad radium.

Atque hinc, si ponatur $\mathfrak{ec} = 1$ et $\mathfrak{bc} = r$, *sinus* pro radio 1 per r multiplicari debet, ut sinus pro radio r prodeat, et pariter *cosinus* pro radio 1 per r multiplicatus dabit cosinum pro radio r. *Sinus versus* autem erat differentia cosinus a radio, adeoque pro radio r est $r - r\cos.\alpha$, pro radio 1 vero est $1 - \cos.\alpha$, adeoque posterior per r multiplicari debet ut prior prodeat. *Tangens* pro radio r est $\frac{r\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$, pro radio 1 vero est $\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$, adeoque posterior per r multiplicatus producit priorem. *Secans* pariter pro radio r est $\frac{r}{\cos.\alpha}$, pro radio 1 autem est $\frac{1}{\cos.\alpha}$, et pariter posterius per r multiplicandum est, ut prius prodeat. Unde etiam ad functiones complementorum reliquas conclusio ultro patet.

Notandum autem est, e similitudine triangulorum dictorum, $\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$, etsi $\sin.\alpha$, $\cos.\alpha$ non pro radio 1, ut dictum est, sed pro radio quovis r intelligantur, semper tangentem pro radio 1 esse.

VI. Si vero α in $\alpha \pm \beta$, adeoque $\sin.\alpha$ in $\sin.(\alpha \pm \beta)$, et $\cos.\alpha$ in $\cos.(\alpha \pm \beta)$ mutetur, fiet

Hosted by Google

$$\sin.(\alpha \pm \beta) = \sin.\alpha \cos.\beta \pm \cos.\alpha \sin.\beta,$$

et

$$\cos.(\alpha \pm \beta) = \cos.\alpha \cos.\beta \mp \sin.\alpha \sin.\beta;$$

quantumcunque arcum, et sive positivum sive negativum, denotent sive α sive β.

Ad hoc perspiciendum denotent a et b arcus quadrante q minores positivos; manifesto α pro n, m integris positivis poterit per $mq + a$ aut $-mq - a$, ita β per $nq + b$ aut $-nq - b$ exprimi; atque hinc orientur quatuor combinationes pro $\alpha + \beta$ et totidem pro $\alpha - \beta$, nempe quodvis posteriorum duorum cuivis duorum priorum addi, aut ex eo subtrahi potest.

Dicatur A terminus in α, qui certo quadrantum numero additur, et dicatur B terminus in β, qui quadrantum numero additur; atque omittatur tam ex α quam ex β, et tam ex $\alpha + \beta$ quam ex $\alpha - \beta$, quotiesvis adfuerit $\pm 4q$, cum quoad sinum cosinumve nil mutet; manifesto $\alpha + \beta$ sub formam $\pm \mu q + (A + B)$, et $\alpha - \beta$ sub formam $\pm \mu q + (A - B)$ veniet, ubi μ nonnisi 0 aut 1 vel 2 aut 3 erit. Ex. gr. sit

$$\alpha = -7q - a = -7q + A,$$

nempe tum est $A = -a$, sitque

$$\beta = -10q - b = -10q + B;$$

pro α poni potest $-3q + A$, et $-2q + B$ pro β, atque $-1q + (A + B)$ pro $\alpha + \beta = -17q - a - b$, et $3q + (A - B)$ sive $-1q + (A - B)$ pro $\alpha - \beta$; nempe sive ex $-7q$ subtrahatur $-10q$, sive e $-3q$ subtrahatur $-2q$, sinu cosinuque $-q$ et $3q$ eodem gaudent, quum propter $q + 3q = 4q$ extremitas arcuum eadem sit. Sit nimirum in α quadrantum numerus $4p + p'$, et in β sit $4k + k'$, sive positivum sive negativum denotet sive p sive k, at p', k' ipso 4 minora sint; dabit $4p + p' + 4k + k'$ sinum cosinumque eundem, quem $p' + k'$, ita sinum cosinumque eundem dabit $4p + p' - (4k + k') = 4p - 4k + p' - k'$, quam $p' - k'$ (per pag. 125).

Patet porro $A + B$ et $A - B$ semper ipso $2q$ minora esse; nempe etsi A et B aut A et $-B$ simul positiva aut simul negativa sint, non-

Hosted by Google

nisi $a+b$ vel $-a-b$ (pro $a<q$ et $b<q$) prodire potest, in alio casu semper $<q$ prodit.

Sit ipsorum A, B, $(A+B)$, $(A-B)$ nomen generale C, ita ut quodvis dictorum, ipsi C in quavis linea horizontali tabellæ sequentis, ubique simul substituere liceat: fiet

Arcuum	*sinus*	*cosinus*
$\pm 1q+C$	$\pm\cos.C$	$\mp\sin.C$
$\pm 2q+C$	$-\sin.C$	$-\cos.C$
$\pm 3q+C$	$\mp\cos.C$	$\pm\sin.C$
$0q+C$	$\sin.C$	$\cos.C$

Percurrendo casus singulos, circulumque considerando, veritas tabellæ patebit: quæ pro quavis combinationum superius dictarum sinum cosinumque tam ipsius α per sinum cosinumve ipsius A, quam sinum cosinumve ipsius β exhibebit per sinum cosinumve ipsius B; et pariter ipsorum $\alpha+\beta$ et $\alpha-\beta$ sinum cosinumve exhibebit, prioris per sinum cosinumve ipsius $A+B$, posterioris per sinum cosinumve ipsius $A-B$.

Quum vero statim demonstretur esse

$$\sin.(A\pm B)=\sin.A\cos.B\pm\cos.A\sin.B,$$

et

$$\cos.(A\pm B)=\cos.A\cos.B\mp\sin.A\sin.B;$$

et si omnes combinationes superius dictæ inductione completa percenseantur: atque sinu cosinuque ipsorum α, β, $(\alpha+\beta)$, $(\alpha-\beta)$ e tabella dicta acceptis, reperiatur semper

$$\sin.(\alpha\pm\beta)=\sin.\alpha\cos.\beta\pm\cos.\alpha\sin.\beta,$$

et

$$\cos.(\alpha\pm\beta)=\cos.\alpha\cos.\beta\mp\sin.\alpha\sin.\beta:$$

patebit omnino formulæ veritas generaliter. Possent quidem casus plures etiam colligi, ne singuli plane percensendi sint; sed prolixioris operæ pretium non esset.

Exemplo illustrare dicta necesse est. Sit

Hosted by Google

$$\alpha = -3q - a = -3q + A,$$
$$\beta = -2q - b = -2q + B;$$
$$\sin.(\alpha + \beta) = \sin.(-1q - a - b) = \sin.(-1q + (A + B)),$$

quod e tabella est

$$= -\cos.(A + B) = -\cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B$$

per formulam de $A + B$ statim demonstrandam; sed hoc est

$$= \sin. \alpha \cos. \beta + \cos. \alpha \sin. \beta;$$

nam e tabella est

$$\sin. \alpha = \sin.(-3q + A) = \cos. A,$$
$$\cos. \beta = \cos.(-2q + B) = -\cos. B;$$
$$\cos. \alpha = -\sin. A, \quad \sin. \beta = -\sin. B;$$

substituendo fit

$$\sin. \alpha \cos. \beta + \cos. \alpha \sin. \beta = -\cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B.$$

Quum omnia reliqua eodem modo prodeant, nonnisi *de A et B demonstranda formula est*; quod fit modo sequente. Valores ipsius A sunt $+a$ vel $-a$, ita valores ipsius B sunt $+b$ vel $-b$; adeoque quemlibet valorum ipsius A cum quovis valorum ipsius B combinando, fient casus sequentes: $a + b$, $a - b$, $-a + b$, $-a - b$; $a + (-b)$, $-a + (-b)$; ubi ut supra tam a quam b positivum et $< q$ est. Consideretur prius $\sin.(a + b)$, et $\sin.(a - b)$, atque $\cos.(a + b)$ et $\cos.(a - b)$. In (Fig. 137.) $a + b$ sive $< q$ sive $= q$, sive $> q$ fuerit, semper infra $2q$ manet; at vero erit a aut $= b$, aut $< b$, aut $> b$. Sit prius a non $< b$, adeoque $a = b$ vel $a > b$. Transferatur b ex fine ipsius a retrorsum, atque ducta chorda a fine novi b ad finem prioris, ducatur radius e centro $\mathfrak{c}$ ad finem ipsius a; bisecabit hic manifesto chordam dictam perpendiculariter. Demittantur e finibus arcuum a, $a + b$ et $a - b$, (nisi $a - b = 0$ fuerit), perpendiculares ad diametrum, ut prodeant $\mathfrak{ld} = \sin. a$, $\mathfrak{me} = \sin(a + b)$, $\mathfrak{nf} = \sin.(a - b)$; fiantque e chordæ meditullio perpendiculares I et h. Facile patet triangula dimidiis chordæ insistentia æqualia, et $p = h$ ac $k = i$ esse; atque hinc esse

$$\sin.(a \pm b) = I \pm i,$$

Hosted by Google

et

$$\cos.(a \pm b) = H \mp h.$$

Valores ipsorum I, i, H, h vero reperiuntur e proportionibus sequentibus pro radio 1

$$1 : \sin.\, a = \cos.\, b : I$$
$$1 : \cos.\, a = \sin.\, b : i$$
$$1 : \cos.\, a = \cos.\, b : H$$
$$1 : \sin.\, a = \sin.\, b : h.$$

Nam patet triangulum cuius latus unum est radius $\mathfrak{cd} = 1$, alterum $\mathfrak{ld} = \sin.\, a$, tertium $\mathfrak{cl} = \cos.\, a$, esse simile triangulo, cuius latera sunt $\mathfrak{cg} = \cos.\, b$, I et H; ita triangulum prius esse simile triangulo, cuius latera $\mathfrak{ge} = \sin.\, b$, h, i, (per pagg. 71, 72).

Hinc valoribus ipsorum I, i, H, h substitutis, est

$$\sin.(a \pm b) = \sin.\, a \cos.\, b \pm \cos.\, a \sin.\, b,$$

et

$$\cos.(a \pm b) = \cos.\, a \cos.\, b \mp \sin.\, a \sin.\, b.$$

Corollaria.

1. Atque hinc etiamsi $a < b$ sit, valet formula. Nam si tum scribatur $b \pm a$, formula valet per præcedentia; sed $\sin.(b + a) = \sin.(a + b)$ et reipsa et iuxta formulam; pariter $\cos.(b + a) = \cos.(a + b)$ et reipsa et iuxta formulam; $\sin.(b - a)$ autem est

$$= \sin.(-(a - b)) = -\sin.(a - b),$$

sed

$$\sin.(b - a) = \sin.\, b \cos.\, a - \cos.\, b \sin.\, a,$$

cuius oppositum est

$$\sin.\, a \cos.\, b - \cos.\, a \sin.\, b,$$

quod igitur est $= \sin.(a - b)$ pro casu etiam, si $a < b$ fuerit, et quidem formulæ convenienter.

Pariter

$$\cos.(a - b) = \cos.(-(b - a)) = \cos.(b - a) = \cos.\, b \cos.\, a + \sin.\, b \sin.\, a,$$

plane ita ut dum $a > b$ erat.

Hosted by Google

Ita

$$\begin{aligned}\sin.(-a+b) &= \sin.-(a-b) = -\sin.(a-b)\\ &= -(\sin.a\cos.b - \cos.a\sin.b)\\ &= \sin.(-a)\cos.b + \cos.(-a)\sin.b.\end{aligned}$$

Pariter

$$\begin{aligned}\sin.(-a-b) &= \sin-(a+b) = -\sin.(a+b)\\ &= -(\sin.a\cos.b + \cos.a\sin.b)\\ &= \sin.(-a)\cos.b - \cos.(-a)\sin.b\\ &= \sin.(-a)\cos.(-b) + \cos.(-a)\sin.(-b).\end{aligned}$$

2. Hinc si $b = a$ ponatur,

$$\sin.2a = 2\sin.a\cos.a,$$

qui erit sinus arcus dupli.

Porro

$$\cos.2a = \cos.^2 a - \sin.^2 a,$$

et substituendo ipsi $\sin.^2 a$ valorem $1 - \cos.^2 a$, fit

$$\cos.2a = 2\cos.^2 a - 1;$$

seu si $2a$ vocetur c, est

$$\cos.c = 2\cos.^2\frac{c}{2} - 1,$$

et substituendo ipsi $\cos.^2$ valorem $1 - \sin.^2$, est

$$1 - 2\sin.^2\frac{c}{2} = \cos.c;$$

hinc

$$\sin.\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1-\cos.c}{2}}$$

et

$$\cos.\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1+\cos.c}{2}}.$$

3. Sit hinc porro $\sin.a = p$ et $\cos.a = k$, eleveturque per theorema binomiale $(k+p)$ ad n; uti prodeunt termini, summa terminorum, quorum numerus loci par est, exprimit $\sin.na$; terminorum imparium vero summa est $\cos.na$; si in utraque expressione signum termini primi ponatur $+$,

Hosted by Google

et sequentis —, semperque mutetur alternando. Nam si verum est de n, verum de $n+1$ quoque est. Atqui e formulis facile prodit, verum de $n=2, 3, 4 \ldots$ esse . . . ; itaque verum de quovis numero erit. Maior probatur sic. (Tom. I. pag. 157).

Sit

$$\begin{aligned}
\sin. na &= Ik^{n-1}p - IIIk^{n-3}p^3 + Vk^{n-5}p^5 + \cdots \\
\cos. na &= k^n - IIk^{n-2}p^2 + IVk^{n-4}p^4 - \cdots \\
\sin.(na+a) &= \sin. na \,.\, \cos. a + \cos. na \sin. a = \\
&= k(Ik^{n-1}p - IIIk^{n-3}p^3 + \cdots) + p(k^n - IIk^{n-2}p^2 + \cdots) = \\
&= (Ik^np - IIIk^{n-2}p^3 + \cdots) + (k^np - IIk^{n-2}p^3 + \cdots) = \\
&= (I+1)k^np - (II+III)k^{n-2}p^3 + \cdots ;
\end{aligned}$$

quod præter signa in $(k+p)^{n+1}$ æquale est summæ terminorum numero locorum pari gaudentium.

Pariter de $\cos.(na+a)$ liquet.

VII. Sequitur iam laterum angulorumque illis oppositorum in triangulo rectilineo mutua dependentia, quod nempe *latera sint uti sinus angulorum illis oppositorum*; e quo resolutiones trianguli omnes ultro sequuntur; hoc autem facile patet, si circa triangulum ABC (Fig. 138.) circulus scribatur (per pag. 80); erunt nempe A, B, C chordæ, et a, b, c anguli ad peripheriam, quorum quantitates exprimentur per arcus a', b', c', nempe dimidia arcuum, quibus insistunt, per radios e centro per meditullia chordarum ductos divisorum; adeoque est

$$\frac{1}{2}A = \sin. a' = \sin. a,$$

et

$$\frac{1}{2}B = \sin. b' = \sin. b,$$

ac

$$\frac{1}{2}C = \sin. c' = \sin. c.$$

Unde quia

$$\frac{1}{2}A : \frac{1}{2}B = A : B,$$

est

Hosted by Google

$$A : B = \sin. a : \sin. b\,;$$

ita

$$A : C = \sin. a : \sin. c,$$

atque

$$B : C = \sin. b : \sin. c.$$

Ex hac proportione fundamentali autem reperiuntur e duobus lateribus et angulo alicui eorum opposito latus tertium, et anguli reliqui; ita e duobus angulis et latere uni eorum opposito latera reliqua; necnon e duobus lateribus et angulo intercepto latus tertium et anguli reliqui, et pariter e tribus lateribus angulus cuivis eorum oppositus.

1. E fundamentali propositione, nempe

$$A : B = \sin. a : \sin. b,$$

sequitur

$$A \sin. b = B \sin. a\,;$$

unde ex æquatione inter quatuor has quantitates, quæcunque tres earum datæ fuerint, prodit quarta; nempe

$$A = \frac{B \sin. a}{\sin. b}, \quad \sin. a = \frac{A \sin. b}{B}.$$

2. Ex A, B et c, (Fig. 139.) reperitur a modo sequente: sit

$$\frac{a+b}{2} = s\,; \quad \frac{a-b}{2} = d\,;$$

hinc (per Tom. I. pag. 414)

$$a = s + d, \quad b = s - d\,;$$

atque tantum d reperiatur, nempe *semidifferentia*, a illico datur, nam *semisumma* per subtractionem ipsius c ex 180° prodit.

Est vero

$$A : B = \sin. a : \sin. b = \sin. (s+d) : \sin. (s-d)$$
$$= \sin. s \cos. d + \cos. s \sin. d : \sin. s \cos. d - \cos. s \sin d\,;$$

et dividendo terminum proportionis tertium et quartum per $\cos. s \cos. d$, atque substituendo valori $\frac{\sin.}{\cos.}$ tangentem, erit

Hosted by Google

$$A : B = \text{tang.}\, s + \text{tang.}\, d : \text{tang.}\, s - \text{tang.}\, d\,;$$

hinc

$$A\,\text{tang.}\, s - A\,\text{tang.}\, d = B\,\text{tang.}\, s + B\,\text{tang.}\, d,$$

adeoque

$$(A - B)\,\text{tang.}\, s = (A + B)\,\text{tang.}\, d\,;$$

unde tangens semidifferentiæ, adeoque e tabulis ipsa semidifferentia, nempe arcus tangenti semidifferentiæ respondens, prodit.

Scholion. Sed tang. a etiam immediate reperitur: nempe

$$b = 180^\circ - (a + c),$$

adeoque

$$\sin.\, b = \sin.\,(c + a)\,;$$

atque hinc

$$B : A = \sin.\,(c + a) : \sin.\, a = \left(\frac{\sin.\, c\,.\,\cos.\, a}{\cos.\, a} + \frac{\cos.\, c \sin.\, a}{\cos.\, a}\right) : \frac{\sin.\, a}{\cos.\, a}$$

$$= (\sin.\, c + \cos.\, c\,\text{tang.}\, a) : \text{tang.}\, a\,;$$

hinc

$$B\,\text{tang.}\, a = A \cos c\,.\,\text{tang.}\, a + A \sin.\, c\,;$$

unde

$$\text{tang.}\, a = \frac{A \sin c}{B - A \cos.\, c}.$$

Unde per fundamentale etiam latus tertium innotescit.

3. (Fig. 140.). E tribus lateribus prodeunt anguli: (pag. 76) dictum est

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\,;$$

porro

$$x : a = \cos.\, c' : 1\,;$$

hinc

$$x = a \cos.\, c' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\,;$$

unde

$$\cos.\, c' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\,;$$

adeoque angulus c' ex lateribus reperitur.

Scholion. Hinc etiam e duobus lateribus et angulo intercepto prodit latus tertium

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,.\,\cos.\, c'}.$$

Hosted by Google

Imo quia

$$c : a = \sin. c' : \sin. a',$$

est etiam

$$\sin. a' = \frac{a \sin. c'}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos. c'}}.$$

4. Quamvis omnia dicta de omnibus, adeoque et de rectangulis triangulis valeant, quædam tamen de his specialiter notanda sunt, quum si quævis duo præter angulum rectum data fuerint, reliqua innotescant.

1*. Si aut duo catheti, aut unus cathetus et hypotenusa data fuerint: e duobus cathetis hypotenusa, atque e hypotenusa et uno catheto alter prodit, per Theorema Pythagoricum (pag. 76).

2*. (Fig. 141.)

$$B : A = \sin. b : \sin. a;$$

et quia b complementum ipsius a est, fit

$$\sin. b = \cos. a;$$

itaque

$$B : A = \cos. a : \sin. a,$$

atque hinc

$$B : A = \frac{\cos. a}{\cos. a} : \frac{\sin. a}{\cos. a},$$

seu

$$B : A = 1 : \text{tang}. a$$

nempe quoad radium 1. Consequenter

$$B \text{ tang}. a = A;$$

unde quæcunque duo data fuerint e cathetis et angulo alicui eorum opposito, tertium innotescit.

3*.

$$H : A = 1 : \sin. a,$$

omnino pro radio 1 intelligendo; unde

$$H \sin. a = A = H \cos. b,$$

(quia $\sin. a = \cos. b$); atque et hic tria sunt, hypotenusa, cathetus et angulus ei oppositus; e quorum quibusvis duobus prodit tertium.

Hosted by Google

Scholion 1. Omnia hæc autem ope logarithmorum (per Tom. I. pag. 109) facilius absolvi possunt. Ex. gr. (ex 2*) est

$$\text{tang.}\, a = \frac{A}{B},$$

adeoque

$$\log.\, \text{tang.}\, a = \log. A - \log. B.$$

At notandum est hoc pro radio 1 esse, et pro radio r esse

$$\text{tang.}\, a = \frac{rA}{B},$$

adeoque

$$\log.\, \text{tang.}\, a = \log. r + \log. A - \log. B = 10 + \log. A - \log. B,$$

si pro r radius tabularis (nempe 1 cum 10 cifris) accipiatur.

Scholion 2. Quævis expressio E fuerit, in qua functiones trigonometricæ pro radio 1 (non pro radio tabulari r) acceptæ sunt, atque sit $E = Q$, denotante Q sive functionem aliquam trigonometricam item pro radio 1, sive latus, aut quidvis aliud; omnia modo sequente ita mutari poterunt, ut quævis functio trigonometrica pro radio tabulari r accipi tractarique possit. Sit prius casus simplicior, dum in nullo ipsius E termino dividendus aut divisor quantitas complexa est, nec functio trigonometrica signo radicali subest. *Distinguatur quaevis functio trigonometrica pro radio 1 ab eadem per r multiplicata per id*, quod prior litera minuscula, posterior maiore incipiat, ita ut cos. α sit *pro radio* 1, Cos. α vero sit $= r \cos. \alpha$, adeoque *cosinus tabularis* ipsius α.

In quovis termino ipsius E quælibet functio trigonometrica multiplicetur per illam potentiam ipsius r, ad quam ipsa ibidem elevata est, ex. gr. e $\cos.^2 \alpha$ fiat $r^2 \cos.^2 \alpha = \text{Cos.}^2 \alpha$; et quicunque terminus hoc pacto per r^{-m} esset multiplicatus pro m positivo et non 0, is per r^m multiplicetur; atque si tum in nullo ipsius E termino r^n ut factor accesserit pro n positivo et non 0, tota expressio multiplicetur per r, ut fiat eius valor $= rQ$. Si vero in termino ipsius E aliquo r^μ prodierit pro μ positivo et non 0, nec in ullo termino fuerit exponens ipsius r maior: quilibet terminus, in quo r^ν est, pro ν sive 0 sive positivo et non 0, multiplicetur per $r^{\mu-\nu}$; ut fiat expressio $= r^\mu Q$.

Hosted by Google

Atque tum exprimantur functiones trigonometricæ ubique quoad r; ex. gr. ubi $r^3 \cos^3 \alpha$ est, scribatur $\mathrm{Cos}^3 \alpha$ &c.

Si igitur Q functionem trigonometricam pro radio 1 denotet, erit in casu priore rQ functio eiusdem nominis pro radio r; in posteriore autem $r^\mu Q$ per $r^{\mu-1}$ divisum dabit functionem pro radio r. Si vero tantum ipsum Q quæratur, in casu primo rQ per r, in posteriore $r^\mu Q$ per r^μ dividendum erit.

Nempe si e termino quopiam $\frac{\gamma}{\delta}$ per operationem primam fiat

$$\frac{r^k \gamma}{r^p \delta} = r^{k-p} \cdot \frac{\gamma}{\delta},$$

erit $k-p$ aut $=0$, aut positivum aut negativum; si $k-p=0$, tum

$$r^{k-p} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta};$$

si positivum fuerit $k-p$, erit hæc aut summa potentia ipsius r exponentis μ in terminis omnibus ita tractatis, aut si $k-p$ dicatur ν, termino per $r^{\mu-\nu}$ multiplicato, prior per r^μ multiplicabitur. Unde reliqua facile patent.

Exempla.

Sit

$$a + \frac{b \sin^2 \alpha}{c \cos^2 \beta} = Q;$$

fiet *post operationem primam*

$$a + \frac{br^2 \sin^2 \alpha}{cr^2 \cos^2 \beta},$$

atque hinc

$$ra + \frac{rb \,\mathrm{Sin}^2 \alpha}{c \,\mathrm{Cos}^2 \beta} = rQ.$$

Sit porro

$$a + \frac{b \sin^2 \alpha}{c \cos^3 \beta} - g \,\mathrm{tang.}\, u = Q;$$

fiet post operationem primam

$$a + \frac{br^2 \sin^2 \alpha}{cr^3 \cos^3 \beta} - gr \,\mathrm{tang.}\, u,$$

Hosted by Google

dein per operationem secundam fiet

$$a + r^{2-3} . r^{3-2} \cdot \frac{b \sin.^2 \alpha}{c \cos.^3 \beta} - gr \operatorname{tang.} u = a + \frac{b \sin.^2 \alpha}{c \cos.^3 \beta} - gr \operatorname{tang.} u,$$

quod simul est

$$= a + \frac{rb \operatorname{Sin.}^2 \alpha}{c \operatorname{Cos.}^3 \beta} - g \operatorname{Tang.} u.$$

Atque hinc per operationem tertiam, quum in $gr \operatorname{tang.} u$ sit $\mu = 1$ et ν ubique sit 0, ubique r^ν per $r^{\mu-\nu}$ multiplicando, ex

$$ar^0 + \frac{r^0 b \sin.^2 \alpha}{c \cos.^3 \beta} - gr \operatorname{tang.} u$$

fiet

$$ar + \frac{rb \sin.^2 \alpha}{c \cos.^3 \beta} - gr \operatorname{tang.} u = ar + \frac{r^2 b \operatorname{Sin.}^2 \alpha}{c \operatorname{Cos.}^3 \beta} - g \operatorname{Tang.} u = rQ.$$

Idem ad eum casum etiam facile applicatur, ubi sive numerator N sive denominator D, sive uterque quantitas complexa fuerit: nempe tam cum numeratore quam denominatore peractis seorsim prius quæ dicta sunt, si ex N fiat $r^k N$, et $r^p . D$ ex D, eodem modo erit $\frac{N}{D} \cdot r^{k-p}$ per r^{p-k} multiplicandum ut supra, et singulis terminis ita tractatis, reliqua ita ut antea peraguntur.

Ex. gr. Sit

$$\frac{a + b \sin.^2 \alpha}{d + c \cos. \beta} + \operatorname{tang.} \gamma = Q;$$

ex $a + b \sin.^2 \alpha$ fiet $ar^2 + br^2 \sin.^2 \alpha$, $d + c \cos. \beta$ autem fiet $dr + cr \cos. \beta$, adeoque ex

$$\frac{a + b \sin.^2 \alpha}{d + c \cos. \beta} \quad \text{fiet} \quad \frac{r^2 (a + b \sin.^2 \alpha)}{r (d + c \cos. \beta)};$$

et

$$r \cdot \frac{a + b \sin.^2 \alpha}{d + c \cos. \beta} + r \operatorname{tang.} \gamma = rQ.$$

atque idem simul

$$= \frac{ar^2 + b \operatorname{Sin.}^2 \alpha}{dr + c \operatorname{Cos.} \beta} + \operatorname{Tang.} \gamma = rQ.$$

Quid faciendum sit, si quid in expressione signo radicali subfuerit, exemplum sequens ostendere potest. Sit

Hosted by Google

$$a + b\sqrt[3]{c - \cos^2 \alpha} = Q;$$

si modo dicto tractetur id, quod signo radicali subest, fiet $r^2c - r^2\cos^2\alpha$, quod sit $= A$; erit

$$\sqrt[3]{rA} = \sqrt[3]{r^3c - r^3\cos^2\alpha} = r\sqrt[3]{c - \cos^2\alpha}$$

atque

$$ra + rb\sqrt[3]{c - \cos^2\alpha} = rQ,$$

et idem

$$ra + b\sqrt[3]{r^3c - r\,\mathrm{Cos}^2\alpha} = rQ.$$

Scholion 3. Pro tribus lateribus anguli prodeunt adhuc alia formula, calculo logarithmico aptiore.

Erat (pag. 135)

$$\cos. c' = 1 - 2\left(\sin. \frac{c'}{2}\right)^2$$

item

$$\cos. c' = 2\left(\cos. \frac{c'}{2}\right)^2 - 1.$$

Eratque (pag. 138)

$$\cos. c' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

atque hinc

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1 - 2\left(\sin. \frac{c'}{2}\right)^2,$$

et

$$\left(\sin. \frac{c'}{2}\right)^2 = \frac{c^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab} =$$

$$= \frac{1}{ab}\,\frac{c + a - b}{2}\,\frac{c - a + b}{2}$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{c + a + b}{2} - b\right)\left(\frac{c + a + b}{2} - a\right);$$

et si ponatur

$$P = \frac{a + b + c}{2},$$

est

$$\left(\sin. \frac{c'}{2}\right)^2 = \frac{1}{ab}(P - a)(P - b).$$

Hinc

$$\log. \sin. \frac{1}{2}c' = \frac{\log.(P-a) + \log.(P-b) - \log. a - \log. b}{2}.$$

Hosted by Google

Item

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2\left(\cos.\frac{c'}{2}\right)^2-1;$$

ergo

$$\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{4ab}=\left(\cos.\frac{c'}{2}\right)^2;$$

et

$$\frac{(a+b)^2-c^2}{2\,.\,2ab}=\left(\cos.\frac{c'}{2}\right)^2=\frac{a+b+c}{2}\;\frac{a+b-c}{2}\;\frac{1}{ab}=\frac{1}{ab}\,P(P-c).$$

Scholion 4. E latere b cum angulis adiacentibus a', c' (Fig. 142.) reperitur area sic: est

$$x:y=1:\cot.\,c';$$

hinc

$$y=x\cot.\,c',\quad b-y=x\cot.\,a';$$

adeoque

$$b=x\cot.\,c'+x\cot.\,a';$$

atque

$$x=\frac{b}{\cot.\,c'+\cot.\,a'};$$

et area

$$=\frac{b^2}{2\,(\cot.\,a'+\cot.\,c')}.$$

Scholion 5. (Fig. 142.). E duobus lateribus a, b et intercepto c' reperitur area sic:

$$a:x=1:\sin.\,c';$$

hinc

$$x=a\sin.\,c';$$

et area

$$=\frac{1}{2}\,ab\sin.\,c'.$$

Scholion 6. (Fig. 143.). Data summa a duorum laterum x et y, atque altitudine b et basi c, reperitur angulus A sic:

$$x:b=1:\sin.\,A;$$

hinc

$$x=\frac{b}{\sin.\,A},$$

et

$$y=a-x=a-\frac{b}{\sin.\,A}.$$

Hosted by Google

Porro

$$z : b = 1 : \text{tang.}\, A\,;$$

hinc

$$z = \frac{b}{\text{tang.}\, A} = b \cot.\, A\,;$$

atque

$$b^2 = y^2 - (c - z)^2;$$

et substitutione facta, est

$$b^2 = a^2 - \frac{2ab}{\sin.\, A} + \frac{b^2}{\sin^2.\, A} - c^2 + 2cb \cot.\, A - b^2 \cot^2.\, A;$$

atque substituendo valorem cotangentis, et terminis omnibus membri dextri ad denominatorem $\sin^2.\, A$ reductis, fiet

$$\frac{a^2 \sin^2.\, A + b^2 - 2ab \sin.\, A - c^2 \sin^2.\, A - b^2 \cos^2.\, A + 2cb \sin.\, A \cos.\, A}{\sin^2.\, A} = b^2\,;$$

et multiplicando utrinque per $\sin^2.\, A$, erit membro dextro subtracto,

$$0 = a^2 \sin^2.\, A - 2ab \sin.\, A - c^2 \sin^2.\, A + 2cb \sin.\, A \cos.\, A\,;$$

nam

$$b^2 - (b^2 \cos^2.\, A + b^2 \sin^2.\, A) = 0,$$

quia

$$\sin^2. + \cos^2. = 1\,;$$

hinc utrinque per $\sin.\, A$ dividendo, est

$$a^2 \sin.\, A - 2ab - c^2 \sin.\, A + 2cb \cos.\, A = 0\,;$$

et hinc $2ab$ addendo, ac per $2cb$ utrinque dividendo, erit

$$\frac{a^2 - c^2}{2cb} \sin.\, A + \cos.\, A = \frac{a}{c}\,;$$

e quo, quum $\cos.\, A$ per $\sin.\, A$ exprimi queat, A reperitur.

Scholion 7. Occasio tamen per hoc se offert artem sequentem in casibus similibus expedientem ostendendi. Ponatur

$$\frac{a^2 - c^2}{2cb} = \text{tang.}\, q\,;$$

Hosted by Google

scilicet quæratur in rubrica tangentium quantitas $\frac{a^2 - c^2}{2cb}$, cui respondens arcus sit q; erit

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin. q \sin. A}{\cos. q} + \cos. A = \frac{\sin. q \sin. A + \cos. q \cos. A}{\cos. q}$$
$$= \frac{\cos. (A - q)}{\cos. q};$$

hinc

$$\frac{a}{c} \cos. q = \cos. (A - q),$$

et A est arcus ipsi $\frac{a}{c} \cos. q$ tanquam cosinui respondens addito arcu q; nempe arcus q quæratur cosinus, et multiplicetur per $\frac{a}{c}$, ac quæratur in rubrica cosinuum arcus huic tanquam cosinui respondens, arcus is erit $= A - q$; itaque, ut A prodeat, ei addatur q.

Scholion 8. (Fig. 144.). Sit polygoni laterum numerus n, basis b, radius a, altitudo c: est

$$a : \tfrac{1}{2} b = 1 : \sin. \tfrac{1}{2} v;$$

hinc

$$\tfrac{1}{2} b = a \sin. \tfrac{1}{2} v,$$

et perimeter

$$= 2na \sin. \tfrac{1}{2} v;$$

porro

$$c : \tfrac{1}{2} b = 1 : \tang. \tfrac{1}{2} v,$$

hinc

$$c = \frac{b}{2 \tang. \frac{1}{2} v};$$

adeoque area

$$A = nb \cdot \frac{c}{2} = nb \cdot \frac{b}{4 \tang. \frac{1}{2} v} = \frac{nb^2}{4 \tang. \frac{1}{2} v}$$

et simul

$$= \frac{bna \sin. \frac{1}{2} v}{2 \tang. \frac{1}{2} v};$$

hinc ex A et n etiam, quia tum datur v, reperitur b.

Hosted by Google

Est c etiam

$$= a \cos. \frac{1}{2} v,$$

et

$$\frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b \,.\, a \cos. \frac{1}{2} v$$

adeoque

$$= a \sin. \frac{1}{2} v \,.\, a \cos. \frac{1}{2} v = a^2 \sin. \frac{1}{2} v \cos. \frac{1}{2} v.$$

VIII. Sinus autem computati sunt, dum methodus facilior adhuc ignota esset, modo sequente:

1. Aliquot sinus noti erant, nempe sinus 30°, sinus 18°, sin. 45°: quum latus hexagoni sit = radio, adeoque $\frac{1}{2} r = \sin. 30°$, ita latus decagoni et quadrati circulo inscripti data fuerunt.

2. E sinibus duorum arcuum a et b $\sin.(a \pm b)$, et hinc arcus dimidii duplique sinus reperiebatur (pagg. 134 &).

3. Hinc etiam ad sinum arcus non quidem unius minuti sed eo minoris deventum est, in arcubus exiguis vero minutum haud excedentibus animadvertebant, quod demonstrari potest debetque, sinus esse uti arcus; scilicet pro denominatore, qui sumitur = 1 cum 10 cifris, error una eiusmodi parte minor est. Imo etiamsi (Fig. 145.) arcus α incrementum unius minuti dicatur α' et item eiusdem α incrementum $a < \alpha'$ sit; incrementa sinuum, nempe i' et i, sunt ut incrementa arcuum, quasi esset in triangulis similibus $i : i' = a : a'$, arcubus tam exiguis a chordis eorundem pro tanto denominatore sensu dicto haud differentibus.

4. Tum reperto sin. 1′ per formulam sinus $(a + b)$ poterat sinus cuiusvis arcus $(A + 1')$ reperiri, si sin. A datus erat; ita per formulas $\sin.(a + b)$ et $\sin.(a - b)$ omnimode applicatas computati sunt omnes; et una via reperti inserviebant certitudini calculi comprobandæ, si valoribus alia via prodeuntibus æquales reperiebantur.

5. De his tamen, uti et de applicatione calculi per logarithmos alleviati (Tom. I. pag. 109), necnon de constructione tabularum logarithmicarum, tabularumque trigonometricarum speciali, additum est aliquid in Tom. I. pagg. 512—520, 569—581.

Hosted by Google

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SECTIO III.

PLANIMETRIAE PARS SECUNDA.

22.

Sequitur Motus Geometricus Compositus: nempe duæ priores operationes primitivæ (uti pag. 23 atque in Arbore dictum est) coniunguntur. Tractatur autem prius casus simplicior: nempe punctum e rectæ A certo puncto determinato $*$ moveatur in A semper porro versus dextram, et alterum ex eodem puncto $*$ ad lævam in infinitum, dicaturque *abscissa* (literarum postremarum aliqua ex. gr. x designata generaliter) via quævis puncti sive ad dextram sive ad lævam, eo cum discrimine, ut viæ ex. gr. ad dextram positivæ accipiantur, et negativæ ad lævam; atque simul punctum motum rectam B, quocunque angulo secuerit hæc rectam A in $*$, secum ferat, ita ut pars ima eius sit punctum motum, et ipsa ad dextram angulum semper priori æqualem faciat, ac si angulus BA moveretur in plano, ita ut A semper in $\overline{A}$ moveatur porro; et simul punctum p moveatur in B e certo loco certa lege generali, per quam puncti p in B moti locus ad finem cuiusvis x determinetur; atque dicatur pro quovis x recta, quæ a fine ipsius x in B usque ad locum dictum puncti p est, *ordinata ipsius* x; denotenturque *ordinatae* generaliter item per literarum postremarum aliquam, ex. gr. y; abscissa autem quævis eiusque ordinata *coordinatae* nominentur, et quidem *rectangulares*, si angulus AB rectus sit. Prætereaque si lex dicta sit $f(x) = y$, valores ipsius $f(x)$ omnes, si qui positivi fuerint, in plaga superiore, et negativi (si fuerint) in inferiore accipiantur; valor o autem

Hosted by Google

ipsius $f(x)$, si esset pro certo valore 0 aut alio ipsius x, omnino in fine illius x accipiatur, quum ibidem $y = 0$ sit. Dicitur punctum * *principium abscissarum*, et $\overline{A}$ *linea abscissarum* vel *axis*.

·221.

De iis, quorum quodvis punctum geometrice sensu stricto construi potest.

Scholion. Si $\alpha(x, y) = \beta(x, y)$ adeoque $\alpha(x, y) - \beta(x, y) = 0$ fuerit, atque $\alpha(x, y) - \beta(x, y)$ nullo termino gaudeat, qui non sub formam $ax^p y^q$ cadat, a quantitatem constantem sive 0 sive aliam, ipsorum p, q autem quovis sive 0 sive alium exponentem integrum positivum denotantibus: dicitur complexus omnium extremitatum ipsorum y per æquationem dictam determinatarum *linea ordinis* m-ti, si $p + q$ in aliquo termino, in quo factor constans haud $= 0$ est, sit $= m$, neque in ullo sit maior. Interim etiamsi p, q incommensurabilia fuerint, complexus dictus considerari potest.

Si omnes termini adfuerint, qui salvo ordinis numero m adesse possunt: *aequatio plena ordinis m* audit. Ex. gr. pro literis alphabeti prioribus constantes, inter quas etiam 0 esse potest, denotantibus, æquatio ordinis 1 est:

$$a + bx + cy = 0,$$

ordinis 2 est:

$$a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy = 0,$$

ordinis 3 est:

$$a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy + gx^3 + hx^2y + ixy^2 + ky^3 = 0,$$

. . .

In genere autem æquationem *plenam* ordinis n-ti e terminis numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ constare e theoria combinationum facile patet.

·2211.

Sed hic prius nonnisi de *lineis ordinis secundi* agetur, quæ omnes (Tom. I. pag. 116) pro coordinatis rectangulis sub formam

Hosted by Google

$$y^2 = x - \frac{x^2}{\pm a},$$

id est

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{\pm a}}$$

venire possunt; omnesque, ut infra patebit, sunt plani cum cono factæ sectiones; uti conversim omnes plani sectiones cum cono sub formam dictam cadunt; atque etiam manifestum est,

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{\pm a}}$$

pro quovis dato x geometrice (sensu stricto) construi posse; quum data vel posita unitate prodeat x^2, pariter $\frac{x^2}{\pm a}$ (pag. 77), et subtracto hoc ex x, radix quadrata e residuo (pag. 75) extrahi pro unitate priore queat.

Primariis autem, quæ sectiones conicas sive lineas secundi ordinis concernunt, traditis, quædam magis necessaria e theoria linearum cuiusvis ordinis generali referentur.

Scholion 1. NEWTON lineas secundi ordinis, adeoque sectiones conicas lineas ordinis primi dixit, rectam, quæ ordinis primi est, quasi ordinis 0-ti et lineas sequentis ordinis curvas primi ordinis considerando: at prouti libuerit, ita accipi posse manifestum est. Quod vero recta quævis pro data abscissarum linea, principioque abscissarum posito, sub formam

$$a + bx + cy = 0$$

veniat, hinc patet.

Erit recta exprimenda $\mathfrak{CD}$ (Fig. 146.) respectu lineæ abscissarum $\mathfrak{AB}$ et principio $*$ abscissarum aut $\parallel \mathfrak{AB}$, aut secabit hanc alicubi ex. gr. in $\mathfrak{c}$. Ex æquatione primi ordinis

$$a + bx + cy = 0$$

sequitur

$$y = -\frac{a}{c} - \frac{b}{c}x,$$

quod venit (pro p, q constantibus) sub formam

$$y = p + qx.$$

Hosted by Google

Si $\mathfrak{CD} \parallel \mathfrak{AB}$, tum ponatur $b = 0$ in

$$a + bx + cy = 0,$$

et fiet $-\frac{bx}{c}$ æquale 0 in $\frac{-a}{c} - \frac{bx}{c} = y$, adeoque

$$\frac{-a}{c} = y,$$

ubi $\frac{-a}{c} = p$ poni potest.

Si vero $\mathfrak{CD}$ secet lineam abscissarum in $\mathfrak{c}$, demissis perpendicularibus β, y, y', per triangulorum similitudinem erit

$$\alpha + \gamma : \beta = \gamma + x : y,$$

adeoque

$$y = \frac{(\gamma + x)\beta}{\alpha + \gamma} = \frac{\gamma\beta}{\alpha + \gamma} + \frac{x\beta}{\alpha + \gamma},$$

quod sub formam $y = p + qx$ venit, si $\frac{\gamma\beta}{\alpha + \gamma}$ quantitas omnino constans p dicatur, ita $\frac{\beta}{\alpha + \gamma}$ per q denotetur. Pariter pro x' (nempe negativo x) est

$$\alpha + \gamma : \beta = x' + \gamma : y';$$

atque hinc

$$y' = \beta \frac{x' + \gamma}{\alpha + \gamma} = \frac{\beta\gamma}{\alpha + \gamma} + \frac{\beta x'}{\alpha + \gamma};$$

nempe si x' ad lævam negative accipiatur, erit k negativum et $= \vdash x' + \gamma$, atque ita prodibit

$$\vdash y' = \frac{\beta\gamma}{\alpha + \gamma} + \frac{\beta(\vdash x')}{\alpha + \gamma};$$

et hic quoque

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha + \gamma} = p \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\alpha + \gamma} = q$$

est, ut prius erat.

Pariter (Fig. 147.), ubi

$$\alpha - \gamma : \beta = x - \gamma : y,$$

ita si plane in $*$ fiet sectio, patet.

Hosted by Google

Scholion 2. Lineæ secundi ordinis autem tractabuntur ordine sequente; tres sunt, nempe *parabola*, *ellipsis* et *hyperbola* (Tom. I, pagg. 116 &, ubi et primaria eas concernentia definita sunt).

I. Prius formæ ipsæ, quatenus e lege fluunt, atque *axes* in singulis, et simul *aliquid* de *insignibus*, quas *sectiones conicae* in coelis et terris *partes* agunt.

II. Linearum harum, tam speciei eiusdem quoad parametros diversas, quam diversæ speciei, comparatio.

III. Mutatio initii abscissarum pro ellipsi et hyperbola in centrum.

IV. *Focus* nempe distantia eius a vertice, ita *excentricitas*, *id est distantia foci a centro*, in singulis.

V. *Radii vectoris* quantitas pro singulis tribus.

VI. Atque hinc *modus* singulas *construendi*: prius quodvis punctum, *quamvis omne nunquam*, geometrice sensu stricto, tum *mechanice motu continuo*.

VII. *Tangens subtangensque*, *normalis subnormalisque* in singulis, nempe *pro data quavis abscissa*.

VIII. Hinc *applicationum quarundam explicatio*.

IX. *Diametri* omnes nempe lineæ, quæ omnes chordas certæ eidem rectæ parallelas bisecant, in singulis: ubi notandum, proprie sic dicta diametro nonnisi lineam secundi ordinis gaudere.

X. *Intersectiones linearum secundi ordinis*, atque inde resolutio certarum æquationum.

XI. Areæ per lineas istas et coordinatas clausæ, et longitudo arcuum.

I.

Determinantur modo sequente *formae linearum*, quarum pro coordinatis rectangulis (abscissa x et ordinata y) æquatio est

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{\pm a}},$$

ubi (iuxta Tom. I. pag. 116) unitas ad extractionem radicis requisita *parameter* dicitur; nempe $x^2 : a$ manet idem; pro quoto enim hic linea accipitur, et sive ex. gr. pro $x : a = 2 : 3$ fit $x^2 : a = 2x : 3$; sive, si $x^2 = \alpha$ pro $u = 1$, fiet $x^2 = n\alpha$ pro $(u : n) = 1$; adeoque si ex. gr. $\alpha : a = 2$, erit $n\alpha : a = 2n$, et prius quoad $u = 1$, posterius quoad $(u : n) = 1$ accipienda.

Sit $x = ka$ pro a constante positivo, k vero aut $= 0$ aut positivo aut negativo, atque aut < 1 aut $= 1$ aut > 1.

Hosted by Google

1. Pro $a=\infty$ fiet $x-\frac{x^2}{\pm a}=x$ pro quovis finito x; nam $\frac{x^2}{\pm a}\backsim 0$ pro quovis finito x, si $a\backsim\infty$; itaque (Tom. I. pag. 46) $\frac{x^2}{\pm a}$ pro quovis finito x, si $a=\infty$, fit $=0$. Tum vero $y=\sqrt{x}$ dat *parabolam*, ob rationem paulo inferius tradendam ita dictam; cuius formæ ductus ex æquatione ipsa modo sequente intelligitur.

Sit k positivum aut negativum, ab ipso 0 incipiendo crescens in ∞, et sit $x=ka$, atque sit prius x positivum, adeoque $+x$; erit pro $k=0$ etiam $x=ka=0$, adeoque et $y=\sqrt{x}=0$. Si k positive crescat inde a 0 in ∞,

$$y=\sqrt{x}=\sqrt{ka}$$

crescet inde a 0 in ∞, semperque duos valores habebit oppositos, alioquin æquales. Si k negative crescat inde a 0 in ∞, ordinatæ omnes imaginariæ erunt, quia tum $x=ka$ negativum, adeoque $y=\sqrt{x}$ radix quadrata e negativo erit.

2. Pro a finito et positivo

$$y=\sqrt{x-\frac{x^2}{a}}$$

dat *ellipsim*; et quidem ordinatam 0 pro $k=0$ adeoque $ka-\frac{k^2a^2}{a}=0$, pariter $y=0$ pro $k=1$ adeoque $x=a$, quia tum

$$ka-\frac{k^2a^2}{a}=ka-k^2a$$

fit $=a-a$. Si vero k positive crescat inde a 0 usque ad 1, erit $k<1$, adeoque $k>k^2$, consequenter $ka-k^2a$ semper positivum erit, crescetque

$$y=\sqrt{(k-k^2)a}$$

inde a 0, donec $k-k^2$ maximum fiat, (quod fit pro $k=\frac{1}{2}$ adeoque $x=\frac{1}{2}a$), et abinde decrescet usque ad 0; prodibuntque semper duæ ordinatæ oppositæ, alioquin æquales.

Si vero k positivum et >1 fuerit, fiet semper $k^2>k$, adeoque $(k-k^2)a$ erit negativum, atque ordinata, nempe radix e negativo, ima-

Hosted by Google

ginaria fiet. Pariter pro k negativo; nam k^2 semper positivum est, adeoque $(k-k^2)a$ negativum erit.

Sunt etiam a meditullio ipsius a, adeoque centro, ad eandem distantiam u ad dextram lævamque ordinatæ æquales: nam pro

$$x=\frac{1}{2}a-u,$$

fit

$$x-\frac{x^2}{a}=\frac{1}{2}a-u-\frac{\frac{1}{4}a^2-au+u^2}{a}=\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a},$$

et idem prodit pro

$$x=\frac{1}{2}a+u.$$

Quod autem $y=$ quantovis parvo ω prodire queat, sic patet: ex

$$\omega=\sqrt{ka-k^2a}$$

fit quadrando, æquatio quadratica

$$k^2-k+\frac{\omega^2}{a}=0,$$

et

$$k=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\omega^2}{a}},$$

ubi quia tum k positivum <1 esse debet, oportet $\frac{1}{4}>\frac{\omega^2}{a}$ esse, ut radix realis addatur ipsi $\frac{1}{2}$, aut ex $\frac{1}{2}$ subtrahatur; fiet autem pro ω utvis parvo et quantovis, dummodo $\frac{\omega^2}{a}<\frac{1}{4}$ sit; patetque pro eodem ω duos ipsius k valores prodire, prouti radix positiva vel negativa accipitur; et quidem $k \backsim 0$ vel 1, dum $\frac{\omega^2}{a} \backsim 0$, atque

$$\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\omega^2}{a}} \backsim \sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2},$$

adeoque

$$\frac{1}{2}\vdash\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\omega^2}{a}}=k \backsim 0;$$

ita

$$\frac{1}{2}\dashv\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\omega^2}{a}}=k \backsim 1.$$

Hosted by Google

Patet etiam ordinatas a centro ad dextram lævamque decrescere usque ad 0: erat enim pro distantia u a centro

$$y = \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}};$$

quod si u crescat, adeoque distantia a *vertice*, nempe ubi $x = 0$, decrescat, manifesto decrescit.

3. Pro $-a$, item finito, dat

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{-a}} = \sqrt{x + \frac{x^2}{a}}$$

hyperbolam; fitque $y = 0$ pro $x = 0$; at pro x positive crescente in infinitum gaudet y semper duobus valoribus oppositis, alioquin æqualibus, crescentibus in infinitum. Si vero x negativum sit $= ka$ pro a positivo et k negativo, fiet y imaginarium, donec $k = -1$ evadat; nam tum

$$x + \frac{x^2}{a} = ka + \frac{k^2a^2}{a} = a(k + k^2),$$

atque k negativum et < 1, adeoque $k \ngtr k^2$ est, itaque $k + k^2$ negativum adeoque radix e negativo imaginaria est. Pro $k = -1$ autem, fit negativum $x = -a$, atque

$$y = \sqrt{a - a} = 0;$$

at pro k negativo et $\ngtr 1$ fiet $k^2 \ngtr k$, itaque $k + k^2$ erit positivum, adeoque valores ipsius y erunt item bini oppositi quidem, sed alioquin æquales, crescente x cum k in infinitum, crescentes in infinitum. Itaque exorietur linea quatuor brachiorum e duobus verticibus, recta a (quæ respectu verticis primarii negativa est) distantibus, in infinitum extensorum.

Suntque duæ partes hyperbolæ, interruptæ quidem, æquales; quia ordinatas ab utroque vertice dicto æquidistantes æquales esse patet, si e meditullio rectæ $x = -a$, nempe *centro axeos hyperbolae*, omnino negativi, consideretur quantitas ordinatarum ad distantiam u tam ad dextram quam ad lævam: est nempe ad dextram

Hosted by Google

$$x = u - \frac{a}{2},$$

itaque

$$x + \frac{x^2}{a} = u - \frac{a}{2} + \frac{u^2 - au + \frac{a^2}{4}}{a} = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{4};$$

atque idem ad lævam prodit ad distantiam u; nempe ibi x negativum inde a *vertice primario* est $= -\frac{1}{2}a - u$, itaque

$$x + \frac{x^2}{a} = -\frac{a}{2} - u + \frac{\frac{a^2}{4} + au + u^2}{a} = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{4}.$$

4. Si vero (iuxta Tom. I. pag. 121) valores imaginarii accipiantur, quum hi æquo realitatis iure quoad -1 gaudeant, uti aliæ quoad $+1$: æquatio parabolæ plane talem parabolam, æquatio ellipseos ellipsim quoad $+1$ quidem exhibebit, et simul hyperbolam quoad -1 realem; et æquatio hyperbolæ simul ellipsim; æquatio hyperbolæ æquilateræ autem, ubi nempe $a = 1$, *valoribus* ordinatæ *imaginariis* exhibebit *circulum*, uti *circuli aequatio hyperbolam aequilateram*; attamen quoad $+1$, -1 realia diversis coloribus aut alio quopiam modo distinguere necesse est (ut Tom. I. pag. 202 dictum est).

5. *Axis maior* est $x = \pm a$; in parabola est ∞, in ellipsi autem est $x = \mp a$; in hyperbola vero $x = \vdash a$; *centro* igitur *parabola nullo gaudet*, nempe rectæ a vertice in infinitum abeuntis non datur punctum, eam in duas partes æquales dividens; in ellipsi et hyperbola vero datur meditullium; si et $a = 1 =$ parametro, ellipsis fit circulus diametri 1, et *hyperbola* dicitur *aequilatera*. Parabola autem dici potest tam *ellipsis* quam *hyperbola* axi maiore infinito; nempe si $a \backsim \infty$, expressio $\backsim \sqrt{x}$.

Axis minor est duplum ordinatæ, quæ est e meditullio axeos maioris: in *parabola igitur nullus axis minor est. In ellipsi* vero est

$$2\sqrt{x - \frac{x^2}{a}} \quad \text{pro} \quad x = \frac{a}{2};$$

adeoque est

$$= 2\sqrt{\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4a}} = 2\sqrt{\frac{2a^2 - a^2}{4a}} = 2\sqrt{\frac{a}{4}} = \sqrt{a}.$$

In hyperbola autem est

$$2\sqrt{x + \frac{x^2}{a}} \quad \text{pro} \quad x = -\frac{a}{2},$$

nempe

$$2\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4a}} = \sqrt{-a};$$

itaque *axis minor hyperbolae est imaginarius.* In circulo axis minor = axi maiori = 1, nempe $\sqrt{1} = 1$; in hyperbola æquilatera est axis minor $= \sqrt{-1}$.

6. Nomina *parabola*, *ellipsis* et *hyperbola* autem inde exorta sunt, quod, si pro parametro singulis eadem vertex communis, lineaque abscissarum eadem fuerit, et ad dextram sit focus $\mathfrak{f}$ parabolæ, atque distantia ipsius $\mathfrak{f}$ a vertice ad lævam transferatur in linea abscissarum, et e fine huius erigatur perpendicularis D, a veteribus *directrix* dicta: cuiusvis puncti $\mathfrak{b}'$ parabolæ distantiæ ab $\mathfrak{f}$ et D *aequales* erunt, cuiusvis puncti ellipseos autem distantia ab $\mathfrak{f}$ *minor* est quam a D, et cuiusvis puncti hyperbolæ distantia ab $\mathfrak{f}$ *maior* quam a D est. Nempe (Fig. 148.) sit $\mathfrak{b}'\mathfrak{d}$ ordinata parabolæ; erit pro eodem x et parametro eadem, ordinata ellipseos minor

$$= \sqrt{x - \frac{x^2}{a}} = \mathfrak{b}\mathfrak{d},$$

et ordinata hyperbolæ fiet maior

$$= \sqrt{x + \frac{x^2}{a}} = \mathfrak{b}''\mathfrak{d};$$

estque

$$\mathfrak{d}\mathfrak{D} = \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' = \mathfrak{b}''\mathfrak{c}'';$$

sed

$$\mathfrak{f}\mathfrak{b} < \mathfrak{f}\mathfrak{b}' < \mathfrak{f}\mathfrak{b}''.$$

7. Potuissent quidem lineæ dictæ etiam sic definiri: si a et b aut

Hosted by Google

puncta denotent, sive diversa sive in unum coincidentia, aut si non utrumque punctum denotet, duntaxat a sit punctum et b rectam denotet; fueritque in plano talis linea L, cuius si puncti cuiuslibet $\mathfrak{p}$ distantia ab a dicatur a', et distantia a b dicatur b': aut quodvis $a'+b'$ aut quodvis $a'-b'$ eidem constanti c, quæ etiam $=0$ esse potest, æqualis sit: erit L *parabola*, *recta*, *ellipsis* aut *circulus*, vel *hyperbola*, uti inferius patebit; quo pacto et parabola, recta, circulus, hyperbolaque eodem pertinent; nempe in singulis est $a'-b'=c$, in circulo et ellipsi autem est $a'+b'=c$. Recta excludi, aut cuiusvis certa revolutione circa axem generata includi possunt; et distinctio specialior facilis est.

Scholion. Sectiones conicæ insignes in cœlis et terra partes agunt: corpora cœlestia cursum earum sequuntur; nempe (Fig. 149.) quum attractio universalis sit in ratione composita ex inversa duplicata distantiarum et directa massarum trahentium: si in $\mathfrak{c}$ ponatur vis attractiva, et concipiatur corpus ex $\mathfrak{a}$ vi illa attractiva ipsius $\mathfrak{c}$, quæ ad $\mathfrak{a}$ est, constanter eadem manente, motu uniformiter accelerato usque ad $\mathfrak{c}$ decidere, fiatque ad $\mathfrak{c}$ velocitas finalis v; atque iam relicta vi centripeta uti est, si corpus in $\mathfrak{a}$ vi momentanea velocitatis $\mathfrak{ab}$ proiiciatur: describetur, si $\mathfrak{ab}=v$, *parabola*, si $\mathfrak{ab}<v$, tum *ellipsis*, et *hyperbola*, si $\mathfrak{ab}>v$. Est autem $\mathfrak{c}$ focus sectionis conicæ, quem corpus proiectum ad idemque punctum retractum prius crescente celeritate petit, postea segnior semper fit usque quo revertitur, in parabola hyperbolaque nunquam reversum, in aliorum solium abyssum mergitur. Similem cursum plurimæ summam illusionem producentes vires attractivæ terrestres tenent.

Proiectorum ad terram via ad sensum parabola est, si directio proiectionis verticalis non sit.

Focus quoque locus insignis est; nam præter iam dicta, in parabola radii omnes lucis, caloris, soni, e foco ad parabolam vel paraboloidem (de qua statim) cadentes, axi paralleli, et hi in focum reflectuntur; nam angulus, quem radius vector cum tangente facit, est æqualis ibidem illi, cuius verticalis est is, quem recta axi parallela item cum tangente eadem ad idem punctum facit. Hinc si *fornix domus parabolois* esset, lampas in *foco* ardens, (cuius fumus *ope canaliculi superius facti in caminum eve-*

Hosted by Google

heretur), lumine deiecto domum totam illuminaret, quamvis decrescente versus marginem lucis gradu, quod tamen in domo quavis etiam ope coni truncati aliquatenus obtineri potest; ut et aëris rivus facile regatur, et vaporibus noxiis evectis, lumen almum clarius tranquillumque pluribus studentibus inserviat. Notandum autem est:

1. Lychnii oleique quantitatem qualitatemque debitam requiri.

2. Conum ex alba subtili papyro *velin* dicta conficiendum esse; ne nimis opaca umbram proiiciat; duo enim quoad lucem vitanda sunt oculorum aciem servaturo; *gradus nimius* lucis sive in excessu sive in defectu, et *gradus nimis differentes* sive simul sive subito post se invicem.

3. In aliquo canaliculi loco diametrum eius vicissitudinibus tempestatis attemperare et facile et necesse est; rivus aëris enim adeo varius est, ut *fornacibus pro hieme exstructis*, *infirmiores vere autumnoque* (calorem quidem leniorem extrinsecus deposcentes), *aut algere cogantur*, *aut oculis pulmonibusque laborent*. Sit igitur, etsi non huius loci sit, *fornacem* qua utor *trium mutationum* suadere, qua ad nutum quasi fumus diversas longiores brevioresve vias capit, quarum omnino posteriores veri autumnoque conveniunt.

4. Potest etiam cono truncato minori tubus item papyraceus agglutinari, et simul cum candelabro portatilis fieri, idemque et ad unam candelam sebaceam applicari; dummodo candelabrum quam minimum umbræ proiiciat, lumenque eandem retineat altitudinem; quod facile obtinetur, quum hoc ipsum in tali scribatur lumine. Tubus lampadum *Argando* debetur.

Redeundo ad paraboloidem: lucerna noctu in focum eius posita, riteque obversa index horaque remota cerni possunt.

Vicissim radii e sole axi paralleli venientes urunt in foco: sed quo remotior focus, eo maior locus ustionis erit, et eo latiorem paraboloidem esse oportet.

Ita remotum susurrum auris in foco maioris paraboloidis percipiet; et vox e foco pronunciata remotius exaudietur; ita si duæ paraboloides sint e regione ad axem eundem positæ, ex unius foco missa vox lenis, nullibi in medio, sed in foco alterius quamvis remoto auditur: quod

Hosted by Google

etiam loquentibus, qui, priusquam ad focum per secula remotum perventum fuerit, a nemine intelliguntur, evenit.

Fornaces quoque exstrui possunt, ut ignis in foco paraboloidis ardeat; eritque in foco alterius paraboloidis e regione positæ insignis sine igne calor; latiusque in hypocausto diffundetur.

Ita radii omnes e foco uno ellipseos in alterum reflectuntur; radii illi vero, qui quacunque causa ita venientes, ut (Fig. 150.) in dimidiæ hyperbolæ foco $\mathfrak{f}$ conveniant, a hyperboloidis H facie interiore excepti, in huius foco $\mathfrak{f}$ convenient; et vicissim si hinc nempe ex $\mathfrak{f}$ procedant, ita reflectuntur, ut retrorsum continuati in $\mathfrak{f}$ secarent se invicem, adeoque disperguntur &c.

II.

Comparatio sectionum conicarum, prius speciei eiusdem quoad parametros diversas, tum earum inter se pro parametro eadem.

1. Sit $y = \sqrt{x \pm \frac{x^2}{a}} = r$ pro $u = 1$, atque pro $U = 1 = ku$ (denotante k quantitatem abstractam invariabilem Tom. I. pag. 111) sit $= R$; erit (Tom. I. pag. 114)

$$R = r \,.\, k^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad r = Rk^{-\frac{1}{2}}.$$

Itaque

$$R : r = \sqrt{k} : 1,$$

id est ordinatæ pro abscissa quavis eadem erunt uti radices quadratæ parametrorum quoad unitatem eandem acceptæ.

2. Si duæ abscissæ X et x, atque ordinatæ earum Y et y considerentur, erit $Y^2 = X$ in parabola, et $y^2 = x$; itaque y est *proportionalis media inter* 1 (nempe *parametrum*) *et abscissam*; atque

$$Y^2 : y^2 = X : x,$$

nempe *quadrata ordinatarum sunt uti abscissae.*

Ita pro *ellipsi* et *hyperbola*

$$Y^2 = X \mp \frac{X^2}{a} = \frac{aX \mp X^2}{a} = \frac{X(a \mp X)}{a};$$

Hosted by Google

et pariter

$$y^2 = \frac{x(a \mp x)}{a}$$

itaque

$$Y^2 : y^2 = X(a \mp X) : x(a \mp x).$$

3. Si e puncto quopiam eodem $\mathfrak{p}$ per omnia puncta sive parabolæ sive ellipseos sive hyperbolæ rectis conceptis, generetur (iuxta pag. 10) simile, pro quavis recta, quæ a $\mathfrak{p}$ ad punctum lineæ quodpiam $\mathfrak{f}$ est, accipiendo $k.\mathfrak{p}\mathfrak{f}$, denotante k quantitatem ut in 1.: recta inter quævis duo puncta lineæ novæ k-ies tanta erit, quam recta inter puncta lineæ prioris illis homologa (pag. 79); adeoque si abscissa quævis prioris x dicatur, et ordinata y, axis maior $\pm a$, parameter u, et X, Y, $\pm A$, U abscissam, ordinatam, axem maiorem et parametrum prioribus homologa denotent: erit

$$X = kx, \quad Y = ky, \quad U = ku;$$

atque hinc e parabola, in qua $y^2 = x$ erat, prodit nova, in qua

$$[Y^2]_{u=1} = kX \quad \text{et} \quad Y = [\sqrt{X}]_{U=ku=1}.$$

Nam

$$[\sqrt{X}]_{u=1} = [\sqrt{kx}]_{u=1} = y\sqrt{k},$$

et

$$[\sqrt{X}]_{U=ku=1} = \sqrt{k}\,[\sqrt{X}]_{u=1} = ky = Y.$$

Et hinc non solum linea nova parabola est, sed quum ipsum k, adeoque parametrum U utvis accipere liceat, sunt *omnes parabolae inter se similes. Non idem de ellipsi hyperbolaque valet*: nempe harum æquationes et altera constans a ingreditur; estque pro his, si similes fuerint, *parameter lineae* generatæ ad parametrum primitivæ, uti axis maior generatæ ad axem maiorem primitivæ, id est

$$u : U = a : A.$$

In *ellipsi* pro quovis Y est

$$[Y^2]_{U=ku=1} = X - \frac{X^2}{A}, \quad Y = \left[\sqrt{X - \frac{X^2}{A}}\right]_{U=ku=1}$$

Hosted by Google

Nam

$$Y = ky, \quad y^2 = x - \frac{x^2}{a},$$

adeoque

$$[Y^2]_{u=1} = k^2x - \frac{k^2x^2}{a} = kX - \frac{X^2}{a} = kX - \frac{kX^2}{ka} = k\left(X - \frac{X^2}{A}\right),$$

et

$$[Y^2]_{U=ku=1} = X - \frac{X^2}{A}.$$

Ita si radix ex $X - \frac{X^2}{A}$ quoad $u = 1$ dicatur r, et R dicatur radix quoad $ku = 1$ accepta: erit ut ibidem

$$R = r\sqrt{k},$$

et quum radix ex $x - \frac{x^2}{a}$ quoad $u = 1$ accepta y sit, est

$$r = y\sqrt{k},$$

nam

$$X - \frac{X^2}{A} = kx - \frac{k^2x^2}{ka} = k\left(x - \frac{x^2}{a}\right).$$

Est igitur

$$R = y\sqrt{k}.\sqrt{k} = ky = Y.$$

Pariter de hyperbola patet.

4. Si inter se comparentur, præsertim *parabola cum hyperbola*, *verba* Kepleri intelliguntur: *parabola non ut hyperbola extendit brachia, sed quasi contrahit a complexu infiniti, semper plus quidem complectens, sed eo minus appetens; cum hyperbola quo plus actu inter brachia complectitur, hoc plus etiam appetat.*

Considerentur prius incrementa ordinatarum pro incrementis abscissarum æqualibus: *in parabola* sunt incrementa ipsius y^2 æqualia, non ita in *ellipsi et hyperbola*; nempe sit abscissæ incrementum i, et ω incrementum ordinatæ, erit

$$(y + \omega)^2 - y^2 = x + i - x = i$$

pro quavis abscissa x. In hyperbola autem est

$$(y + \omega)^2 = x + i + \frac{(x + i)^2}{a} = \frac{ax + ai + x^2 + 2xi + i^2}{a},$$

e quo subtracto

$$y^2 = \frac{ax + x^2}{a},$$

manet

$$\frac{ai + 2xi + i^2}{a},$$

quod dum $x \backsim \infty$, manifesto $\backsim \infty$.

Fiat iam (Fig. 151.) e vertice a hyperbolæ (qui sit simul parabolæ vertex) perpendicularis ipsi $\frac{\sqrt{a}}{2}$ æqualis; atque ducatur per extremitatem huius e centro c hyperbolæ recta: in hyperbola $z - y \backsim 0$, in parabola vero $\backsim \infty$.

Nempe si distantia verticis a centro positive accipiatur, (quamvis axis maior $-a$ et axis minor hyperbolæ $\sqrt{-a}$ sit), erit

$$\frac{a}{2} : \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{a}{2} + x : z,$$

unde duos priores terminos per $\frac{\sqrt{a}}{2}$ dividendo est

$$\sqrt{a} : 1 = \frac{a}{2} + x : z,$$

atque

$$z = \frac{\frac{a}{2} + x}{\sqrt{a}};$$

est vero

$$y^2 = x + \frac{x^2}{a},$$

itaque $z^2 - y^2$ seu

$$(z + y)(z - y) = \frac{\frac{a^2}{4} + ax + x^2 - ax - x^2}{a} = \frac{a}{4};$$

consequenter

$$z - y = \frac{a}{4(z + y)};$$

quod manifesto nunquam fit 0, sed $\backsim 0$; adeoque *A asymptota* est (Tom. I. pag. 315).

Hosted by Google

In parabola vero $z - y'$ (si y' ordinatam parabolæ denotet) maius quovis β, quod $> \frac{\sqrt{a}}{4}$ est, fieri potest. Nempe

$$z - y' = \frac{\frac{a}{2} + x}{\sqrt{a}} - \sqrt{x}$$

pro constantibus γ, δ poni

$$= \gamma + \delta x - \sqrt{x} = \gamma + \delta\omega^2 - \omega$$

potest, quod $\backsim \infty$, si $\omega \backsim \infty$; nempe

$$\delta\omega^2 - \omega = \omega(\delta\omega - 1)$$

et

$$\frac{\delta\omega - 1}{\delta\omega} \backsim 1,$$

nam

$$\frac{\delta\omega - 1}{\delta\omega} - 1 = \frac{\delta\omega - 1 - \delta\omega}{\delta\omega} = -\frac{1}{\delta\omega} \backsim 0.$$

At præterea etiam posito

$$z - y' = \frac{\frac{a}{2} + x}{\sqrt{a}} - \sqrt{x} = \beta,$$

est

$$\frac{a}{2} + x - \sqrt{ax} = \beta\sqrt{a},$$

atque hinc

$$-\sqrt{ax} = \beta\sqrt{a} - \frac{a}{2} - x;$$

et quadrando fit

$$ax = \beta^2 a + \frac{a^2}{4} + x^2 - \beta a\sqrt{a} - 2\beta x\sqrt{a} + ax,$$

et hinc

$$0 = x^2 - 2\beta x\sqrt{a} + \frac{a^2}{4} + \beta^2 a - \beta a\sqrt{a},$$

atque hinc

$$x = \beta\sqrt{a} \pm \sqrt{\beta a\sqrt{a} - \frac{a^2}{4}},$$

ubi pro $\beta a\sqrt{a} > \frac{a^2}{4}$, idest pro $\beta > \frac{\sqrt{a}}{4}$ radix realis, et si $\beta > \sqrt{a}$, pro

Hosted by Google

parabola positivi duo valores ipsius x dantur. Ex. gr. Sit $a = 1$, et sit etiam $\beta = 1$; erit

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2},$$

et

$$z = \frac{1}{2} + x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2},$$

$$y' = \sqrt{x} = \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}};$$

atque

$$z - y' = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}} = 1$$

erit, quia

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 3 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

III.

Mutatio initii abscissarum in centrum ellipseos hyperbolæque, ut quædam expeditius tradantur.

Aequatio facile prodibit, substituendo ipsi x summam dimidii axis maioris et rectæ, quæ a centro usque ad finem ipsius x est; axis est $+a$ in ellipsi, $-a$ in hyperbola, posterius autem dicatur u. Singulis casibus percursis (Fig. 152.) patet esse $x = u + \frac{a}{2}$ in ellipsi, et $x = u - \frac{a}{2}$ in hyperbola; dummodo prouti x accipitur positive vel negative, ita et u accipiatur; ex. gr. si x ad dextram positive, et negative ad lævam accipiatur, et u e centro ad dextram positive, et negative ad lævam accipiatur.

Eritque hoc pacto *pro ellipsi*

$$y^2 = x - \frac{x^2}{a} = u + \frac{a}{2} - \frac{\left(u + \frac{a}{2}\right)^2}{a} =$$

$$= u + \frac{a}{2} - \frac{u^2}{a} - \frac{au}{a} - \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}.$$

Hosted by Google

Pro hyperbola vero est

$$y^2 = x + \frac{x^2}{a} = u - \frac{a}{2} + \frac{\left(u - \frac{a}{2}\right)^2}{a} =$$

$$= u - \frac{a}{2} + \frac{u^2}{a} - \frac{au}{a} + \frac{a^2}{4a} = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{4}.$$

IV.

Distantia focalis, id est distantia foci a vertice, nempe extremitatis illius abscissæ, cuius ordinatæ duplum $= 1$, prodit, si pro y ponatur $\frac{1}{2}$, adeoque $\frac{1}{4}$ pro y^2. Itaque *in parabola* ex $\frac{1}{4} = x$ patet distantiam focalem esse quartam partem parametri, et *unitatem* pro $y = \sqrt{x}$ esse *quadruplam distantiae focalis*: positis itaque vertice $\mathfrak{a}$ et foco $\mathfrak{f}$ quocunque libuerit, $y = \sqrt{x}$ (radice quoad $4\mathfrak{a}\mathfrak{f} = 1$ accepta) determinabit parabolam, cuius parameter $= 4\mathfrak{a}\mathfrak{f}$; et vicissim pro data parametro $4\mathfrak{a}\mathfrak{f} = 1$ dabit $y = \sqrt{x}$ parabolam, cuius distantia focalis $\mathfrak{a}\mathfrak{f}$ erit.

In ellipsi, si in

$$\frac{1}{4} = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}$$

pro u ponatur distantia foci a centro, *eccentricitas* dicta, per E denotata: fiet

$$\frac{1}{4} + \frac{E^2}{a} = \frac{a}{4},$$

et

$$\frac{E^2}{a} = \frac{a-1}{4},$$

et hinc

$$E^2 = \frac{a^2 - a}{4},$$

atque

$$E = \frac{\sqrt{a^2 - a}}{2}.$$

In hyperbola distantia foci a centro, pariter *eccentricitas* dicta, designetur item per E; erit

Hosted by Google

$$\frac{1}{4} = \frac{E^2}{a} - \frac{a}{4},$$

et hinc

$$\frac{E^2}{a} = \frac{1 + a}{4},$$

adeoque

$$E^2 = \frac{a^2 + a}{4},$$

et

$$E = \frac{\sqrt{a^2 + a}}{2}.$$

Unde etiam tam in ellipsi quam in hyperbola *duas focos* a centro æquidistantes esse patet, nempe pro $u = \pm E$ fit $y^2 = \frac{1}{4}$.

Ex E et a distantia foci a vertice quoque prodit, $\frac{a}{2} - E$ in ellipsi, et $E - \frac{a}{2}$ in hyperbola.

Sed parameter etiam, nempe unitas ad extractionem radicis requisita, ut

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{\pm a}}$$

prodeat, innotescit: nam *pro ellipsi* erat

$$\frac{1}{4} = \frac{a}{4} - \frac{E^2}{a},$$

adeoque

$$1 = a - \frac{4E^2}{a} = \frac{a^2 - 4E^2}{a};$$

in *hyperbola* vero erat

$$\frac{1}{4} = \frac{E^2}{a} - \frac{a}{4}$$

adeoque

$$1 = \frac{4E^2}{a} - a = \frac{4E^2 - a^2}{a}.$$

Atque manifesto a et E, aut a et unitatem, sive E et unitatem utcunque ponere licet, dummodo pro ellipsi $\frac{a}{2} > E$ et pro hyperbola $E > \frac{a}{2}$ sit; secus enim pro ellipsi $\frac{a^2 - 4E^2}{a}$ et pro hyperbola $\frac{4E^2 - a^2}{a}$

Hosted by Google

(nempe unitas) positiva non erit: ex. gr. si pro ellipsi poneretur $E > \frac{a}{2}$, erit $4E^2 > 4\left(\frac{a}{2}\right)^2$, adeoque $> a^2$.

Si a et unitas ponatur: prodit in ellipsi

$$E = \frac{\sqrt{a^2 - a}}{2}$$

radice quoad unitatem positam accepta. Ita si E et unitas posita fuerint, prodit a; nam $4E^2 = a^2 - a$, et ex æquatione quadratica

$$a^2 - a - 4E^2 = 0,$$

fit

$$a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4E^2},$$

ubi signum superius accipi debet, nam

$$\sqrt{\frac{1}{4} + 4E^2} > \frac{1}{2}$$

est, nec aliud asseritur, nisi quod expressionis valor aliquis $= a$ sit (Tom. I. pag. 123).

In parabola, si (Fig. 153.) $\mathfrak{f}$ in peripheria centri $\mathfrak{P}$ radii $\mathfrak{P}\mathfrak{f}$ ipsi $\mathfrak{f}$ omni dabili propius veniat, unitas (pag. 166) $\backsim 0$; adeoque

$$y = \sqrt{x} \backsim 0$$

pro quovis dato x, et limes geometricus parabolæ recta $\mathfrak{f}\mathfrak{P}$ est, donec libuerit per $\mathfrak{P}$ continuata.

In ellipsi, si $E \backsim 0$, tum

$$1 = \frac{a^2 - 4E^2}{a} \backsim a,$$

et ex

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{a}},$$

pro $E = 0$ fit

$$y = \sqrt{x - x^2},$$

æquatio circuli pro diametro 1. Ita si ponatur

Hosted by Google

$$\frac{a^2 - 4E^2}{a} = a,$$

fiet $a^2 - 4E^2 = a^2$, et hinc $4E^2 = 0$, adeoque $E = 0$.

Est porro in ellipsi $E < \frac{a}{2}$, at si

$$\frac{a}{2} - E = \omega \backsim 0,$$

tum

$$1 = \frac{a^2 - 4E^2}{a} \backsim 0;$$

nam

$$E = \frac{a}{2} - \omega,$$

et

$$4E^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} - a\omega + \omega^2\right) = a^2 - 4a\omega + 4\omega^2,$$

quod $\backsim a^2$. Si igitur aut manente E decrescat a, aut manente a crescat E, dummodo $\omega \backsim 0$: fiet y tanquam radix quoad unitatem omni dabili minorem, pro quovis x (nempe quovis puncto ipsius a) dabili quovis minor, adeoque limes geometricus erit recta ipsa a; nempe tum

$$\sqrt{x - \frac{x^2}{a}} \backsim 0,$$

et limes 0 est pro quovis y.

In hyperbola est $E > \frac{a}{2}$, et si $E - \frac{a}{2} \backsim 0$, sit

$$E = \frac{a}{2} + \omega;$$

erit

$$4E^2 = a^2 + 4a\omega + 4\omega^2,$$

quod $\backsim a^2$, adeoque

$$1 = \frac{4E^2 - a^2}{a} \backsim 0.$$

Si igitur manente E crescat a, vel manente a decrescat E, dummodo $\omega \backsim 0$: fiet y tanquam radix quoad $1 \backsim 0$ omni dabili minor, nempe

Hosted by Google

$$\sqrt{x + \frac{x^2}{a}} = 0;$$

et limes geometricus recta erit in linea abscissarum ab $\mathfrak{f}$ ad lævam et ab $\mathfrak{f}$ ad dextram. (Fig. 152.)

Si vero ponatur

$$1 = \frac{4E^2 - a^2}{a} = a,$$

erit

$$4E^2 - a^2 = a^2,$$

atque hinc

$$4E^2 = 2a^2,$$

et pro posito a erit

$$E^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad E = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

pro E posito autem erit

$$a^2 = 2E^2 = 1.$$

Patet etiam $E^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}$ (pro $a = 1$) dare

$$E > \frac{a}{2} = \frac{1}{2}.$$

Notandum autem est: quod tam in ellipsi summa radiorum vectorum e duobus focis ad idem punctum ductorum, quam in *hyperbola* differentia minoris a maiore sit $= a$; etiam dum limes geometricus recta est, inter $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}$ in ellipsi, et in hyperbola recta infinita per $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}$, excepta parte $\mathfrak{f}\mathfrak{f}$. De quo statim.

V.

Radii vectores.

In parabola (Fig. 154.) e triangulo rectangulo, cuius catheti sunt y et $\frac{1}{4} - x$ vel $x - \frac{1}{4}$, est radius vector r hypotenusa

$$= \sqrt{y^2 + \left(\pm \frac{1}{4} \mp x\right)^2} = \sqrt{x + \frac{1}{16} - \frac{x}{2} + x^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16}} = x + \frac{1}{4};$$

Hosted by Google

nempe si *quarta pars parametri addatur abscissae, prodit radius vector in parabola.*

In *ellipsi* et *hyperbola* (Fig. 152.) radii vectores R, r ad idem punctum $\mathfrak{p}$ e duobus focis $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$ sunt hypotenusæ triangulorum rectangulorum, quorum y ordinata puncti $\mathfrak{p}$ cathetus communis, et alterutrius cathetus alter $E-u$ vel $u-E$, alterius $u+E$ est; patet hoc casibus percursis ordinata ipsius $\mathfrak{p}$ sive intra focos, sive in aliquem, sive ad latus alterutrum ceciderit, dummodo E hic semper positive intelligatur, imo u quoque etsi negative situm fuerit, positive accipiatur; quod fieri potest, quum u præterea heic nonnisi in y^2, et quidem in potentia secunda, adeoque positive occurrat.

Itaque alteruter ipsorum R et r, tam in ellipsi quam in hyperbola, est

$$\sqrt{y^2+(u-E)^2},$$

nam $(u-E)^2=(E-u)^2$; alter autem est

$$\sqrt{y^2+(u+E)^2}.$$

Unde substituendo in ellipsi $\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}$ ipsi y^2, et $\frac{a^2-a}{4}$ ipsi E^2, atque in hyperbola $\frac{u^2}{a}-\frac{a}{4}$ ipsi y^2, et $\frac{a^2+a}{4}$ ipsi E^2, prodit uterque radius vector in utraque.

Nempe *in ellipsi*

$$r=\sqrt{\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}+u^2-2uE+E^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}+u^2-2uE+\frac{a^2-a}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{u^2}{a}+u^2-2uE},$$

quod est

$$=\pm\frac{a}{2}\mp\frac{2uE}{a};$$

nam hoc per se multiplicatum fit

Hosted by Google

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4u^2E^2}{a^2} - 2uE = \frac{a^2}{4} + \frac{4u^2a^2}{4a^2} - \frac{4u^2a}{4a^2} - 2uE$$
$$= \frac{a^2}{4} + u^2 - \frac{u^2}{a} - 2uE.$$

Ita

$$R = \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a} + u^2 + 2uE + E^2},$$

quod eodem modo prodit

$$= \pm \frac{a}{2} \pm \frac{2uE}{a};$$

ubi in utroque casu signum superius accipi debet; nam si inferius signum accipiatur pro ipso r, $-\frac{a}{2} + \frac{2uE}{a}$ negativum esset, quia $2E < a$, adeoque $\frac{2Eu}{a} < u$, u vero non $> \frac{a}{2}$ est. Pro R item signa superiora accipi debent, nempe

$$R = \frac{a}{2} + \frac{2uE}{a};$$

quia $-\frac{a}{2} - \frac{2uE}{a}$ pariter negativum est, radii vectores autem positive accipiuntur.

Est igitur

$$R + r = \frac{a}{2} + \frac{2uE}{a} + \frac{a}{2} - \frac{2uE}{a} = a.$$

Pro hyperbola pariter

$$R = \frac{a}{2} + \frac{2uE}{a},$$

et

$$r = \frac{2uE}{a} - \frac{a}{2},$$

atque

$$R - r = a;$$

nam ibi pro r signum inferius accipiendum est, nempe e duabus radicibus, quum una certo valeat, reiecta quæ non valet, altera retinenda; nimirum $\frac{a}{2} - \frac{2uE}{a}$ esse nequit; quia tum in triangulo, cuius basis $2E$ est et reliqua latera R et r sunt, esset $R + r = a$, et summa duorum laterum esset tertio $2E$ minor, nam $2E$ in hyperbola est $> a$.

Hosted by Google

Corollarium. Hinc etiam in ellipsi radius vector ad extremitatem axeos minoris est $= \frac{a}{2}$, efficit enim cum altero radio vectore dimidium axis maioris, suntque hi radii vectores æquales, propter duo triangula rectangula, quorum axis minor cathetus communis, et alter cathetus E ad dextram lævamque est.

Hinc ab extremitate axeos minoris, tanquam centro, radio ipsi $\frac{a}{2}$ æquali foci in axe maiore determinantur.

VI.

Ex his sequitur *constructio sectionum conicarum*: prius *constructio geometrica* sensu stricto *puncti cuiusvis* (*omnium nunquam*); tum constructio mechanica motu continuo.

1. Nempe præterquam quod quodvis punctum lineæ per

$$y = \sqrt{x}$$

determinatæ a directrice et foco æqualiter distet; ac quodvis punctum $\mathfrak{p}$ lineæ per

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{a}}$$

determinatæ tale sit, ut $\mathfrak{f}\mathfrak{p} + \mathfrak{f}\mathfrak{p} = a$ sit; necnon quodvis punctum $\mathfrak{p}$ lineæ per

$$y = \sqrt{x + \frac{x^2}{a}}$$

determinatæ tale sit, ut $\mathfrak{f}\mathfrak{p} - \mathfrak{f}\mathfrak{p} = a$ sit, $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}$ focos denotantibus, et foco, qui in eandem respectu perpendicularis e centro $\mathfrak{c}$ ad axem positæ plagam cum $\mathfrak{p}$ cadit, in hyperbola $\mathfrak{f}$ dicto: nec ullum aliud punctum tale est. Nempe quodvis punctum $\mathfrak{q}$ extra parabolam directrici propius quam foco est, et quodvis intra parabolam a directrice remotius quam a foco est; et quodvis punctum $\mathfrak{q}$ extra ellipsim tale est, ut $\mathfrak{f}\mathfrak{q} + \mathfrak{f}\mathfrak{q} > a$ sit, ac quodvis $\mathfrak{q}'$ intra ellipsim tale est, ut $\mathfrak{f}\mathfrak{q}' + \mathfrak{f}\mathfrak{q}' < a$ sit; atque quodvis punctum $\mathfrak{q}$ extra hyperbolam tale est, ut $\mathfrak{f}\mathfrak{q} - \mathfrak{f}\mathfrak{q} < a$ sit, et quodvis $\mathfrak{q}'$

Hosted by Google

intra hyperbolam tale est, ut $\mathfrak{f}\mathfrak{q}' - \mathfrak{f}\mathfrak{q}' > a$ sit, si $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ cum $\mathfrak{f}$ (ut supra de $\mathfrak{p}$ dictum est) in eandem plagam cadant, si vero $\mathfrak{q}$ in perpendicularem e centro cadat, tum $\mathfrak{f}\mathfrak{q} - \mathfrak{f}\mathfrak{q} = 0$.

a) Nam *quoad parabolam* (Fig. 155.) sit $\mathfrak{q}\mathfrak{b}$ perpendicularis ad axem; cadet $\mathfrak{b}$ aut ab $\mathfrak{a}$ ad dextram aut ad lævam; si prius, tum in perpendiculari illa aliquod punctum $\mathfrak{k}$ parabolæ erit; atque manifesto distantia ipsius $\mathfrak{q}$ a directrice est

$$\mathfrak{b}\mathfrak{d} = \mathfrak{k}\mathfrak{f} < \mathfrak{q}\mathfrak{f}.$$

Si vero $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}''$ vel $\mathfrak{q}'''$ fuerit, distantia ipsius $\mathfrak{q}''$ a directrice est

$$\mathfrak{b}''\mathfrak{d} < \mathfrak{a}\mathfrak{f} < \mathfrak{b}''\mathfrak{f} < \mathfrak{q}''\mathfrak{f};$$

ita si $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}'''$ cadat, distantia ipsius $\mathfrak{q}'''$ a directrice est

$$\mathfrak{b}'''\mathfrak{d} < \mathfrak{b}'''\mathfrak{f} < \mathfrak{q}'''\mathfrak{f}.$$

Si vero $\mathfrak{q}'$ intra parabolam fuerit, in perpendiculari $\mathfrak{b}'\mathfrak{q}'$ gaudet parabola puncto $\mathfrak{k}'$, et distantia ipsius $\mathfrak{q}'$ a directrice est

$$\mathfrak{b}'\mathfrak{d} = \mathfrak{k}'\mathfrak{f} > \mathfrak{q}'\mathfrak{f}.$$

b) *Quoad ellipsim* (Fig. 156.): si $\mathfrak{q}$ extus cadat, est

$$R' + r' > R + r = a.$$

Si vero $\mathfrak{q}'$ intus cadat, tum

$$R + r > R' + r',$$

adeoque

$$a > R' + r'.$$

c) *Quoad hyperbolam* (Fig. 157.): Si $\mathfrak{q}$ extus sit, recta ex $\mathfrak{q}$ ad $\mathfrak{f}$ secat hyperbolam in $\mathfrak{p}$; adeoque

$$\mathfrak{f}\mathfrak{p} - \mathfrak{f}\mathfrak{p} = a.$$

Fiant centris $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$, radiis $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ circuli; cadet peripheria radii $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$ extra alteram; adeoque

$$\mathfrak{f}\mathfrak{k} < \mathfrak{f}\mathfrak{m} < \mathfrak{f}\mathfrak{n} = a;$$

Hosted by Google

est vero

$$\mathfrak{f}\mathfrak{k} = \mathfrak{f}\mathfrak{q} - \mathfrak{f}\mathfrak{q},$$

quod igitur $< a$ est. Si vero $\mathfrak{q}'$ intus cadat, gaudebit hyperbola in recta $\mathfrak{f}\mathfrak{q}'$ puncto $\mathfrak{p}$; describantur centris $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}'$, radiis $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{q}'\mathfrak{f}$ circuli; cadet manifesto peripheria centri $\mathfrak{p}$ infra alteram; eritque

$$\mathfrak{f}\mathfrak{p} - \mathfrak{f}\mathfrak{p} = \mathfrak{f}\mathfrak{m} = a < \mathfrak{f}\mathfrak{g} < \mathfrak{f}\mathfrak{i};$$

est vero

$$\mathfrak{f}\mathfrak{i} = \mathfrak{f}\mathfrak{q}' - \mathfrak{f}\mathfrak{q}',$$

quod ergo $> a$ est.

2. Sed etiam quodvis punctum $\mathfrak{p}$ a certa recta D et certo puncto $\mathfrak{f}$ æqualiter distans punctum parabolæ est, per directricem D et focum $\mathfrak{f}$ determinatæ; et quodvis tale punctum pro punctis $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}$, ut sit $\mathfrak{p}\mathfrak{f} + \mathfrak{p}\mathfrak{f} = a$, nisi $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}$ in recta sint, punctum ellipseos est per focos $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}$ et axem maiorem a determinatæ; atque quodvis tale punctum $\mathfrak{p}$ pro punctis $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}$, ut sit $\mathfrak{f}\mathfrak{p} - \mathfrak{f}\mathfrak{p} = a$, punctum hyperbolæ est, per focos $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}$ et axem maiorem a determinatæ.

Nam *quoad parabolam*: sint (Fig. 158.) $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}$, $\mathfrak{f}\mathfrak{d}$ perpendiculares ad D, et $\mathfrak{p}\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}\mathfrak{f}$; fiat $\mathfrak{f}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{d}$, atque parabola per æquationem $y = \sqrt{x}$ (radice quoad $4\mathfrak{f}\mathfrak{a} = 1 = 2\mathfrak{f}\mathfrak{d}$ accepta).

Quoad ellipsim hyperbolamque autem, datis punctis $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}$ ut focis consideratis, ex a et $\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}{2} = E$ (per pag. 167) reperitur unitas, quoad quam pro abscissis u e meditullio ipsius $\mathfrak{f}\mathfrak{f}$ acceptis

$$y = \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}}$$

dabit *ellipsim*, et

$$y = \sqrt{\frac{u^2}{a} - \frac{a}{4}}$$

hyperbolam.

3. Ex his præter iam dicta constructiones sequentes intelliguntur. Sit (Fig. 158.) ad axem parabolæ ad distantiam $\frac{1}{4}$ ad lævam a vertice $\mathfrak{a}$ perpendicularis, *directrix* dicta; et erigatur e fine cuiusvis x ad axem perpendicularis P; si ista perpendicularis centro in foco $\mathfrak{f}$, ad distantiam $\frac{1}{4}$ e vertice ad dextram accepto, radio $x + \frac{1}{4}$ (utpote distantia perpen-

Hosted by Google

dicularis P a directrice) secetur: erit $\mathfrak{p}$ punctum sectionis punctum parabolæ, et omnia puncta ita generata eiusdem parabolæ erunt (per 1.). Patet (Fig. 153.), centro $\mathfrak{P}$ radio $\mathfrak{P}\mathfrak{f}$ scripto circulo, tangentem in quovis puncto $\mathfrak{k}$ talem directricem præbere, a qua $\mathfrak{P}$ tantum quam ab $\mathfrak{f}$ distet; sed si $\mathfrak{k}$ ipsi $\mathfrak{f}$ dabili quovis propius venit, perpendicularis ex $\mathfrak{f}$ ad tangentem per $\mathfrak{k}$ ductam, adeoque et unitas (nempe duplum perpendicularis dictæ) $\backsim 0$; atque in tali parabola $y = \sqrt{x}$ (radice quoad dictam unitatem accepta) fiet pro quovis certo x dato quovis minor.

Ita *pro ellipsi* (Fig. 159.) sit $\mathfrak{a}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\mathfrak{b}$, et moveatur punctum $\mathfrak{p}$ ex $\mathfrak{f}$ usque in $\mathfrak{f}$, dicaturque R recta ab $\mathfrak{a}$ usque in $\mathfrak{p}$, et r dicatur recta a $\mathfrak{p}$ usque in $\mathfrak{b}$; erit $\mathfrak{a}\mathfrak{p} + \mathfrak{p}\mathfrak{b} = a$; atque arcus centro $\mathfrak{f}$ radio R scriptus secabit arcum centro $\mathfrak{f}$ radio r scriptum; ac punctum sectionis punctum ellipseos erit, et omnia ita generata eiusdem ellipseos erunt (pag. 174).

Pro *hyperbola* autem (Fig. 160.) si $\mathfrak{f}\mathfrak{a} = \mathfrak{f}\mathfrak{b}$ fuerit, et moveatur punctum $\mathfrak{P}$ ex $\mathfrak{f}$ ad lævam, et $\mathfrak{p}$ ad dextram ex $\mathfrak{f}$, utrumque in axe, temporibus æqualibus vias æquales describendo; dicaturque R recta $\mathfrak{a}\mathfrak{P}$, et r recta $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$, puncta $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$ simultanea intelligendo: erit

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p} - \mathfrak{a}\mathfrak{P} = \mathfrak{a}\mathfrak{f} - \mathfrak{a}\mathfrak{f} = a;$$

itaque arcus e centro $\mathfrak{f}$ radio $\mathfrak{a}\mathfrak{P}$ scriptus secabitur per arcum centro $\mathfrak{f}$ radio $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ factum; eritque punctum sectionis, ubi $r - R = a$, punctum hyperbolæ, et omnia ita generata eiusdem hyperbolæ erunt (pag. 174).

4. Ex (pag. 163) adhuc alia constructio geometrica quotvis punctorum hyperbolæ (Fig. 161.) ex uno sequitur.

Nempe inter asymptotas per punctum hyperbolæ utcunque ducatur recta erit $\alpha = \alpha''$; et quodvis punctum novum item novum præbet. Ratio est sequens.

$$\alpha : \beta = \alpha + \alpha' : \gamma'$$

$$\alpha' + \alpha'' : \beta' = \alpha'' : \gamma.$$

Hinc

$$\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' : \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'' = \beta\beta' : \gamma\gamma';$$

sed (pag. 163)

$$\beta\beta' = \gamma\gamma' = \frac{a}{4},$$

Hosted by Google

ubi γ ipsius $z-y$ et γ' ipsius $z+y$ vicem subit; itaque

$$\alpha\alpha'+\alpha\alpha''=\alpha\alpha''+\alpha'\alpha'';$$

adeoque

$$\alpha\alpha'=\alpha'\alpha'';$$

et hinc

$$\alpha=\alpha''.$$

Imo (Fig. 162.) alia hinc constructio punctorum quorumvis hyperbolæ sequitur, abscissis in asymptota e centro sumtis, et ordinatis asymptotæ alteri parallelis, cui etiam q ex vertice parallela est, quod potentia hyperbolæ vocari solet.

Per triangula æquicrura et parallelas est

$$\mathfrak{B}\mathfrak{D}=\mathfrak{D}\mathfrak{C} \quad \text{et} \quad q=\frac{1}{2}\mathfrak{C}\mathfrak{E}=\frac{1}{2}\mathfrak{C}\mathfrak{B}.$$

Sit porro e vertice ipsius y parallela $\mathfrak{ab}$ ad x; erit

$$\beta : y=\frac{\sqrt{a}}{2} : q$$

et

$$\beta' : x'=\mathfrak{A}\mathfrak{B} : \mathfrak{A}\mathfrak{D} \quad \text{id est} \quad \beta' : x'=\frac{\sqrt{a}}{2} : q;$$

hinc (quia propter angulos p æquales $x=\mathfrak{ab}=x'$) est

$$\beta\beta' : xy=\frac{a}{4} : q^2;$$

et quia $\beta\beta'=\frac{a}{4}$ (pag. 163), est

$$xy=q^2, \quad \text{atque} \quad y=\frac{q^2}{x};$$

adeoque si alia abscissa fuerit X eiusque ordinata sit Y, est

$$y : Y=X : x,$$

idest ordinatæ sunt inverse uti abscissæ.

5. *Ex his ingeniosae sectionum conicarum constructiones mechanicae.*

Hosted by Google

Parabola dimidia describetur: si (Fig. 163.) norma $\mathfrak{AB}\mathfrak{C}$ feratur iuxta directricem, atque plumbago intra filum $\mathfrak{af}+\mathfrak{aA}$ utramque partem ad extremitates $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{A}$ fixam tendens normæ durante motu semper appressa sit. Erit $\mathfrak{a}$ vertex parabolæ, nam ab $\mathfrak{f}$ et a directrice æqualiter distat; atque et postea tantum accedet distantiæ priori plumbaginis a directrice, quantum e latere normæ denudabitur, et tantum etiam ipsi $\mathfrak{af}$ accedet.

Quodcunque fili punctum $\mathfrak{p}$ fuerit ultra $\mathfrak{a}$, sit $\mathfrak{pa}=\lambda$; erit filum ex $\mathfrak{p}$ usque $\mathfrak{f}$ tensum $=\frac{1}{4}+\lambda$; eritque hæc eadem pars lateris normæ nuda; et quum radius vector ab $\mathfrak{f}$ ad extremitatem ordinatæ cuivis x respondentis sit $\frac{1}{4}+x$: manifesto $x=\lambda$ inde a zero crescente, norma iuxta directricem promovetur. Pariter et alterum parabolæ dimidium describitur.

Ellipsis describitur (Fig. 164.). Sit filum recta $\mathfrak{Ff}$ longius, extremitatibus in $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$ fixum, et summæ rectarum $\mathfrak{aF}$ et $\mathfrak{af}$ æquale, dicaturque summa ista a; describetur *ellipsis* plumbagine prius in $\mathfrak{a}$ posita, si dein ad omnia fili puncta $\mathfrak{p}$ sequentia feratur, filumque e quovis loco ad puncta fixa $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$ tendatur, uti $\mathfrak{pF}+\mathfrak{pf}=a$ est. Quævis recta enim, quæ non $<\mathfrak{aF}$ nec $>\mathfrak{af}$, omnino in filo accipi, atque filum ex illo puncto $\mathfrak{p}$ ad puncta fixa $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{f}$ tensum, præbet $\mathfrak{pF}+\mathfrak{pf}=a$; itaque punctum ellipseos est, et quodvis ellipseos punctum per dicta tale $\mathfrak{p}$ est, nec ullum aliud datur.

Quoad *hyperbolam* sit filum (Fig. 165.) $\mathfrak{Fa}+\mathfrak{da}=k+\gamma$, extremitate una in $\mathfrak{F}$ fixum, et altera in puncto $\mathfrak{d}$ regulæ $\mathfrak{df}$ in $\mathfrak{f}$ fixæ, et ponatur plumbago ad punctum $\mathfrak{a}$ fili ex $\mathfrak{a}$ ad puncta $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{d}$ ita tensi, ut partes $\mathfrak{da}$, $\mathfrak{Fa}$ regulæ adiaceant; atque tum moveatur regula circa $\mathfrak{f}$, et interea plumbago regulæ appressa filum e quovis eiusdem puncto ad puncta $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{F}$ tendat: describet plumbago quadrantem hyperbolæ, in quantum regula omni dabili longior concipi potest; atque eadem constructione et quadrans inferior, et regula in $\mathfrak{F}$ fixa, filique extremitate in $\mathfrak{f}$ fixa, altera hyperbolæ pars quoque prodit. Est nempe distantiæ puncti $\mathfrak{a}$ ab $\mathfrak{F}$ differentia a distantia puncti $\mathfrak{f}$ ab eodem $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{af}-\mathfrak{aF}=\beta-\gamma,$$

quod sit a; postea vero mota regula circa $\mathfrak{f}$, si plumbago sit in $\mathfrak{p}$, atque

Hosted by Google

$\mathfrak{d}'\mathfrak{p}$ sit $= k - \omega$, erit

$$\mathfrak{f}\mathfrak{p} = \gamma + \omega \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}\mathfrak{f} = \beta + \omega;$$

consequenter

$$\mathfrak{f}\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\mathfrak{F} = \beta + \omega - \gamma - \omega = \beta - \gamma = a.$$

Itaque $\mathfrak{p}$ punctum hyperbolæ erit. Datur autem pro quovis ω talis angulus regulæ circa $\mathfrak{f}$ motæ, ut $\mathfrak{p}$ prodeat: nam $\gamma + \omega$ datur, regulam filumque enim utvis magna accipere licet, adeoque e filo ipsi γ adhuc ω addi potest; tum vero regulæ pars k longitudine eadem (nempe ω) denudabitur, adeoque fiet $\mathfrak{F}\mathfrak{p} = \gamma + \omega$, $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ vero $= \beta + \omega$; atque basis constans $\beta + \gamma$ et nova duo latera $\gamma + \omega$ et $\beta + \omega$ talia sunt, ut triangulum constituant, quum summa binorum quorumvis tertio maior sit. Facile etiam patet, crescente ω crescere angulum regulæ ad $\mathfrak{f}$.

VII.

Tangens, subtangens, normalisque et subnormalis in singulis.

Ad quodvis punctum $\mathfrak{p}$ sectionis conicæ cuiusvis, quam ad quodvis eius punctum curvam esse demonstrari potest, (qualis est parabola, ellipsis, hyperbola et circulus), non autem sectionis plani per apicem euntis, tangens datur (Tom. I. pag. 290); eaque est recta bisecans angulum radiorum vectorum; notando, quod in parabola alter radius vector, quasi e foco in axe in infinitum abeunte ad $\mathfrak{p}$ ductus, adeoque axi parallelus concipiatur, in ellipsi autem alteruter radiorum vectorum continuetur extra ellipsim ultra punctum eius, ad quod e focis uterque ducitur, atque angulus, quem continuatio ista cum altero radio vectore non continuato facit, bisectus tangentem in eo puncto præbeat. Atque et parabola ut ellipsis foci in axe in infinitum remoti consideretur.

Si vero tangens ad sectionem conicam ex aliquo puncto $\mathfrak{P}$ mittenda sit, tum circulus centro $\mathfrak{P}$, radio usque ad focum proximum extenso, secetur ex altero foco radio a in ellipsi et hyperbola, in parabola vero directrix, tanquam arcus radii vectoris infiniti, secetur per arcum priorem, atque tum e foco priore ducta ad punctum sectionis recta bisecetur: erit perpendicularis e puncto bisectionis erecta *tangens quaesita*.

Hosted by Google

Quoad parabolam (Fig. 166.) sit tangens ad punctum $\mathfrak{p}$ ducenda: radius vector pro foco $\mathfrak{f}$ est $\mathfrak{fp}$, et alter axi parallelus est $\widetilde{\mathfrak{pp}'}$, ac $\mathfrak{fp} = \mathfrak{pp}'$. Si iam angulus $\mathfrak{fpp}'$ bisecetur, fiatque $\mathfrak{p}'\mathfrak{pt} = \mathfrak{fpt} = v$: erit $\mathfrak{pt} \perp \mathfrak{fp}'$, et $\mathfrak{ft} = \mathfrak{tp}'$; ac quodvis punctum rectæ $\widetilde{\mathfrak{pt}}$ (ex. gr. $\mathfrak{q}$) a punctis $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{f}$ æquidistat. Itaque $\mathfrak{qq}'$ perpendicularis ad directricem est $< \mathfrak{qp}' = \mathfrak{qf}$, quocunque cadat $\mathfrak{q}$: unde quodvis tale punctum $\mathfrak{q}$ extra parabolam cadit; nam si in lineam ipsam caderet, tum $\mathfrak{qq}' = \mathfrak{qf}$ esset; si vero intus caderet, tum $\mathfrak{qf} < \mathfrak{qq}'$ esset (pag. 174).

Si vero (Fig. 167.) ex $\mathfrak{P}$ puncto extra parabolam sit tangens ad eam mittenda: $\mathfrak{PP}'$ perpendicularis ad directricem est $< \mathfrak{Pf}$, (pag. 174); itaque e centro $\mathfrak{P}$ radio $\mathfrak{Pf}$ directrix certo secabitur in duobus punctis $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ a perpendiculari $\mathfrak{PP}'$ utrinque æqualiter distantibus; fiat recta $\mathfrak{fa}$ (vel $\mathfrak{fa}'$); recta per meditullium $\mathfrak{t}$ huius et punctum datum $\mathfrak{P}$ ducta tangens erit. Nam $\mathfrak{Pa} = \mathfrak{Pf}$, itaque $\mathfrak{tP}$ est perpendicularis ad $\mathfrak{fa}$; consequenter quodvis punctum ipsius $\widetilde{\mathfrak{tP}}$ a punctis $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{f}$ æqualiter distat; et si perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ ad directricem erecta secuerit alicubi in $\mathfrak{p}$ rectam $\widetilde{\mathfrak{tP}}$, $\mathfrak{p}$ punctum parabolæ erit, quia a directrice et foco æqualiter distabit. Secari autem rectam $\widetilde{\mathfrak{tP}}$ per perpendicularem ad directricem ex $\mathfrak{a}$ erectam necesse est: nam perpendicularis e puncto $\mathfrak{t}$ rectæ $\mathfrak{af}$ erecta infinita quamvis rectam per punctum $\mathfrak{a}$ rectæ $\mathfrak{af}$ ductam infinitam, præter eam, quæ ad $\mathfrak{af}$ perpendicularis est, secat, itaque et eam, quæ ex $\mathfrak{a}$ ad $\mathfrak{aP}'$ perpendicularis est, quia eadem ad $\mathfrak{af}$ perpendicularis non est.

Fiet igitur sectio, et punctum illud parabolæ erit; reliqua vero extra parabolam cadent.

Si $\mathfrak{P}$ plane in $\mathfrak{t}$ cadat, tum ex $\mathfrak{t}$ ad $\mathfrak{af}$ perpendicularis erigitur, quod etiam de ellipsi et hyperbola notandum est: uti id, quod inter tangentem et lineam tactam nulla recta e puncto tactus duci queat (per Tom. I. pag. 349), itaque ad nullum punctum angulo gaudeat (pagg. 15 &), adeoque curva sit.

Subtangens s est $= \mathfrak{fg} - \mathfrak{fm}$ (Fig. 166.); sed

$$\mathfrak{fg} = \mathfrak{pp}',$$

quia $\triangle\, \mathfrak{tfg} = \triangle\, \mathfrak{tp'p}$; nam $\mathfrak{tf} = \mathfrak{tp}'$ et propter $\mathfrak{pp}' \parallel \mathfrak{fo}$ anguli alterni ad

Hosted by Google

$\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{f}$ et ad $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{g}$ sunt æquales. Consequenter (pag. 170)

$$\mathfrak{fg} = \text{ radio vectori } = x + \frac{1}{4}.$$

Est autem

$$\mathfrak{fm} = \frac{1}{4} - x;$$

itaque

$$s = x + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - x\right) = 2x.$$

Si ordinata $\mathfrak{pm}$ ultra focum caderet: tum

$$\mathfrak{fm} = x - \frac{1}{4},$$

et

$$s = \mathfrak{fg} + \mathfrak{fm} = x + \frac{1}{4} + x - \frac{1}{4} = 2x.$$

Unde in parabola ad $\mathfrak{p}$ tangens $\mathfrak{pg}$ ducetur, si ad axem demittatur perpendicularis $\mathfrak{pm}$, et $\mathfrak{ag} = \mathfrak{am} = x$ fiat.

Normalis N, id est $\mathfrak{pn}$ nempe perpendicularis ex $\mathfrak{p}$ ad tangentem, si secuerit axem in $\mathfrak{n}$, dicitur $\mathfrak{mn}$ seu ν *subnormalis*; $\mathfrak{pg}$ autem pro *tangentis* quantitate accipitur; quod etiam cum quantitate tangentis arcus circularis trigonometrica convenire facile patet, si secans $\mathfrak{cd}$ pro linea abscissarum e centro $\mathfrak{c}$ accipiatur (Fig. 168.); et quidem quasi prius in $\mathfrak{f}$ fuisset abscissarum origo, et inde ad centrum translata fuisset: erit extremitati arcus $\mathfrak{fa}$ respondens ordinata $y = \mathfrak{ab}$, et subtangens puncto $\mathfrak{a}$ respondens erit $\mathfrak{bd}$, atque tangens $\mathfrak{ad}$ eadem, quæ sensu trigonometrico arcui $\mathfrak{af} = \mathfrak{fa}$ respondet; et facile patet, quod si $\mathfrak{f}'$ pro $\mathfrak{f}$ ponatur, y' fiat $\mathfrak{ab}'$, et subtangens $\mathfrak{b}'\mathfrak{d}'$, atque tangens $\mathfrak{ad}'$ negativa, ut in trigonometria.

Est vero (Fig. 166.) triangulum $\mathfrak{pgn}$ ad $\mathfrak{p}$ rectangulum, atque $\mathfrak{pm} = y$ est perpendicularis ad $\mathfrak{gn}$; unde

$$\mathfrak{mn} : y = y : s,$$

adeoque

$$\nu = \frac{y^2}{s} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2};$$

consequenter *subnormalis in parabola est dimidiae parametro aequalis.*

Hosted by Google

Ex iisdem triangulis rectangulis prodit tangens normalisque: ex. gr. *tangens* (ad punctum $\mathfrak{p}$ et axem $\widetilde{\mathfrak{af}}$) nempe recta $\mathfrak{pg}$

$$= \sqrt{y^2 + s^2} = \sqrt{x + 4x^2} = \sqrt{4x\left(\frac{1}{4} + x\right)},$$

id est *tangens in parabola est radix quadrata e quadrupla abscissa per radium vectorem multiplicata.*

In ellipsi (Fig. 169.) erit $\mathfrak{fq}$ ad punctum $\mathfrak{p}$ *tangens*, si alteruter radiorum vectorum ex. gr. $\mathfrak{fp}$ continuetur, atque $\mathfrak{fq}$ angulum $\mathfrak{apf}$ bisecet. Sit enim $\mathfrak{pa} = \mathfrak{pf}$, adeoque

$$\mathfrak{af} = a = \mathfrak{pf} + \mathfrak{pf};$$

sitque $\mathfrak{f}$ meditullium rectæ $\mathfrak{af}$; erit recta $\mathfrak{pf}$ angulum $\mathfrak{apf}$ bisecans perpendicularis ad $\mathfrak{af}$; adeoque quodvis punctum $\mathfrak{q}$ ipsius $\widetilde{\mathfrak{pf}}$ a punctis $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{f}$ æqualiter distat. Hinc autem propter

$$\mathfrak{aq} = \mathfrak{qf} \quad \text{et} \quad \mathfrak{aq} + \mathfrak{qf} > \mathfrak{af} = a$$

est

$$\mathfrak{fq} + \mathfrak{qf} > a;$$

itaque quodvis $\mathfrak{q}$ extra ellipsim est (pag. 174).

Si (Fig. 170.) e puncto $\mathfrak{q}$ sit tangens mittenda: sit arcus centro $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{qf}$ (pro $\mathfrak{qf}$ non $> \mathfrak{qf}$), et hic secetur in $\mathfrak{d}$ per arcum centro $\mathfrak{f}$ radio a, fiatque in $\mathfrak{f}$ meditullium rectæ $\mathfrak{df}$; erit $\widetilde{\mathfrak{qf}}$ tangens, et punctum tactus erit, ubi $\mathfrak{df}$ secat ipsam $\mathfrak{qf}$; nam

$$\mathfrak{pd} = \mathfrak{pf} \quad \text{et} \quad \mathfrak{pd} + \mathfrak{pf} = a = \mathfrak{pf} + \mathfrak{pf};$$

est igitur $\mathfrak{p}$ punctum ellipseos (pag. 174); quodvis aliud punctum autem rectæ $\widetilde{\mathfrak{qf}}$ extra ellipsim cadit, ut antea. Sectionem fieri autem statim, ubi ad hyperbolam tangens mittetur, demonstrabitur.

Subnormalis (Fig. 169.) $\mathfrak{Pn}$ reperitur ita: rectæ $\mathfrak{ff}$ et normalis $\mathfrak{pn}$ sunt ad tangentem $\mathfrak{fq}$ perpendiculares; itaque trianguli $\mathfrak{faf}$ crura $\mathfrak{fa}$, $\mathfrak{ff}$ secantur per $\mathfrak{pn}$ parallelam ad trianguli basim $\mathfrak{af}$; atque hinc

Hosted by Google

$$\mathfrak{f}\mathfrak{F} : \mathfrak{f}\mathfrak{a} = \mathfrak{f}\mathfrak{n} : \mathfrak{f}\mathfrak{p}, \quad \text{id est} \quad 2E : a = \mathfrak{f}\mathfrak{n} : R$$

denotante E eccentricitatem et R radium vectorem ex $\mathfrak{f}$. Erat (pag. 172)

$$R = \frac{a}{2} + \frac{2uE}{a},$$

atque

$$E^2 = \frac{a^2 - a}{4};$$

atque hinc

$$\mathfrak{f}\mathfrak{n} = \frac{2ER}{a} = E + \frac{4E^2u}{a^2} = E + u - \frac{u}{a}.$$

Est porro subnormalis

$$\mathfrak{P}\mathfrak{n} = \mathfrak{P}\mathfrak{f} - \mathfrak{f}\mathfrak{n} = E + u - \mathfrak{f}\mathfrak{n} = E + u - \left(E + u - \frac{u}{a}\right) = \frac{u}{a}.$$

Si ab altera parte sit ordinata $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ ultra centrum in plaga positiva, tum pro $\mathfrak{f}$ ubique alter focus accipiatur.

Subtangens $\mathfrak{i}\mathfrak{P}$ autem hinc e triangulo $\mathfrak{i}\mathfrak{p}\mathfrak{n}$ ad $\mathfrak{p}$ rectangulo et ordinata $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ perpendiculari ad $\mathfrak{i}\mathfrak{n}$ facile reperitur, quum si subnormalis ν et subtangens s dicatur, sit

$$s : y = y : \nu,$$

adeoque

$$s = \frac{y^2}{\nu} = \left(\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}\right) : \frac{u}{a} = \frac{a^2}{4u} - u.$$

Unde etiam tangens normalisque facile prodeunt.

In hyperbola (Fig. 171.) recta $\widetilde{\mathfrak{p}\mathfrak{k}}$ angulum $\mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{F}$ bisecans tangens ad $\mathfrak{p}$ erit. Nam

$$\mathfrak{F}\mathfrak{p} - \mathfrak{f}\mathfrak{p} = \mathfrak{F}\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\mathfrak{d} = a$$

et pro $\angle \mathfrak{d}\mathfrak{p}\mathfrak{k} = \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ est $\mathfrak{p}\mathfrak{k} \perp \mathfrak{d}\mathfrak{f}$, ac quodvis punctum $\mathfrak{q}$ rectæ $\widetilde{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}$ a punctis $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{f}$ æqualiter distat, atque manifesto $\mathfrak{F}\mathfrak{q} - \mathfrak{f}\mathfrak{q} < a$ est: nam centro $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{q}\mathfrak{f} = \mathfrak{q}\mathfrak{d}$ scripto arcu $\mathfrak{f}\mathfrak{d}\mathfrak{e}$, erit

$$\mathfrak{F}\mathfrak{e} = \mathfrak{F}\mathfrak{q} - \mathfrak{f}\mathfrak{q} < a;$$

quia si $\mathfrak{F}\mathfrak{e} =$ vel $> a$ esset, tum in triangulo $\mathfrak{F}\mathfrak{d}\mathfrak{q}$ esset $a + \mathfrak{d}\mathfrak{q} =$ vel $<$

Hosted by Google

latere tertio $\mathfrak{f}\mathfrak{q}$. Consequenter quodvis $\mathfrak{q}$ extus cadit (pag. 174); nec ullum $\mathfrak{q}$ ex. gr. $\mathfrak{q}'$ in curvam venit, nam in triangulo $\mathfrak{f}\mathfrak{q}'\mathfrak{d}$ foret $\mathfrak{f}\mathfrak{q}' - \mathfrak{q}'\mathfrak{d}$ vel $\mathfrak{q}'\mathfrak{d} - \mathfrak{f}\mathfrak{q}' = a$, adeoque

$$a + \mathfrak{q}'\mathfrak{d} = \mathfrak{f}\mathfrak{q}' \quad \text{vel} \quad a + \mathfrak{f}\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}'\mathfrak{d},$$

nempe $\mathfrak{f}\mathfrak{d} = a$.

Porro et hic crura trianguli $\mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{n}$ secantur per basi $\mathfrak{p}\mathfrak{n}$ parallelam $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$, quia $\mathfrak{p}\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{f}$ sunt perpendiculares ad $\mathfrak{k}\mathfrak{q}$; unde ut antea prodit

$$s = (4u^2 - a^2) : 4u.$$

Si vero e puncto $\mathfrak{q}$ extra hyperbolam (et centrum) cadente tangens mittenda sit: fiat (Fig. 172.) centro $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$ circulus, pro distantia ipsius $\mathfrak{q}$ a foco $\mathfrak{f}$ haud maiore quam ab altero $\mathfrak{f}$; seceturque is in $\mathfrak{d}$ per alterum centro $\mathfrak{f}$ radio a factum; et sit $\mathfrak{k}$ meditullium rectæ $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$, secetque $\widetilde{\mathfrak{f}\mathfrak{d}}$ ipsam $\widetilde{\mathfrak{q}\mathfrak{k}}$ in $\mathfrak{p}$; erit $\mathfrak{p}$ punctum hyperbolæ, et $\widetilde{\mathfrak{q}\mathfrak{k}}$ tangens ad $\mathfrak{p}$ erit.

Enimvero sectiones dictæ tam pro ellipsi (pag. 182), quam pro hyperbola evenient: nempe circuli dicti secabunt se invicem in duobus punctis, atque $\widetilde{\mathfrak{f}\mathfrak{d}}$ et $\widetilde{\mathfrak{q}\mathfrak{k}}$ secabunt se in ellipsi inter $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{f}$, (Fig. 174.), in hyperbola aut in plaga eadem, in qua $\mathfrak{d}$ est, ultra $\mathfrak{d}$ fiet sectio $\mathfrak{p}$ (Fig. 175.), aut in altera plaga (Fig. 175*).

Quoad primum: Si (Fig. 173.) circulus centro $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$ dicatur C, et centro $\mathfrak{f}$ radio a scriptus c dicatur, ac recta $\mathfrak{f}\mathfrak{q}$ continuetur, sintque $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{i}$ extremitates diametri circuli C: tum si $\mathfrak{f}\mathfrak{i} < a$ et $a < \mathfrak{f}\mathfrak{g}$, extremitas radii a e centro $\mathfrak{f}$ in rectam $\mathfrak{i}\mathfrak{g}$ intra C cadet, adeoque c ex C in duobus punctis egredietur.

In ellipsi vero est $\mathfrak{f}\mathfrak{q} - \mathfrak{f}\mathfrak{q} = \mathfrak{i}\mathfrak{f} < a$, nam $\mathfrak{i}\mathfrak{f} < \mathfrak{f}\mathfrak{f}$ (pag. 85), et $\mathfrak{f}\mathfrak{f} < a$; imo si $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{h}$ caderet quoque, est $\mathfrak{i}\mathfrak{f} < \mathfrak{h}\mathfrak{f}$. Est porro $\mathfrak{g}\mathfrak{f} > a$, nam $\mathfrak{g}\mathfrak{f} = \mathfrak{q}\mathfrak{f} + \mathfrak{q}\mathfrak{f}$, quod in ellipsi pro $\mathfrak{q}$ extus cadente est $> a$ (pag. 174). *In hyperbola* pro $\mathfrak{q}$ extus cadente est $\mathfrak{f}\mathfrak{q} - \mathfrak{f}\mathfrak{q} < a$ (pag. 174), nempe $\mathfrak{i}\mathfrak{f} < a$; atque in triangulo $\mathfrak{f}\mathfrak{q}\mathfrak{f}$ est $\mathfrak{f}\mathfrak{q} + \mathfrak{q}\mathfrak{f} > \mathfrak{f}\mathfrak{f} > a$, adeoque $\mathfrak{g}\mathfrak{f} > a$. Si vero $\mathfrak{q}$ ab $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}$ æqualiter distet, sectionem unam superius, alteram inferius fieri patet.

Quoad alterum: In ellipsi (Fig. 174.) in triangulo $\mathfrak{f}\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ est $a > \mathfrak{f}\mathfrak{f}$, adeoque $u < v$; si igitur $\mathfrak{f}\mathfrak{f}$ circa $\mathfrak{f}$ moveatur donec in $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ veniens an-

Hosted by Google

gulum cum $\mathfrak{fd}$ ipsi u æqualem faciat: $\mathfrak{pk} \perp \mathfrak{fd}$ erit. In hyperbola (Fig. 175.) $a < \mathfrak{ff}$, adeoque $u > v$; est autem u aut obtusus aut acutus, quia rectus esse nequit; esset enim angulus $\mathfrak{fdf}$ in semicirculo, adeoque $\mathfrak{q}$ in centro esset, et $\mathfrak{qk} \parallel \mathfrak{fd}$ esset, nec ullum $\mathfrak{p}$ nec tangens e centro datur. Si vero u obtusus est, tum z acutus est, adeoque $\mathfrak{p}$ supra $\mathfrak{dk}$ cadet. Si u acutus fuerit (Fig. 175*), moveatur $\mathfrak{ff}$ circa $\mathfrak{f}$ deorsum, donec $\mathfrak{pf}$ cum $\mathfrak{fd}$ angulum $= u$ faciat, nempe $v < u$; eritque $\mathfrak{fp} = \mathfrak{dp}$, et $\mathfrak{kp} \perp \mathfrak{df}$.

Est autem (Fig. 174.)

$$\mathfrak{pd} = \mathfrak{pf} \quad \text{et} \quad \mathfrak{pf} + \mathfrak{pf} = a = \mathfrak{df}.$$

In (Fig. 175.) est

$$\mathfrak{fp} - \mathfrak{pd} = a = \mathfrak{fp} - \mathfrak{pf};$$

quia $\mathfrak{pd} = \mathfrak{pf}$. In (Fig. 175*)

$$\mathfrak{pd} - \mathfrak{pf} = a = \mathfrak{pf} - \mathfrak{pf}.$$

VIII.

Quoad explicationem (pagg. 158 &) dictorum patet angulos v ad tangentem verticalesque æquales esse. Plura referre instituti ratio vetat.

IX.

Diametri sectionum conicarum.

Centrum lineæ L in plano dicitur $\mathfrak{c}$, si quodcunque punctum $\mathfrak{p}$ ipsius L fuerit, recta $\mathfrak{pc}$ lineam L adhuc in uno tali puncto $\mathfrak{q}$ secet, ut $\mathfrak{pc} = \mathfrak{qc}$ sit.

Quæcunque recta autem bisecans omnes ipsius L chordas rectæ cuipiam r parallelas tales, ut nulla pars continua ipsius L sit, in qua chordarum dictarum aliqua haud terminetur: *diameter lineae* L dicitur *sensu latiore*; semperque, nisi aliud monitum fuerit, talis diameter intelligatur; diameter quippe etiam alio sensu venit.

At *sensu stricto diametro gaudere* dicitur L, si ut pro circulo et

Hosted by Google

ellipsi, recta R circa centrum ubivis in eodem plano mota donec redeat, semper pro dicta r accipi queat, saltem nonnisi certus sit rectarum numerus, in quas R tales pervenit, quas pro r sumere non liceat; ex. gr. pro parabola nonnisi una recta (nempe axi parallela) excluditur, pro hyperbola asymptotis parallelæ itaque duæ excluduntur, nempe tam in parabola quam hyperbola limites tangentium ad puncta dabili quovis remotiora.

Centro gaudere linea potest absque eo, ut diametro sensu stricto gaudeat (uti Fig. 110.); et conversim parabola diametro sensu stricto pollens centro caret. Lineæ plures ordinis binario altioris quoque certo diametri numero gaudent, imo plures centrum habent.

In ellipsi et hyperbola, si recta e puncto quovis $\mathfrak{p}$ lineæ per $\mathfrak{c}$, meditullium axeos maioris, producatur usque in $\mathfrak{d}$, ut $\mathfrak{c}\mathfrak{d} = \mathfrak{c}\mathfrak{p}$ fiat: per æquationem e centro patet $\mathfrak{d}$ quoque punctum lineæ esse.

In parabola autem e quovis certo puncto $\mathfrak{p}$ parabolæ ad punctum in axe dabili quovis remotius ducta recta eo tendit, ut axi parallela fiat; si igitur hoc sensu accipiatur parabolæ centrum in axe omni dabili remotius, et pro recta per centrum eius ducta quævis axi parallela intelligatur: generaliter dici poterit, in quavis sectione conica L quamvis rectam per centrum ductam, præter asymptotos, diametrum esse; et pro quavis diametro δ chordas per eam bisectas, si δ ipsam L secet, esse tangenti ad illud punctum, in quo δ ipsam L secat, ductæ parallelas; aut δ tangenti alicui parallelam esse, chordasque rectæ e centro per punctum tactus ductæ esse parallelas.

Est autem pro abscissis x in diametro æquatio ellipseos e centro

$$y^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{d^2x^2}{D^2};$$

æquatio hyperbolæ vero, si linea abscissarum secet hyperbolam, est

$$y^2 = \frac{d^2x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4},$$

aut pro abscissa y item e centro et ordinata x est

Hosted by Google

$$x^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{D^2 y^2}{d^2},$$

quod e priore sequitur; diciturque in duobus prioribus D *diameter primaria* respectu alterius, et d eius *coniugata*, in postremo autem d dicitur *primaria*, et D *coniugata*.

Ex. gr. abscissæ nunc x dictæ eædem sunt, quæ superius per u denotabuntur; atque ibi, pro abscissis u e centro in a acceptis, erat in ellipsi

$$y^2 = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a};$$

hoc autem est

$$= \frac{b^2}{4} - \frac{b^2 u^2}{a^2},$$

quia $b = \sqrt{a}$.

Est autem in ellipsi D æqualis lineæ abscissarum utrinque in ellipsi terminatæ, et d æqualis rectæ per centrum ad tangentem in puncto, ubi D ellipsim secat, parallelæ et utrinque in ellipsi terminatæ. Quoad hyperbolam quoque diametri utriusque, meditullio in centrum posito, primaria in lineam abscissarum continuetur, et coniugata ordinatis parallela sit; interim ipsorum D, d illud (ex. gr. D), quod per centrum eundo secat hyperbolam (ex. gr. in $\mathfrak{a}$), secabit eam in alio puncto $\mathfrak{b}$ quoque, atque tum pro D in calculo recta $\mathfrak{ab}$ intelligatur, pro d autem tangens hyperbolæ ad punctum $\mathfrak{a}$ (vel $\mathfrak{b}$) ab una asymptoto usque ad aliam; et eandem quantitatem retineat d in calculo, etsi ipsa fiat linea abscissarum, et D sit eius *coniugata*.

Notandum etiam est, quod proportionalis tertia ad diametrum et eius coniugatam parameter diametri prioris dici soleat. Nempe parameter ipsius a seu parameter principalis p prodit ex

$$a : b = b : \frac{b^2}{a},$$

seu quia $b = \sqrt{a}$ erat, est

$$a : \sqrt{a} = \sqrt{a} : 1.$$

Ita parameter P ipsius b, cuius coniugata a est, prodit ex

Hosted by Google

$$b : a = a : \frac{a^2}{b},$$

ubi $\frac{a^2}{b} = P$. Atque eodem modo exprimitur per parametrum et diametrum ordinatæ quadratum, abscissis e vertice acceptis. Ex. gr.

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a} \quad \text{et} \quad Y^2 = u^2 = PX - \frac{PX^2}{b},$$

si X abscissam in b e vertice denotet; nempe pro abscissis x in a e vertice acceptis erat

$$y^2 = x - \frac{x^2}{a} = \frac{b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2},$$

quia $b = \sqrt{a}$ et $b^2 = a$, adeoque $\frac{b^2}{a} = 1 =$ parametro principali. Sed

$$x = \frac{a}{2} + u,$$

itaque

$$y^2 = \frac{b^2}{a}\left(\frac{a}{2} + u\right) - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a}{2} + u\right)^2 = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{a^2}u^2;$$

et hoc propter $y = \frac{b}{2} - X$ est

$$= \frac{b^2}{4} - bX + X^2;$$

atque hinc u^2 seu

$$Y^2 = \frac{a^2X}{b} - \frac{a^2X^2}{b^2} = PX - \frac{PX^2}{b}.$$

Quod et ad reliquas diametros applicari patet.

§. 1.

In parabola quamvis rectam L axi parallelam diametrum esse, si ordinatæ tangenti ad illud punctum, ubi L parabolam secat, parallelæ accipiantur, neque aliam dari, nec hanc pro aliis ordinatis diametrum esse patet sic (Fig. 176.).

Hosted by Google

Sit abscissa t axi parallela, et tangens sit T, ac subtangens $s = 2\alpha$, ordinata superior u, inferior u'; nempe et inferius secari parabolam statim patebit.

Per latera trianguli $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ parallela lateribus reliquorum (in Fig. 176. $\mathfrak{E}$) triangulorum ponatur in omnibus casibus, prius tangens ad subtangentem (nempe T ad 2α), tum tangens ad ordinatam, (nempe T ad $\sqrt{\alpha}$).

Terminatur u aut infra axem, aut in axe, aut supra axem; et quidem in casu prostremo aut a perpendiculari ex $\mathfrak{C}$ ad t erecta ad dextram, aut ad lævam. Est (Fig. 176.)

$$T : 2\alpha = u : k \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = u : y + \sqrt{\alpha},$$

itaque

$$k = \frac{2\alpha u}{T} \quad \text{et} \quad y = \frac{u\sqrt{\alpha} - T\sqrt{\alpha}}{T} = \frac{(u - T)\sqrt{\alpha}}{T}.$$

Est autem

$$x = t - k + \alpha \quad \text{et} \quad y^2 = x;$$

itaque substituendo valores ipsius k in x, et ipsius y in y^2, erit

$$y^2 = \frac{u^2\alpha - 2uT\alpha + T^2\alpha}{T^2}$$

et

$$x = t - \frac{2\alpha u}{T} + \alpha = \frac{tT^2 - 2\alpha u T + T^2\alpha}{T^2};$$

consequenter

$$u^2\alpha - 2uT\alpha + T^2\alpha = tT^2 - 2\alpha u T + T^2\alpha,$$

id est $u^2\alpha = tT^2$, adeoque

$$u^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Ita si u' sit continuatio ipsius u usque ad parabolam: est

$$l = Y - \sqrt{\alpha} \quad \text{et} \quad Y^2 = X = t + k' + \alpha;$$

atque

$$T : 2\alpha = u' : k' \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = u' : Y - \sqrt{\alpha},$$

et hinc

$$k' = \frac{2\alpha u'}{T} \quad \text{et} \quad Y = \frac{(u' + T)}{T}\sqrt{\alpha};$$

consequenter

Hosted by Google

$$Y^2 = \frac{u'^2\alpha + 2u'T\alpha + \alpha T^2}{T^2} =$$

$$X = t + \frac{2\alpha u'}{T} + \alpha = \frac{tT^2 + 2\alpha u'T + \alpha T^2}{T^2};$$

adeoque

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha},$$

uti u erat, et si duorum valorum ipsius $u = \sqrt{\frac{tT^2}{\alpha}}$ alter negative ac cipiatur, u' quoque exhibebitur.

Ita (Fig. 177.) est

$$T : 2\alpha = q : k \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = q : y;$$

et hinc

$$k = \frac{2\alpha q}{T} = \frac{2\alpha(u - T)}{T}$$

(quia $q = u - T$), et

$$y = \frac{q\sqrt{\alpha}}{T} = \frac{(u - T)\sqrt{\alpha}}{T}.$$

Est porro

$$x = t - \alpha - k$$

et

$$y^2 = \frac{u^2\alpha - 2uT\alpha + T^2\alpha}{T^2} =$$

$$x = t - \alpha - \frac{2\alpha(u - T)}{T} = \frac{tT^2 - 2\alpha uT + \alpha T^2}{T^2};$$

atque hinc pariter

$$u^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Ita

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Nam

$$T : 2\alpha = u' : i \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = u' : l = u' : (Y - \sqrt{\alpha});$$

est vero $X = t + i + \alpha$; atque $Y^2 = X$; et valoribus ipsorum i et Y, ut antea, substitutis prodit.

In (Fig. 178.) est

$$T : 2\alpha = q : h, \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = q : y,$$

Hosted by Google

et hinc

$$h = \frac{2\alpha q}{T} = \frac{2\alpha(T-u)}{T},$$

(quia $q = T - u$); estque

$$y = \frac{q\sqrt{\alpha}}{T} = \frac{(T-u)\sqrt{\alpha}}{T}.$$

Est vero

$$x = t + h - \alpha \quad \text{et} \quad y^2 = x;$$

itaque substituendo est

$$x = t + \frac{2\alpha(T-u)}{T} - \alpha = \frac{tT^2 + \alpha T^2 - 2\alpha u T}{T^2} =$$

$$y^2 = \frac{T^2\alpha - 2Tu\alpha + u^2\alpha}{T^2};$$

unde

$$u^2\alpha = tT^2 \quad \text{et} \quad u^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Ita

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Nam

$$X = t + i + \alpha,$$

et ex

$$T : 2\alpha = u' : i \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = u' : l = u' : (Y - \sqrt{\alpha})$$

atque

$$Y^2 = X$$

prodit ut supra

$$\frac{u'^2\alpha + T^2\alpha + 2u'\alpha T}{T^2} = \frac{tT^2 + 2\alpha u' T + \alpha T^2}{T^2}.$$

Unde

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Erat vero $T^2 = 4xr$, (per r radium vectorem intelligendo); si igitur pro x ponatur α, erit $\frac{T^2}{\alpha} = 4r$, atque

$$u'^2 = u^2 = 4rt;$$

ubi $4r$ parameter huius diametri dici solet.

Hosted by Google

Quod autem nulla alia diameter sit, nec hæc sit pro aliis ordinatis, patet sic.

Quævis recta, præter axem et ei parallelam, secat præter axem etiam parabolam in duobus punctis; nam (Fig. 179.) quæratur valor talis ipsius x, ut y sit ordinata communis rectæ axem secantis et simul parabolæ: erit

$$b : k = x : y,$$

adeoque

$$y = \frac{xk}{b} = x\beta,$$

si $\frac{k}{b}$ dicatur β; ordinata parabolæ autem est $\sqrt{\alpha + x}$; eruntque æquales, si

$$\alpha + x = \beta^2 x^2,$$

adeoque

$$x = \frac{1}{2\beta^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4\beta^4} + \frac{\alpha}{\beta^2}}.$$

Quæcunque igitur alia diameter esset, illa per $\mathfrak{fh}$ (Fig. 180.) repræsentari potest, atque ordinatæ quoque aut axi parallelæ essent, aut secarent axem. Si parallelæ axi essent, superiores finitæ, inferiores infinitæ essent. Si vero axem secent, consideretur ordinata e puncto $\mathfrak{c}$; erit hæc aut perpendicularis ad $\mathfrak{Ai}$ axem primarium, aut supra vel infra perpendicularem cadet. Si prius, ordinatæ sequentes, eidem abscissæ appertinentes, inæquales erunt. Si ordinata $\mathfrak{ec}$ fuerit, erit $\mathfrak{ec} > \mathfrak{cb}$, quia triangula $\mathfrak{ecg}$ et $\mathfrak{bcm}$ similia sunt et $\mathfrak{eg} > \mathfrak{bm}$. Pariter si ordinata $\mathfrak{pc}$ fuerit, erit $\mathfrak{pc} < \mathfrak{cq}$; quia per triangula similia $\mathfrak{pcn}$, $\mathfrak{qci}$ atque $\mathfrak{pn} < \mathfrak{qi}$ est $\mathfrak{pc} < \mathfrak{cq}$.

Pro eadem diametro pariter ordinatas in quavis coni sectione ab ordinatis prioribus diversas inæquales esse inferius facile patebit.

§. 2.

Quoad ellipsim (Fig. 181.) sit $\mathfrak{pq} = y$ et $\mathfrak{pf} = \lambda$; $\mathfrak{Ac}$ est $= \frac{D}{2}$. Erat (pag. 183)

$$s = \frac{a^2 - 4u^2}{4u} \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a},$$

Hosted by Google

atque e triangulorum $\mathfrak{AGC}$, $\mathfrak{agc}$ similitudine est

$$t : s = \frac{d}{2} : U \quad \text{et} \quad s : k = U : K;$$

atque singulos terminos quadrando, fit

$$t^2 = \frac{s^2 d^2}{4U^2} \quad \text{et} \quad U^2 = \frac{K^2 s^2}{k^2};$$

unde prius U^2 reperitur, et tum t^2.

Est nempe

$$U^2 = \frac{s^2 K^2}{k^2} = \left(\frac{a^2 - 4u^2}{4u}\right)^2 \left(\frac{a}{4} - \frac{U^2}{a}\right) : \left(\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}\right) =$$

$$= \frac{(a^2 - 4u^2)^2}{4 \cdot 4u^2} \, \frac{a^2 - 4U^2}{4a} \, \frac{4a}{a^2 - 4u^2} = \frac{(a^2 - 4u^2)(a^2 - 4U^2)}{4 \cdot 4u^2};$$

et hinc

$$a^4 - 4a^2 U^2 - 4a^2 u^2 + 4 \cdot 4u^2 U^2 = 4 \cdot 4u^2 U^2,$$

seu

$$a^4 - 4a^2 u = 4a^2 U^2;$$

et hinc

$$U^2 = \frac{a^2}{4} - u^2.$$

Atque hinc t^2, quod erat $= \frac{s^2 d^2}{4U^2}$, est

$$= \frac{(a^2 - 4u^2)^2}{4 \cdot 4u^2} \, \frac{d^2}{4} : \frac{a^2 - 4u^2}{4} = \frac{a^2 - 4u^2}{4 \cdot 4u^2} \, d^2.$$

Assumantur porro duo paria triangulorum similium, nempe tsk, $\mathfrak{pfq}$ et xhi, $\mathfrak{AcG}$, atque valores v, λ, i, h quærantur. Erit

$$t : k = y : v, \; t : s = y : \lambda, \; \frac{D}{2} : x = k : i, \; \frac{D}{2} : x = u : h,$$

atque hinc

$$v = \frac{ky}{t}, \; \lambda = \frac{ys}{t}, \; i = \frac{2kx}{D}, \; h = \frac{2ux}{D}.$$

Est autem $V = i - v$, et simul

Hosted by Google

$$V^2 = \frac{a}{4} - \frac{(u+z)^2}{a} = \frac{a}{4} - \frac{(h+\lambda)^2}{a},$$

quia $u + z = h + \mathfrak{pk}$.

Substitutis in

$$V^2 = (i-v)^2 = \frac{a}{4} - \frac{(h+\lambda)^2}{a}$$

seu

$$a(i-v)^2 = \frac{a^2}{4} - (h+\lambda)^2$$

valoribus i, v, h, λ, k, t, s, fiet

$$a\left(\frac{2kx}{D} - \frac{ky}{t}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{2ux}{D} + \frac{ys}{t}\right)^2;$$

et hinc

$$\frac{y^2}{t^2}(ak^2+s^2) + \frac{4xy}{Dt}(us - ak^2) + \frac{4x^2}{D^2}(ak^2+u^2) = \frac{a^2}{4};$$

ubi terminus primus $= \frac{y^2a^2}{d^2}$, secundus $= 0$, tertius $= \frac{x^2a^2}{D^2}$, adeoque

$$\frac{y^2a^2}{d^2} + \frac{x^2a^2}{D^2} = \frac{a^2}{4},$$

seu

$$\frac{y^2}{d^2} + \frac{x^2}{D^2} = \frac{1}{4},$$

consequenter

$$y^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{x^2d^2}{D^2}.$$

Quod autem termini primi, secundi et tertii valores dicti sint, patet sic. In termino primo est

$$\frac{y^2}{t^2} = y^2 : \frac{(a^2-4u^2)\,d^2}{4\cdot 4u^2} = \frac{4\cdot 4u^2y^2}{(a^2-4u^2)\,d^2}$$

atque

$$ak^2 + s^2 = \frac{a^2-4u^2}{4} + \frac{(a^2-4u^2)^2}{4\cdot 4u^2} = \frac{a^2(a^2-4u^2)}{4\cdot 4u^2}.$$

Consequenter

$$\frac{y^2}{t^2}(ak^2+s^2) = y^2\cdot\frac{a^2}{d^2}.$$

Hosted by Google

In termino secundo nempe $\frac{4xy}{Dt}(us - ak^2)$ est

$$us - ak^2 = \frac{u(a^2 - 4u^2)}{4u} - \frac{a^2 - 4u^2}{4} = 0.$$

Tertius terminus est $\frac{4x^2}{D^2}(ak^2 + u^2)$; est autem

$$ak^2 + u^2 = \frac{a^2 - 4u^2}{4} + u^2 = \frac{a^2}{4};$$

adeoque terminus tertius $= \frac{4x^2}{D^2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{x^2a^2}{D^2}$.

Prodibit autem pariter et $y' = \mathfrak{pr} = y$, si pro y, λ, v, et ordinata $V = i - v$ et abscissa $\lambda + h$ ponatur y', λ', v', ordinata $V' = i + v'$ et abscissa $\lambda' - h$; quod, uti si y in fine axis vel infra eum terminetur, exercitio Tyronum relinquitur.

§. 3.

Sit D recta per centrum $\mathfrak{c}$ hyperbolæ (Fig. 182.) ducta, utrinque in ea terminata, sitque tangens $t + t'$ ad punctum $\mathfrak{p}$, in quo hyperbolam secat D; tum si ordinata e fine $\mathfrak{q}$ ipsius x, abscissæ e centro in recta D continuata acceptæ, ad tangentem parallela y dicatur, erit

$$y^2 = \frac{d^2x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4}.$$

Nam $t' = t$; quia hyperbola inter asymptotos e recta utrinque æquales partes resecat (pag. 176); et si recta tangenti parallele moveatur usquequo in punctum tactus veniat, partium resectarum eousque semper æqualium limites quoque nempe t et t' æquales erunt.

Hinc si $y \parallel t$, et α, γ ad axem primarium perpendicularia sint: erit

$$\frac{D}{2} : t = \mathfrak{cq} : y' + \beta' = x : y' + \beta',$$

nam $\mathfrak{cq} = x$; est vero hinc

Hosted by Google

$$y'+\beta'=tx:\frac{D}{2}=\frac{dx}{2}:\frac{D}{2}=\frac{dx}{D};$$

nam $t=t'$, et $t+t'$ tanquam coniugata ipsius D dicitur d.

Est porro (per parallelas)

$$\beta':\gamma'=t:\alpha=\frac{d}{2}:\alpha$$

atque

$$\beta+2y:\gamma=t':\alpha'=\frac{d}{2}:\alpha';$$

nempe $y=y'$, nam in triangulo, cuius vertex $\mathfrak{c}$ est, $(y+y')$ est parallela $(t+t')$, atque $t=t'$, adeoque $y'+\beta'=y+\beta$, sed $\beta=\beta'$, (pag. 176) itaque $y=y'$.

E proximis duabus proportionibus autem fit

$$\beta'(\beta+2y):\gamma\gamma'=\frac{d^2}{4}:\alpha\alpha';$$

sed (pag. 163)

$$\gamma\gamma'=\frac{a}{4}=\alpha\alpha';$$

itaque

$$\beta'(\beta+2y)=\frac{d^2}{4}=(\beta+y-y)(\beta+y+y).$$

Erat autem superius $\beta+y=\frac{dx}{D}$. Consequenter

$$\frac{d^2}{4}=\left(\frac{dx}{D}-y\right)\left(\frac{dx}{D}+y\right),$$

atque hinc

$$\frac{d^2}{4}=\frac{d^2x^2}{D^2}-y^2,$$

et hinc

$$y^2=\frac{d^2x^2}{D^2}-\frac{d^2}{4}.$$

At vero et quævis alia recta $\mathfrak{AK}$ per centrum ducta (præter asymptotum) diameter est.

Accipiantur nempe pro abscissis X ordinatæ Y parallelæ ad rectam

Hosted by Google

e centro per tactum tangentis ipsi $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ parallelæ: erit abscissa y, et x ordinata, atque

$$x^2 = \frac{D^2 y^2}{d^2} + \frac{D^2}{4}.$$

Scholion I.

Quaevis recta per centrum sectionis conicae (praeter asymptotum) diameter est; nec ulla alia est, nec eadem pro chordis rectae aliae parallelis diameter est, et cuivis rectae praeter asymptotos (et axi parallelam in parabola) dantur chordae parallelae diametro unica gaudentes.

Dicatur v angulus, quem tangens cum subtangente s facit; in triangulo rectangulo, cuius catheti s et y sunt, est (pag. 139)

$$\frac{y}{s} = \text{tang.}\, v;$$

est etiam (Tom. I. pag. 306)

$$\text{tang.}\, v = \mathfrak{d} y.$$

In parabola est

$$y = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad s = 2x$$

(pag. 181), adeoque

$$\text{tang.}\, v = \frac{y}{s} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

et pro quovis v datur x, nempe

$$2\sqrt{x} = \frac{1}{\text{tang.}\, v} \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{4\,\text{tang.}^2 v};$$

pro $v =$ recto fit tangens infinita, et $x = 0$; pro $x \backsim \infty$ fit tang. $v \backsim 0$. Patet etiam pro quovis ulterius ad dextram terminato x subtangentem quoque crescere ad lævam, angulum v autem decrescere, quum crescente x quotus $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \text{tang.}\, v$ decrescat.

In ellipsi est

$$\frac{y}{s} = \sqrt{\frac{a^2 - 4u^2}{4a}} : \frac{a^2 - 4u^2}{4u} = \frac{2u}{\sqrt{a}\sqrt{a^2 - 4u^2}} = \text{tang.}\, v;$$

Hosted by Google

et hinc

$$4u^2 = a(a^2 - 4u^2)\,\text{tang.}^2 v,$$

atque hinc

$$u^2(4 + 4a\,\text{tang.}^2 v) = a^3\,\text{tang.}^2 v,$$

et

$$u = \sqrt{\frac{a^3\,\text{tang.}^2 v}{4 + 4a\,\text{tang.}^2 v}};$$

itaque quum tam numerator quam denominator adeoque et quotus positivus sit, pro quovis v datur u; fit autem pro $u = 0$ angulus $v = 0$, et pro $u = \frac{a}{2}$ fit v rectus, nempe valor tang. v pro $u = 0$ fit $\frac{0}{a}$, pro $u = \frac{a}{2}$ autem fit $\infty = \frac{2u}{0}$ (Tom. I. pag. 46). Decrescit vero subtangens ex infinito usque ad 0 crescente u usque ad $\frac{a}{2}$, crescitque v a 0 usque ad rectum, ita ut pro quovis maiore u subtangens intra priorem terminetur, et v maior fiat. Nempe $\frac{a^2}{4u} - u = s$ fit crescente u minus; fiat enim $u + \omega$ ex u, erit subtangens

$$s' = \frac{a^2}{4(u + \omega)} - (u + \omega) < \frac{a^2}{4u} - u;$$

quia $4(u + \omega) > 4u$, adeoque e quoto (propter divisorem maiorem) minore maius subtrahitur, pro subtangente abscissæ maiori respondente. Ita tang. v fit maior; nempe

$$\frac{2(u + \omega)}{\sqrt{a}\,\sqrt{a^2 - 4(u + \omega)^2}} > \frac{2u}{\sqrt{a}\,\sqrt{a^2 - 4u^2}},$$

quia numerator prior est maior, denominator autem minor est, nam ex a^2 maius subtrahitur.

In hyperbola tangens anguli α, quem asymptotus cum axe facit, est $= \frac{1}{\sqrt{a}}$; nam (pag. 163)

$$\frac{a}{2} : \frac{\sqrt{a}}{2} = 1 : \text{tang.}\,\alpha.$$

Crescente u, prima ordinata est 0 pro $u = \frac{a}{2}$, et tum tang. v est infinita, adeoque v est rectus, et subtangens 0; postmodum crescente u in infinitum, crescit subtangens usque ad limitem $= \frac{a}{2} + x$, semper ulterius versus centrum terminata, et decrescit v usque ad α, ita ut centrum per sub-

Hosted by Google

tangentem et α per decrescentem v haud attingatur; estque pro quovis maiore u ultra verticem subtangens propior centro, et v minor.

Nam

1. Subtangens $\frac{4u^2 - a^2}{4u}$ pro $u = \frac{a}{2}$ fit $= 0$, et

$$\text{tang.}\, v = \frac{2u}{\sqrt{a}\,\sqrt{4u^2 - a^2}}$$

fit $\frac{2u}{0} = \infty$ (Tom. I. pag. 46).

2. Si ex u fiat $u + \omega$ (pro ω positivo), subtangens s pro u est $u - \frac{a^2}{4u}$, et s' pro $u + \omega$ est $u + \omega - \frac{a^2}{4(u+\omega)}$; et subtrahendo priorem e posteriore manet

$$\frac{a^2}{4u} + \omega - \frac{a^2}{4(u+\omega)} = \omega + \frac{a^2(u+\omega) - a^2 u}{4u(u+\omega)};$$

atque ut extremitas subtangentis s' versus centrum prodeat, adhuc ω subtracto quoque positivum manebit, nempe $\frac{a^2\omega}{4u(u+\omega)}$.

3. Est autem v pro $u + \omega$ minus quam pro u; nam tang. v pro $u + \omega$ est

$$\frac{2(u+\omega)}{\sqrt{a}\,\sqrt{4(u+\omega)^2 - a^2}},$$

pro u est

$$\frac{2u}{\sqrt{a}\,\sqrt{4u^2 - a^2}};$$

quorum utrumnam sit maius, nonnisi

$$\frac{u+\omega}{\sqrt{4(u+\omega)^2 - a^2}} \quad \text{et} \quad \frac{u}{\sqrt{4u^2 - a^2}}$$

adeoque

$$\frac{(u+\omega)^2}{4(u+\omega)^2 - a^2} \quad \text{et} \quad \frac{u^2}{4u^2 - a^2}$$

comparanda veniunt. Reducendo ad denominationem eandem, erunt numeratores

$$4u^2(u+\omega)^2 - a^2(u+\omega)^2 \quad \text{et} \quad 4u^2(u+\omega)^2 - a^2u^2,$$

Hosted by Google

quorum priorem subtrahendo e posteriore manet

$$a^2(u+\omega)^2 - a^2u^2 = a^2[(u+\omega)^2 - u^2],$$

quod manifesto positivum est.

4. Nunquam vero $v = \alpha$ fieri potest, sed $v \backsim \alpha$. Nam pro $v = \alpha$ fieret

$$\text{tang.}\, v = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2u}{\sqrt{a}\sqrt{4u^2 - a^2}},$$

adeoque $4u^2 = 4u^2 - a^2$, et $0 = -a^2$. Pro quovis positivo ω autem datur tale u, ut tang. v sit $= \frac{1}{\sqrt{a}} + \omega$, at pro nullo positivo ω datur tale u, ut tang. $v = \frac{1}{\sqrt{a}} - \omega$ sit.

In casu primo enim esset

$$\text{tang.}\, v = \frac{1 + \omega\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{2u}{\sqrt{a}\sqrt{4u^2 - a^2}},$$

et hinc

$$(1 + \omega\sqrt{a})^2 = \frac{4u^2}{4u^2 - a^2} = 1 + 2\omega\sqrt{a} + \omega^2 a,$$

quod dicatur k. Erit

$$4u^2 = 4u^2k - a^2k,$$

et hinc

$$u = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{k}{k-1}},$$

quod, quia pro ω positivo fit $k > 1$, reale est.

Pro $-\omega$ vero erit

$$k = 1 - 2\omega\sqrt{a} + \omega^2 a;$$

sed ut tang. $v = \frac{1}{\sqrt{a}} - \omega$ sit, manifesto hic $\omega < \frac{1}{\sqrt{a}}$ esse debet, ut tangens positiva sit; si igitur $\omega = \frac{1}{\beta\sqrt{a}}$ ponatur (pro β positivo et > 1): erit, si nunc $1 - 2\omega\sqrt{a} + \omega^2 a$ dicatur k, radix ex $\frac{k}{k-1}$ imaginaria, quia tum k positivum et < 1 erit; nam

$$-2\omega\sqrt{a} + \omega^2 a = \frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{\beta} = \frac{\beta - 2\beta^2}{\beta^3},$$

quod (pro β positivo et > 1) negativum est.

Hosted by Google

5. *In hyperbola asymptoto nulla chorda parallela est.* Sit enim (Fig. 183.) prius parallela ad distantiam ω a centro, tum sit ad distantiam $\frac{a}{2}+b$.

Erit

$$\frac{a}{2}:\frac{\sqrt{a}}{2}=\frac{a}{2}+x-\omega:Y,\quad Y=\frac{\frac{a}{2}+x-\omega}{\sqrt{a}};$$

est vero

$$y=\sqrt{x+\frac{x^2}{a}};$$

adeoque si $Y=y$ esse possit, erit

$$\left(\frac{a}{2}+x-\omega\right)^2=ax+x^2,$$

et hinc $0=\frac{a^2}{4}+\omega^2-\omega a-2\omega x$, atque hinc

$$x=\frac{a^2}{2.4\omega}+\frac{\omega}{2}-\frac{a}{2},$$

quod si $\omega=\frac{a}{n}$ ponatur (pro $n>2$) valorem positivum ipsius x sed unicum dat.

Ita pro casu altero est (Fig. 184.)

$$\sqrt{a}:1=x-b:Y,\quad Y=\frac{x-b}{\sqrt{a}},$$

quod si $=y$ esse queat, erit

$$(x-b)^2=ax+x^2,$$

et hinc $ax+2bx=b^2$, et

$$x=\frac{b^2}{a+2b};$$

valor ipsius x pariter unicus, pro quo hyperbola infra axem secatur. Nam $(x-b)^2=(b-x)^2$; atque si

$$\frac{b^2}{a+2b}=b+\omega$$

ponatur, erit

$$\omega=\frac{b^2-ab-2b^2}{a+2b}=-\frac{ab+b^2}{a+2b},$$

Hosted by Google

quod negativum est. Asymptoto eadem inferius continuata, idem pro parte hyperbolæ ad lævam patet.

6. *Cuivis alii rectae autem per centrum ductae* (in eodem plano) *respondent chordae parallelae, et his diameter per centrum transiens.*

Fiat enim e c centro hyperbolæ semicirculus supra axem, et sit cf perpendicularis ad axem; concipiaturque cuivis tangentium (ad hyperbolam supra axem ad dextram a cf) parallela per c, dicaturque l hæc parallela, et recta e c per punctum tactus dicatur L, atque l et L sibi respondere dicantur. Quicunque angulus fuerit ab α (angulo asymptoti cum axe) incipiendo usque ad rectum ipsum et o (solum α excludendo): manifestum e dictis est, quemvis radium in quadrante dicto (præter asymptotum) esse ipsarum L et l aliquam, et cuivis hyperbolæ puncto aliam l, et cuivis l aliam L respondere, et quamvis ipsarum L et l ab asymptoto diversam esse. Idem nempe ad lævam patet.

Erat autem quævis L diameter pro chordis ipsi l parallelis, et quævis l diameter pro chordis ipsi L parallelis. Quævis recta igitur (præter asymptotos) per centrum hyperbolæ ducta diameter est. *Asymptotus autem diameter non* est; quia recta per c illa, ad quam parallelæ chordæ per asymptotum bisecarentur, aut asymptotus altera aut aliqua ipsarum L et l esset; asymptoto nulla chorda parallela est, et cuivis ipsarum L et l fuerint chordæ parallelæ, illi ipsarum altera respondet tanquam diameter, et quævis L aut l diversa ab asymptoto est, nec meditullia chordarum earundem in rectis diversis iacere queunt.

In ellipsi pariter tangenti cuivis parallela per centrum ducta l, et recta e centro per punctum tactus ducta L, atque l et L sibi invicem respondere dici possunt; angulus v autem heic a o usque ad rectum, a centro ad dextram lævamque eundo, quantusvis esse potest, et cuivis puncto dimidiæ ellipseos supra axem alia l, et cuivis alii l alia L respondet; unde reliqua fluunt.

Consequenter quaevis recta per centrum sectionis conicae (præter asymptotos) diameter est; et asymptotis atque axe parabolæ exceptis, chordarum ad quamvis rectam parallelarum meditullia in recta per centrum eunte iacent.

Hosted by Google

Quod vero nulla alia diameter sit, nec ulla pro aliis chordis sit, patet sic: pro parabola demonstratum (pag. 192) est; in ellipsi et hyperbola autem quæcunque alia diameter esset, chordæ per eam bisectæ alicui ipsarum L et l parallelæ essent; his autem certa diameter, nec alia recta ab hac diversa per meditullia chordarum earundem duci potest. Si vero eadem diameter et chordas alii ipsarum L et l parallelas bisecaret: et his chordis respondet certa diameter, et quidem alia a priore diversa; nempe cuivis L alia l respondet (pag. 202).

Scholion 2.

Centro et plures lineae ordinis altioris gaudent; et num linea quædam centro gaudeat, modo sequente inquiritur. (Fig. 185.)

Sit linea abscissarum $\mathfrak{AB}$, et origo in $\mathfrak{A}$, sitque $F(x)=y$; feratur linea abscissarum in rectam priori per $\mathfrak{c}$ parallelam, et ponatur origo abscissarum in $\mathfrak{c}$. Dicantur abscissæ novæ t, et ordinatæ u; facile patet, dari tales constantes α, β, ut sit $x=t+\alpha$, et $y=u+\beta$, adeoque $F(t+\alpha)=u+\beta$ (pro angulo coordinatarum eodem, qui prius erat, abscissis t et ordinatis u). Si igitur $\mathfrak{c}$ centrum fuerit, et accipiantur abscissæ e centro ad dextram lævamque æquales, erit ordinata positiva negativæ æqualis; adeoque t et u sive simul positiva sive simul negativa ponantur, æquatio $F(t+\alpha)-(u+\beta)=0$ pro quovis t manet.

Hinc autem sequitur, quod si æquatio ista ordinis n fuerit, nec ordine inferiore exprimi queat (de quo inferius): termini cuiusvis, in quo variabilium t, u numerus sub formam $n-2m+1$ venit (pro m integro et non 0), coefficiens 0 esse debet, siquidem linea centro gaudeat; atque si dentur talia α, β, ut quivis dictorum coefficientium $=0$ sit, linea centro gaudebit, secus autem illo carebit.

Nam n aut par aut impar erit. Si n par fuerit, quilibet terminorum dictorum numerum variabilium imparem habebit. Si itaque summa terminorum, in quibus numerus variabilium par est, S dicatur, et summa terminorum, in quibus variabilium numerus impar est, s dicatur; atque $S+s=0$ sit: S non mutabitur etsi pro $+t$ et $+u$ simul ponatur $-t$

Hosted by Google

et $\vdash u$, at s in $-s$ mutabitur; itaque nisi $s=0$ sit, $S+s$ et $S-s$ utrumque $=0$ esse nequit. Si vero $s=0$ sit, linea centro gaudet; adeoque si singulis coefficientibus dictis $=0$ positis, valores ipsorum α, β reperiantur, petito satisfiet. At si s non fuerit $=0$, centrum deerit.

Nempe tam $S=0$ quam $s=0$ esse debet; hoc autem fieri nequit, nisi singuli coefficientes dicti in s fuerint $=0$. Nam radices numero n æquationis $S=0$ manifesto a t dependent; exprimantur per $f(t)$; substituto quovis $f(t)$ ipsi u in s, oportet $s=0$ fieri; alioquin $S+s=0$ non esset. Sed hoc pacto $s=0$ omnes valores ipsius u exhiberet, quos $S-s=0$ præbet, neque $s=0$ plures radices habere potest, quum ad summum æquatio ordinis $(n-1)$-ti sit; itaque æquatio dicta gradu minore exprimeretur (contra hypothesin).

Si n impar sit, quilibet terminorum dictorum numero variabilium pari gaudet; atque S nec pro hoc casu mutatur, etsi pro t, u positivis negativa accipiantur; et s pariter $=0$ esse oportet; nam $s+S=0=-s+S$ esse aliter nequit, nisi tam S quam $s=0$ sit; si enim tantum $S=0$ esset, $s=-s$ esse nequit, nisi $s=0$ sit; si vero tantum $s=0$ esset, $S+s$ non esset $=0$, nisi et $S=0$ sit. Reliqua modo antea dicto patent.

Ex. gr. Sit $y^2-px=0$ (æquatio parabolæ pro parametro p); ponatur $t+\alpha$ pro x, et $u+\beta$ pro y; fiet $(u+\beta)^2-p(t+\alpha)=0=u^2+2\beta u+\beta^2-pt-p\alpha$; et si ponantur coefficientes superius dicti singuli $=0$, fiet $2\beta=0$, $p=0$, adeoque $\beta=0$, $p=0$, et parabola centro caret; quia pro $p=0$ esset quodvis $y=0$.

At parabolam ordinis $(2n+1)$-ti, cuius æquatio est $y^{2n+1}=px$, (nempe $y^{\mu}=px$ parabola ordinis μ-ti dicitur), centro gaudere vel inde patet, quod et abscissis manentibus, ac pro $\alpha=\beta=0$ mutatis tam x quam y e positivis in negativa, æquatio manet. At parabola ordinis $2n$-ti, nempe cuius æquatio est $y^{2n}-px=0$, centro carere modo antea dicto patet, ponendo $(u+\beta)^{2n}-p(t+\alpha)=0$, et singulos coefficientes dictos $=0$ ponendo; nimirum non solum $\beta=0$ prodibit, sed etiam p (nempe coefficiens ipsius t) $=0$ erit, adeoque manebit $u^{2n}=0$, id est $u=0$.

Hosted by Google

Scholion 3.

Linea secundi ordinis est aut parabola aut ellipsis, quo etiam circulus pro eccentricitate $=0$ pertinet, *aut hyperbola*, (*praeter* $y^2=cx^2$, *quo sectio plani cum cono per verticem exprimitur*; si una recta fuerit sectio, pro abscissis in hac sumtis, sit $c=0$; si vero duæ rectæ efficiant sectionem, tum abscissæ in recta angulos verticales bisecante e vertice accipiantur utrinque; et si sectio solum punctum ad verticem fuerit, c negativum accipi potest).

Nam lineam secundi ordinis prius diametro gaudere demonstratur; et tum pro abscissis in diametro acceptis, res patebit. (Fig. 186.)

Est æquatio generalis lineæ secundi ordinis

$$ay^2+(bx+c)y+(dx^2+ex+f)y^0=0;$$

ubi a non est $=0$, quia y habet duos valores pro abscissa per punctum internum chordæ ducta.

Dividatur æquatio per a; et pro $x=\mathfrak{AP}$ dicatur coefficiens posterior β, et prior α; erit $y^2+\alpha y+\beta=0$; adeoque fit

$$\mathfrak{PN}=-\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta},$$

$$\mathfrak{PM}=-\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}.$$

Itaque

$$\mathfrak{PN}-\mathfrak{PM}=\mathfrak{MN}=+2\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}:$$

et si $\mathfrak{L}$ huius meditullium sit, erit

$$\mathfrak{ML}=+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta},$$

$$\mathfrak{PL}=\mathfrak{PM}+\mathfrak{ML}=-\frac{\alpha}{2}=-\frac{bx+c}{2a}=-\frac{c}{2a}-\frac{bx}{2a};$$

atque pro quovis x et chordæ priori parallelæ medio, illi x respondente, idem prodit; nempe ordinata e fine ipsius x usque ad chordæ meditullium est $=-\frac{c}{2a}-\frac{bx}{2a}$; quæ manifesto æquatio rectæ est.

Hosted by Google

Itaque quum quarumvis trium chordarum parallelarum respectu ita duci possit abscissarum linea, ut chordæ illæ totæ in eandem plagam cadant: patet quarumvis trium chordarum parallelarum meditullia et consequenter omnia meditullia in eadem recta esse.

Si iam abscissæ in recta hac accipiantur, quævis æquatio lineæ secundi ordinis ad formam $y^2 = a + bx + cx^2$ reducetur. Nam in expressione priore coefficiens primus ipsius y evanescit, quia summa radicum binarum æqualium sed sibi invicem oppositarum est $= 0$ (Tom. I. pag. 399).

Tum vero aut $c = 0$ est, aut non: in casu primo fit $y^2 = a + bx$, æquatio parabolæ pro parametro b; mutetur nempe abscissarum t initium, ut sit $x = t - \frac{a}{b}$, fiet

$$y^2 = a + b\left(t - \frac{a}{b}\right) = a + bt - a = bt.$$

Si c non $= 0$, mutetur abscissarum t initium, ut sit $t = x + \frac{b}{2c}$, adeoque $x = t - \frac{b}{2c}$; fiet

$$y^2 = a + bx + cx^2 = a + b\left(t - \frac{b}{2c}\right) + c\left(t - \frac{b}{2c}\right)^2$$
$$= a + bt - \frac{b^2}{2c} + ct^2 - tb + \frac{b^2}{4c},$$

quod (pro A, B constantibus) sub formam $y^2 = A + Bt^2$ venit; ubi tam A quam B simul negativa esse nequeunt, quia tum valores ipsius y omnes imaginarii essent. Casus itaque sequentes sunt: $+A$ et $+B$, $+A$ et $-B$, $-A$ $-B$.

Pro casu primo, dum $y^2 = +A + Bt^2$, ponatur

$$A = \frac{d^2}{4} \quad \text{et} \quad +B = -\frac{d^2}{D^2};$$

adeoque $d = 2\sqrt{A}$ et $D = 2\sqrt{(-A : B)} = 2\sqrt{-(A : B)}$, ubi propter A positivum et B negativum, $-(A : B)$ et $-B$ positiva sunt, eritque $A + Bt^2$ id est $+A + Bt^2$

$$= \frac{d^2}{4} - \frac{d^2t^2}{D^2},$$

Hosted by Google

æquatio ellipseos e centro pro diametro D et eius coniugata d. Ponatur ex. gr. ipsorum D et d maius pro axe maiore, et alterum pro minore; si $D = d$, circulus est.

Casus secundus, dum $y^2 = \vdash\!\dashv A \dashv\!\vdash Bt^2$; ponatur

$$\vdash\!\dashv A = -\frac{d^2}{4} \quad \text{et} \quad \dashv\!\vdash B = \frac{d^2}{D^2};$$

et erit $A + Bt^2$ id est $\vdash\!\dashv A \dashv\!\vdash Bt^2$

$$= \frac{d^2t^2}{D^2} - \frac{d^2}{4},$$

æquatio hyperbolæ e centro pro diametro $D = 2\sqrt{(-A : B)}$, et coniugata eius $d = 2\sqrt{-A}$, ubi $-A$ pro A negativo positivum est.

Casus tertius, si tam A quam B positivum sit, sitque $y^2 = A + Bt^2$. In hyperbola pro abscissis x e centro in diametro D per punctum tactus eunte coniugataque d et ordinata y erat (pag. 196)

$$y^2 = \frac{d^2x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4};$$

atque hinc, si abscissæ item e centro in $\widetilde{d}$, quæ antea coniugata erat, accipiantur, et D fiat coniugata ipsius d, atque ordinatæ prioribus abscissis parallelæ æqualesque sint, adeoque x ordinatæ, y abscissæ vicem subeant: erat

$$x^2 = \frac{D^2y^2}{d^2} + \frac{D^2}{4}.$$

Si igitur $\frac{D^2}{4} = A$ adeoque $D = 2\sqrt{A}$ ponatur, et $\frac{D^2}{d^2} = B$ itaque $d = 2\sqrt{\frac{A}{B}}$, et in $y^2 = A + Bt^2$ ordinata y dicatur x, atque abscissa t dicatur y, æquatio proxima hyperbolæ e centro pro abscissis in diametro d tangenti parallela, et coniugata eius per punctum tactus eunte prodibit.

Hosted by Google

X.

Intersectiones linearum secundi ordinis, atque inde certarum aequationum resolutio.

Si duarum linearum L et l ordinatæ fuerint $Y = F(x)$ et $y = f(x)$, pro iisdem abscissis x (in eadem abscissarum linea ex eodem puncto incipientibus) et eodem ordinatarum angulo; atque pro quapiam abscissa x' fiant ordinatæ Y' ipsius L, et y' ipsius l æquales: erit $Y' - y' = 0$ seu $F(x') - f(x') = 0$, et lineæ L et l in extremitate communi ordinatarum Y' et y' se invicem secabunt; atque ubi se invicem secabunt L et l, pro abscissa puncto illi respondente erit $Y - y$ seu $F(x) - f(x) = 0$.

Si igitur $F(x) - f(x)$ ad formam

$$x^{\mu} + \alpha x^{\mu-1} + \beta x^{\mu-2} + \cdots + \varkappa x^{0} = 0$$

reduci queat, sitque æquatio resolvenda

$$x^{\mu} + Ax^{\mu-1} + Bx^{\mu-2} + \cdots + K = 0,$$

(denotantibus A, B,... constantes cognitas, μ numerum integrum, α, β,.. vero constantes indeterminatas); atque in duabus his æquationibus coefficientes eiusdem potentiæ æquentur: orientur æquationes $\alpha = A$, $\beta = B$,... $\varkappa = K$; e quibus si constantes a, b, c, ... ad linearum L et l constructionem (pro eadem abscissarum linea eodemque initio, et eodem coordinatarum angulo) requisitæ reperiantur, atque L et l construantur: ubicunque secuerint hæ se invicem, abscissa respondens radix æquationis erit.

Vocatur autem modus iste radices æquationis reperiendi *constructio aequationum.*

Notandum tamen est: ex eo, quod pro certo valore ipsius x æquatio $Y - y = 0$ fiat, intersectionem haud sequi; potest enim tam Y quam y imaginarium esse, sectio autem reales ordinatas requirit; fierique potest, ut æquatio nulla radice reali gaudeat.

Exempla. Pro aequatione gradus tertii: Sit parabolæ B (Fig. 187.) ordinata u pro abscissa t, et $u^2 = bt$, adeoque $t = \frac{u^2}{b}$; et ordinata pro

Hosted by Google

quovis puncto $\mathfrak{p}$ ipsius B ad abscissam x ex eodem abscissarum initio $\mathfrak{A}$ reducta dicatur Y; erit $x=u$, et $Y=t$, adeoque $Y=\frac{x^2}{b}$. Sitque parabolæ A pro abscissa x et initio eodem $\mathfrak{A}$ ordinata y, et $y^2=ax$; ponaturque $Y-y=0$, id est $\frac{x^2}{b}-\sqrt{ax}=0$; erit $\frac{x^4}{b^2}=ax$; atque hinc $x^3-ab^2=0$, et $x=\sqrt[3]{ab^2}$. Et hoc pacto radix cubica exhiberi poterit, sed minime constructione geometrica sensu stricto, quum parabolæ quodvis punctum, sed non omnia puncta ita construi queant. Potest $b^2=1$ poni, et quævis quantitas Q pro a accipi, ut sit $x=\sqrt[3]{Q}$; ex. gr. si $Q=2$ sit, erit $x=\sqrt[3]{2}$, adeoque $x^3=2$, et

$$1:x=x:x^2=x^2:2;$$

nempe erunt duæ proportionales mediæ x et x^2 inter 1 et 2; eritque (per inferiora) simul x latus dupli cubi illius, cuius latus 1 est; quod pro Apollinis ara geometrice construendum frustra postulaverat Oraculum peste *Athenis* furente interrogatum: nempe ex $Y-y=0$ sive duæ rectæ, sive recta et circulus, sive duo circuli fuerint generalitate summa expressæ, æquatio formæ $x^3-Q=0$ haud prodibit; uti calculo inito patet.

Pro æquatione $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ construenda autem mutetur (Fig. 188.) caput abscissarum in $\mathfrak{p}$, et abscissæ accipiantur in recta, in qua x est: erit

$$y=y'-a=\frac{(b+x)^2}{p}-a,$$

si $(b+x)^2=py'$; hinc vero est

$$y=\frac{b^2+2bx+x^2-ap}{p}=\frac{2bx+x^2}{p},$$

quia $b^2=ap$. Si vero $p=1$ ponatur, et $y=\frac{2bx}{p}+\frac{x^2}{p}$, fiet æquatio parabolæ ad formam $Y=ax+x^2$ reducta; nempe dicatur ordinata eius Y, et ordinata circuli radio r et centro $\mathfrak{c}$ (Fig. 189.) scripti, pro eodem x et eodem abscissarum principio $\mathfrak{p}$, dicatur y. Erit circuli ordinata

$$y=c+\sqrt{r^2-(x-e)^2};$$

atque si ponatur

Hosted by Google

$$Y - y = 0 = \alpha x + x^2 - c - \sqrt{r^2 - (x - e)^2},$$

erit

$$x^4 + 2\alpha x^3 + x^2(\alpha^2 + 1 - 2c) - x(2e + 2\alpha c) + e^2 - r^2 + c^2 = 0;$$

et si $e^2 - r^2 + c^2 = 0$ sit, reducetur æquatio ad formam

$$x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x = 0;$$

e quo per x dividendo fit

$$x + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0;$$

hinc si æquatio cubica construenda fuerit

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

eruantur constantes requisitæ ex æquationibus

$$A = \beta, \quad B = \gamma, \quad C = \delta,$$

(substituendo literis græcis valores superiores); et tum r ex $e^2 - r^2 + c^2 = 0$ prodit.

Pariter *aequatio biquadratica*

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + K = 0$$

construetur (positis supra dictis) ex æquatione priore

$$x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varkappa = 0,$$

si $(e^2 - r^2 + c^2)$ breviter $\varkappa$ dicatur.

Scholion. Altioris gradus æquatio $Y - y = 0$ pro duabus sectionibus conicis haud prodit. At lineæ cuiusvis, cuius ordinata

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + x^n,$$

(literis græcis constantes denotantibus), æquatio ordinis n-ti est; atque quodvis punctum eius construi geometrice sensu stricto potest, quum nonnisi multiplicationis additionisque certus numerus requiratur.

Si autem linea eiusmodi constructa sit: ubicunque fuerit $y = 0$, ab-

Hosted by Google

scissa x radix æquationis

$$x^n + \varkappa x^{n-1} + \cdots + \beta x + \alpha = 0$$

erit, secabiturque linea abscissarum in tot punctis, quot radices reales æquatio habet, quarum numerus integrum n superare nequit (Tom. I. pag. 397); fieri autem potest, ut omnes imaginariæ sint, nec ullibi secetur linea abscissarum a linea dicta. Itaque pro resolvenda quavis æquatione nonnisi construenda linea eiusmodi esset; quod tamen innumerabiles operationes propter puncta innumerabilia requirit.

XI.

Quoad areas ceteraque numerum hunc concernentia instituti ratio ad ea, quæ (Tom. I. pagg. 229 &) dicta sunt, relegare iubet.

222.

Linearum, quarum non omnia puncta quidem, sed aut quodvis, aut inter quaevis duo quotvis intermedia geometrice sensu stricto construere licet.

Exemplo sint sequentia.

1. Lineæ cuiusvis, cuius æquatio est

$$y \text{ vel } y^2 = \frac{ax^0 + bx^1 + cx^2 + \cdots + gx^n}{Ax^0 + Bx^1 + Cx^2 + \cdots + Hx^m},$$

quodvis punctum construi geometrice potest: certies requirens multiplicationem, additionem, divisionem et radicem quadraticam. Potest autem constantium $a, b, \ldots, A, B, \ldots$ quævis 0 esse, dummodo aliquis coefficiens, potentiæ alicuius non 0 ipsius x, haud 0 sit. Si y^2 sit, tum y erit radix e membro ad dextram, et chordæ per lineam abscissarum bisecantur. Talis est etiam *Cissois Dioclis*, linea ordinis tertii, cuius æquatio est

Hosted by Google

$$Ay^2 - xy^2 - x^3 = 0 \quad \text{seu} \quad y^2 = \frac{x^3}{A-x},$$

pro quo est $n = 3$, $m = 1$, et quilibet coefficientium est 0, præter $A = A$ et $g = 1$ atque $H = -1$.

2. Si quivis circulus fuerit, (Fig. 190.) et quævis puncta $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ fuerint, dicaturque quodvis peripheriæ punctum generaliter $\mathfrak{p}$, atque ducatur ex $\mathfrak{A}$ ad quodvis $\mathfrak{p}$ recta, et accipiatur in quavis recta $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{p}}$ ex $\mathfrak{p}$ utrinque recta æqualis rectæ $\mathfrak{p}\mathfrak{B}$, dicaturque cuiusvis rectæ ex $\mathfrak{p}$ acceptæ extremitas a $\mathfrak{p}$ diversa $\mathfrak{q}$: complexus omnium $\mathfrak{q}$ lineas variæ formæ producet; qualem (Fig. 191.) pro $\mathfrak{B}$ in peripheria, $\mathfrak{A}$ extra peripheriam, et $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ per $\mathfrak{c}$ centrum circuli eunte acceptis exhibet.

3. Si (Fig. 192.) peripheria A volvatur extus per peripheriam B, ita ut arcus $\mathfrak{bd}$ ipsius A sit æqualis arcui $\mathfrak{ab}$ ipsius B; aut intus volvatur circulus C, ut arcus $\mathfrak{bd}'$ sit æqualis arcui $\mathfrak{ab}$: via puncti $\mathfrak{a}$ ipsius A, *epicyclois* in casu primo, in postremo *hypocyclois* dicta, (si motus continuetur donec libuerit), talis erit, ut punctum quodvis eius construi geometrice possit, si radius circuli A vel C sit r, et radius R circuli B sit nr pro n integro. Nam si radiis R et r describantur circuli concentrici (Fig. 193.), pro quovis arcu $\mathfrak{ab}$ reperitur $\mathfrak{bd}$ et $\mathfrak{bd}'$, si e puncto $\mathfrak{a}'$ arcus $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ n-ies accipiatur.

Si motus extus fiat et $n = 1$ sit, tum linea redibit in $\mathfrak{a}$; et pro $n =$ alii numero, ex. gr. 5, totidem arcus describentur æquales in peripheria B terminati.

Si motus intus fiat et $r = \frac{R}{2}$, erit via diameter deorsum pro prima circumvolutione, tum eadem sursum erit, et idem semper repetetur. Nam (Fig. 192*.) sit $\mathfrak{bd}' = \mathfrak{ba}$, erit $\mathfrak{d}'$ in diametro $\mathfrak{af}$; nam anguli $\mathfrak{bcd}'$ (tanquam anguli ad peripheriam in circulo minore) quantitas est dimidium arcus $\mathfrak{bd}'$, et simul (ut anguli ad centrum in B) est arcus $\mathfrak{ba}$, qui item est $= \mathfrak{bd}'$ arcui duplo quoad gradus, quum radius bis minor sit.

4. Si via puncti $\mathfrak{p}$, in peripheria centri $\mathfrak{c}$ ex $\mathfrak{a}$ incipiendo semper porro moti, u dicatur, sitque certa recta α, ac cuiusvis u fine $\mathfrak{q}$ dicto, in quavis recta ipsi α per $\mathfrak{q}$ parallela, accipiatur y ex $\mathfrak{q}$ incipiendo, ita ut quævis duo y in plaga eadem ex. gr. superius terminentur; aut in

Hosted by Google

quavis recta e centro c per q ducta accipiatur y' vel y'' ex c incipiendo; atque sit $y = f(u)$, et $y' = F(u)$, ex. gr. sit $y = au$, et $y' = a : u$ vel au; aut $y'' = a^u$ & . . . (a rectam denotante): extremitatum omnium y, uti extremitatum omnium y', sive omnium y'', complexus linea certa erit.

Pro singulis, si unitas arcu peripheriæ dictæ exhibeatur (ponaturve), extremitas cuiusvis ordinatæ y vel y' aut y'' geometrice exhiberi pro quovis $u = \frac{m}{2^n}$ poterit, si m, n integros denotent; nempe $\frac{m}{2^n} = m \frac{1}{2^n}$, et arcus $= 1$ per 2^n dividi geometrice, atque partes eiusmodi numero m accipi possunt, et pro y et y' rectæ a potest $\frac{m}{2^n}$-tum accipi, ita pro y'' quoque potest a ad m elevari, et inde radix 2^n-ti gradus geometrice exhiberi. Sed si u nequeat per fractionem numeratoris integri, nec per denominatorem arcus geometrice dividi queat, (si ex. gr. $u = \frac{1}{7}$), nullum ipsorum y, y', y'' exhiberi geometrice poterit; nempe pro y et y' nullo modo constabit, quodnam u sit $= \frac{1}{7}$, pro y'' autem radix 7 gradus ex a geometrice extrahenda esset. Si vero recta ponatur pro unitate, y'' nonnisi pro $u = 0$ et $a^0 = 1$ geometrice exhibebitur, nullum aliud u enim per rectam, tanto minus fractione formæ dictæ, exprimi poterit.

Plura quoque huius generis Tyrones ipsi cogitare possunt.

·223.

De lineis ordinis cuiusvis in genere quaedam scitu magis necessaria (pag. 149).

1. Si abscissarum initium in eadem abscissarum linea mutetur ex $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$ vel in $\mathfrak{a}'$ (Fig. 194.), et abscissæ dicantur x pro $\mathfrak{A}$, et t pro $\mathfrak{a}$, atque t' pro $\mathfrak{a}'$; sitque $y = f(x)$: erit $x = t + \alpha = t' - \alpha$; consequenter $y = f(t + \alpha) = f(t' - \alpha)$ erit æquatio lineæ pro abscissis novis, nempe prior pro t, posterior pro t'.

2. Si linea abscissarum mutetur in $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ priori $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ parallelam, (Fig. 195.) et $\mathfrak{A}'$ fiat novarum abscissarum origo, nempe ubi nova abscissarum linea per rectam ex $\mathfrak{A}$ priore abscissarum origine ductam ad ordinatas priores parallelam secatur: erit (manente angulo coordinatarum) ordinata nova $Y = y + \beta$, itaque $Y = f(x) + \beta$; si $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ supra $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ duca-

Hosted by Google

tur, β negativum erit; aut si positive sumatur, subtrahendum ex $f(x)$ erit; itaque in casu isto erit $y = Y - \beta$, in altero autem $y = Y + \beta$.

3. Si vero, manente angulo coordinatarum, tam origo abscissarum mutetur in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, quam linea abscissarum mutetur in $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, ut fiat ex. gr. $t + \alpha$ ex x, $Y + \beta$ ex y: fiet pro novis abscissis t in $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ e novo abscissarum initio et novis ordinatis Y æquatio $Y + \beta = f(t + \alpha)$, substituendo nempe $Y + \beta$ ipsi y, et $t + \alpha$ ipsi x. Si $Y - \beta$ ex y, aut $t' - \alpha$ ex x factum fuerit, id substituendum esse patet. Neque vero hac mutatione æquationis ordo mutatur, quum cuivis x, etsi pluries ut factor occurrat, t plane toties substituatur; idemque de y patet. In genere si æquatio lineæ sit $F(x, y) = 0$ pro coordinatis x, y: erit lineæ eiusdem pro eodem coordinatarum angulo, sed abscissis t et ordinatis u, æquatio $F(a(t), b(u)) = 0$, si $x = a(t)$ et $y = b(u)$.

4. Si angulus coordinatarum mutetur, sive obliquus q in rectum sive rectus in obliquum q, prodibit æquatio lineæ modo sequente.

Sit prius q in rectum mutandus: fiat (Fig. 196.) ex $\mathfrak{A}$ origine abscissarum ad ordinatas perpendicularis, sitque abscissa nova z, et ordinata eius sit u, nempe ordinata y abscissæ prioris x usquequo novam abscissarum lineam secat. Erit

$$x : z = 1 : \sin. q \quad \text{et} \quad k : z = 1 : \tan. q;$$

atque hinc

$$x = \frac{z}{\sin. q} \quad \text{et} \quad k = \frac{z}{\tan. q};$$

ac

$$y = u - k = u - \frac{z}{\tan. q} = u - z \cot. q;$$

quibus valoribus in æquatione lineæ ipsis x et y substitutis, prodibit æquatio lineæ eiusdem quæsita; nec ordo lineæ ob rationem antea dictam mutabitur.

Rectangularium coordinatarum x, y angulus rectus in obliquum q pariter mutabitur modo sequente: sit (Fig. 197.) abscissa t priori parallela et ordinata u; erit

$$y + b : u = \sin. q : 1 \quad \text{et} \quad u : k = 1 : \cos. q;$$

Hosted by Google

hinc

$$y = u \sin. q - b \quad \text{et} \quad k = u \cos. q,$$

estque $t = x - a + k$, adeoque

$$x = t + a - k;$$

quibus valoribus substitutis in æquatione lineæ pro coordinatis x, y, prodibit æquatio quæsita pariter ordinis eiusdem.

5. Si abscissis x (Fig. 198.) in $\mathfrak{AB}$ ex $\mathfrak{A}$ acceptis respondeant ordinatæ perpendiculares y, atque origo abscissarum in $\mathfrak{A}'$ ponatur, et abscissæ t in $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}$ accipientur (rectam $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ lineæ abscissarum priori parallelam ad angulum q secante): æquatio lineæ pro abscissis t et ordinatis u reperitur modo sequente. Sit ex $\mathfrak{A}'$ ad lineam abscissarum priorem perpendicularis b, atque ex $\mathfrak{B}'$ fiant perpendiculares $\mathfrak{B}'\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{B}'\mathfrak{K}$ ad u et $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}$.

Erit propter triangula rectangula verticalia angulus ad $\mathfrak{M}$ angulo q ad $\mathfrak{A}'$ æqualis; et $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = x + a$, $k = \mathfrak{M}\mathfrak{B}'$.

Estque

$$x + a : t + k = 1 : \cos. q,$$

et hinc

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{K} = t + k = (x + a) \cos. q \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = x + a = \frac{t + k}{\cos. q};$$

est porro

$$x + a : l = 1 : \sin. q,$$

unde

$$\mathfrak{B}'\mathfrak{K} = l = (x + a) \sin. q;$$

est etiam

$$(y + b) : k = 1 : \sin. q,$$

et hinc

$$\mathfrak{M}\mathfrak{B}' = k = (y + b) \sin. q;$$

porro

$$(y + b) : (u - l) = 1 : \cos. q,$$

unde

$$\mathfrak{M}\mathfrak{N} = u - l = (y + b) \cos. q;$$

atque hinc

$$t = \mathfrak{A}'\mathfrak{K} - k = (x + a) \cos. q - (y + b) \sin. q$$

et

$$u = \mathfrak{M}\mathfrak{N} + l = (x + a) \sin. q + (y + b) \cos. q,$$

et hinc

$$x + a = \frac{u - (y + b) \cos. q}{\sin. q} = \frac{t + (y + b) \sin. q}{\cos. q}.$$

Hosted by Google

Unde valores in æquatione ipsis x et y substituendi sic reperiuntur: Si brevitatis caussa sin. q dicatur q', et cos. q dicatur q'', erit

$$x + a = \frac{t + (y+b)q'}{q''} = \frac{u - (y+b)q''}{q'};$$

et hinc

$$tq' + (y+b)q'^2 = uq'' - (y+b)q''^2;$$

atque hinc

$$(y+b)(q'^2 + q''^2) = q''u - q't;$$

et (quia omnia pro radio 1 computata sunt, adeoque $q'^2 + q''^2 = 1$), erit $y + b = q''u - q't$; consequenter

$$y = q''u - q't - b.$$

Eodem modo prodit

$$x = q'u + q''t - a;$$

quibus valoribus in æquatione lineæ ipsis x et y substitutis, prodit æquatio lineæ quæsita.

Quod vero omnibus his substitutionibus ordo lineæ maneat, sic patet: si pro coordinatis x et y linea n-ti ordinis fuerit, numerus variabilium x, y tanquam factorum in aliquo termino plane n est, et in nullo ipsum n superat. Consideretur terminus quivis, in quo x ut factor m-ies, y vero $(n-m)$-ies occurrit; substituantur valores novi ipsis x et y; neglectis factoribus constantibus, quæ ad lineæ ordinem nihil conferunt, mutabitur terminus in $[(u+t)-a]^m [(u-t)-b]^{n-m}$, ubi item quoad ordinem lineæ nonnisi variabiles respiciendo, $[(u+t)^m + (u+t)^{m-1} + \cdots]$ per $[(u-t)^{n-m} + (u-t)^{n-m-1} + \cdots]$ multiplicatum considerandum venit.

In binomio ad μ elevato summa exponentium in quovis termino idem μ est; si igitur terminus quicunque ipsius $(u+t)^m$ per terminum quemcunque ipsius $(u-t)^{n-m}$ multiplicetur, summa literarum variabilium (ut factorum) in facto erit $m + n - m = n$; in facto autem e quolibet termino item ipsius $(u+t)^m$ per quemlibet terminum ipsius $(u-t)^{n-m-1}$, numerus variabilium erit $m + n - m - 1 = n - 1$; et patet in nullo facto, nisi quod ex $(u+t)^m (u-t)^{n-m}$ oritur, numerum variabilium ad n exsurgere; quodvis enim ex $(u+t)^{m-m'}$ per $(u-t)^{n-m-n'}$ multiplicato ori-

Hosted by Google

tur, (denotantibus m', n' integros positivos, et $m'<m$, $n'<n-m$); fiet igitur summa literarum variabilium

$$m-m'+n-m-n'=n-m'-n'=n-(m'+n')$$

quod $<n$ est; est nempe $m'+n'<n$, quia $n=n-m+m$, et $n'<n-m$ atque $m'<m$.

Consequenter *utcunque mutetur abscissarum linea et origo abscissarum angulusque ordinatarum, ordo lineae manet.*

Notandum autem per multiplicationem terminorum dictorum omnium prodire omnes terminos, tam qui nonnisi aliquam variabilium t et u continent, quam qui quocunque numero ν ipsum n haud superante continet quamvis aliquam ipsarum t et u, et alteram ν'-ies continet (pro $\nu+\nu'$ haud $>n$); nempe ut (Tom. I. pag. 562) dictum est, omnes *uniones, biniones* & prodire ex t et u, usque ad n-iones (inclusive) *admissa repetitione literae eiusdem, haud numerata diversa earundem literarum permutatione.* Facile hoc patet, quum ex $(t+u)^\nu$ prodeat omnis possibilis ν-io, uti ex $(t-u)^{\nu'}$ omnis possibilis ν'-io, adeoque ex $(t+u)^\nu(t-u)^{\nu'}$ omnis possibilis $(\nu+\nu')$-io.

6. *Linea ordinis* n-ti *a nulla recta in pluribus quam* n *punctis secari potest.*

Nam etsi recta quævis pro linea abscissarum accipiatur, gradus æquationis haud augetur. Erit autem ubicunque secuerit linea rectam abscissarum t, ordinata $u=0$; adeoque pro $u=0$ omnes termini æquationis ipsam u ut factorem continentes disparent, et pars reliqua æquationis, quæ nonnisi variabilem t nec eam ad ipso n altiorem gradum elevatam continet, erit $=0$ pro $u=0$; quamobrem plures quam numero n valores illi ipsius t, pro quibus $u=0$, dari nequeunt.

7. *Linea* n-ti *ordinis per* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ *puncta determinatur,* et quidem ita, ut quanquam non ad quamvis tot puncta requirantur, per tot puncta nulla linea ordinis n-ti alia duci possit; et per quævis data $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ puncta linea aliqua ordinis n-ti duci possit, dummodo eorum plura quam n puncta in recta haud sint, quia linea ordinis n-ti in pluribus quam n punctis rectam non secat.

Hosted by Google

In æquatione generali lineæ ordinis n-ti sunt (pag. 149) termini numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, quorum primus constans sine ulla variabili est.

Sint (Fig. 199.) puncta data $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, . . .; ducatur linea abscissarum quæcunque $\mathfrak{K}\mathfrak{H}$, et sit $*$ origo abscissarum, demittantur ex $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, . . . perpendiculares A, B, C, . . . tanquam ordinatæ respondentes abscissis a, b, c, . . .; substituatur prius in æquatione generali ubicunque a abscissæ t et A ordinatæ u, dein in eadem priore æquatione generali substituatur ubique b abscissæ t et B ordinatæ u, tum substituatur item in æquatione generali c abscissæ t et C ordinatæ u, et ita porro; donec tot æquationes gradus primi prodeant, quot puncta data et quot constantes quærendæ sunt; itaque constantes ex iis determinantur; et linea pro constantibus repertis in æquationem positis, erit gradus n-ti per data puncta transiens.

Potest etiam constans variabili destituta $= 1$ poni, et reliquæ constantes quoad eam exprimi.

Neque autem ulla alia linea n-ti ordinis per eadem puncta transit. Nam si alia linea L esset per eadem puncta transiens: reducta ad lineam abscissarum priorem et idem abscissarum initium, quod prius erat, modo dicto æquatio generalis easdem æquationes pro constantibus reperiendis, easdemque constantes, adeoque eandem lineæ L æquationem præbebit.

8. Si lineæ n-ti ordinis æquatio sit $F(x, y) = 0$ pro abscissa x et ordinata y, atque pro iisdem abscissis et ordinata u sit lineæ m-ti ordinis æquatio $f(x, u) = 0$: pro omni casu, ubi lineæ hæ se invicem secant, $u = y$ esse oportet; adeoque pro illo x debet $F(x, y) = 0 = f(x, u)$ esse.

Probari autem potest, eliminato y æquationem nonnisi ad gradum mn assurgere; adeoque haud dari posse plures eiusmodi valores ipsius x, pro quibus $u = y$ fiat, adeoque lineæ dictæ se invicem secent; quanquam non dicatur in tot punctis secare posse. Sed instituti ratio transire ad numerum ·3 iubet.

Hosted by Google

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SECTIO IV.

REDITUS E PLANO IN ABYSSUM SPATII.

·3·

Ambitus constructionis geometricae sensu lato; numero rectarum operationumque trium primitivarum finito, nempe præter duas, quæ in constructione geometrica sensu stricto adhibebantur, etiam tertia admittitur, exclusa tamen hic quoque operationum coniunctione.

Ordo (in calce) præscriptus plura satis declarat, et primaria quoque (pagg. 38 &) dicta repetere supervacuum est: ex. gr. quod *recta cum plano* aut punctum, aut totam se, aut nihil *commune* habeat; *planum cum plano* aut rectam, aut nihil commune habeat; porro quod recta per planum, pariter planum per planum in alteram plagam transeat; &. Nempe

·3. REDITUS E PLANO IN ABYSSUM SPATII.

·31. *Numero* rectarum operationumque trium primitivarum *finito* (constructio geometrica sensu lato): nimirum duabus accedit tertia, nempe *motus circa axem.*

·311. Motus circa axem linearum planorumque, absque figurarum respectu.

·3111. *Linearum motus circa axem*, figuras haud efficientium.

·31111. Rectilineorum figuras haud constituentium motus circa axem.

·311111. *Unus motus circa axem.*

·3111111. Complexus duarum rectarum se mutuo in plano P secantium motus circa unam earundem: parit, si angulus rectus fuerit, *planum*, secus autem *conos verticales.*

Hosted by Google

·311111·2.

Plana parallela describuntur (pag. 42).

·31111·2.

Recta e puncto extra planum P, ad duas rectas in P sitas perpendicularis, est ad planum P perpendicularis (pag. 39); patetque planum per α descriptum (in ·31111·2) et planum per β descriptum punctum $\mathfrak{p}$ commune habere, et se invicem in recta secare; *darique* igitur e *quovis plani P puncto* $\mathfrak{p}$ *perpendicularem ad P*; esseque unicam ex $\mathfrak{p}$ ad P (pag. 39).

Patet etiam *quamvis rectam, quae ad planorum parallelorum P et Q* (in ·311111·2) *aliquod perpendicularis est, esse ad alterum eorundem quoque perpendicularem*; atque *quasvis duas eiusmodi rectas esse aequales et parallelas*; et hinc etiam *quasvis duas rectas eidem tertiae parallelas inter se quoque parallelas esse.*

1. Nempe quoad primum (Fig. 200.): si $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = \mathfrak{c}\mathfrak{c}'$, erit $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'$ rectangulum, atque in motu circa $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ describent $\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{c}'$ circulos radiis æqualibus $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$ (in planis P et Q); atque tangentes circulorum horum in plana P et Q cadent, et recta $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ ad tangentem in $\mathfrak{b}'$ circuli radio $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ in P scripti, et pariter ad tangentem in $\mathfrak{c}'$ radio $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$ in Q scripti perpendicularis est: nam $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'$ sive antrorsum sive retrorsum moveatur circa $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, generationes æquales sunt (Tom. I. pag. 12); est igitur $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ tam in P quam in Q ad duas rectas perpendicularis, consequenter tam ad P quam ad Q perpendicularis.

·311111·2. E punctis $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ rectæ A in plano aliquo sint perpendiculares $B, C, \ldots$, moveaturque schema circa A; viæ rectarum $B, C, \ldots$ erunt *plana parallela* $P, Q, \ldots$

·31111·2. *Plures motus circa axem*: sint in plano P ad rectas A, B, se mutuo in $\mathfrak{p}$ secantes, rectæ α, β, ex $\mathfrak{p}$ perpendiculares; vertaturque α circa A, et β circa B; via prioris secare viam posterioris debet, atque ibidem est perpendicularis ad P.

Hosted by Google

Potest vero quævis recta ad planum P vel Q perpendicularis per $\mathfrak{bc}$ aut $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ repræsentari: nam quodvis punctum alterutrius (ex. gr. plani P) aliquod punctum rectæ $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ est, itaque per $\mathfrak{b}'$ repræsentari potest; ex $\mathfrak{b}'$ autem ad P nonnisi unica perpendicularis ad P datur; eratque hæc $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, atque eadem ad planum Q perpendicularis est.

2. Quoad secundum. Si duæ eiusmodi rectæ $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ et $\mathfrak{b}''\mathfrak{c}''$ in planis parallelis P et Q terminatæ ad utrumque perpendiculares fuerint: erit (pro $\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{b}''$ in P, et $\mathfrak{c}'$ et $\mathfrak{c}''$ in Q sitis) tam recta $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ quam $\mathfrak{b}''\mathfrak{c}''$ perpendicularis tam ad rectam $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''$ quam ad rectam $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}''$; consequenter quadrilaterum rectilineum $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''\mathfrak{c}''\mathfrak{c}'$ erit rectangulum, adeoque $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \parallel$ et $= \mathfrak{b}''\mathfrak{c}''$.

3. Unde etiam sequitur, quod si (Fig. 201.) rectæ E, F eidem rectæ A parallelæ fuerint, inter se quoque parallelæ erunt. Nam sint e punctis $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ipsius A ad rectas E, F perpendiculares $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$ et $\mathfrak{b}\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}''$; erit $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' = \mathfrak{bc} = \mathfrak{b}''\mathfrak{c}''$; moveatur circa A schema ut prius: manifesto erunt rectæ $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}''\mathfrak{c}''$ ad plana parallela per rectas $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$ descripta perpendiculares; adeoque (per præcedentia) erunt E et F parallelæ.

Atque hinc etiam patet *e quovis puncto* $\mathfrak{p}$ *extra planum* P *sito dari rectam ad* P *perpendicularem*. Nam sit (Fig. 202.) e quovis puncto $\mathfrak{a}$ plani P recta α ad P perpendicularis, sitque $\mathfrak{pf}$ ad α e puncto $\mathfrak{f}$ ipsius α perpendicularis, atque in plano $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$, quod propter punctum $\mathfrak{a}$ commune secat planum P in recta $\mathfrak{ab}$, accipiatur in hac sectione utriusque plani recta $\mathfrak{ab} = \mathfrak{fp}$; et concipiatur moveri $\mathfrak{pfab}$ circa $\mathfrak{af}$: fient duo plana parallela, et recta $\mathfrak{pb}$ perpendicularis ad P.

·31121.

De angulo duorum planorum quoque dictum (pag. 40) est: unde etiam ibidem patet dari e quavis recta imo e quovis puncto plani P planum perpendiculare ad P.

·3112. *Motus planorum circa axem.*

·31121. *Motus unus*: planum, circa rectam quamvis in eo sitam motum producit angulum duorum planorum.

Hosted by Google

Sed demonstrantur ibidem sequentia: *Quodvis planum Q, in quod recta perpendicularis ad planum P cadit, est perpendiculare ad P; et si sectio planorum P et Q sit* $\overline{\mathfrak{ab}}$, *perpendicularis ad P e quolibet puncto rectae* $\mathfrak{ab}$ *in Q cadit; item quaevis perpendicularis ad* $\overline{\mathfrak{ab}}$ in *Q cadens est perpendicularis ad planum P* (pagg. 40 &).

Si vero *praeter planum Q etiam planum q sit perpendiculare ad P, atque Q et q secent se invicem, sectio planorum Q et q erit recta ad planum P perpendicularis* (pag. 42).

Quod *anguli planorum se invicem secantium verticales aequales sint* &, vide (pagg. 40 &).

·311221.

Sit (Fig. 203.) $\mathfrak{c}$ punctum commune, concipiaturque facies plani $\mathfrak{abcde}$ superior alba, inferior nigra; moveaturque prius planum $\mathfrak{bcde}$ circa $\mathfrak{bc}$, ita ut facies alba ipsius $\mathfrak{cbde}$ faciei albæ ipsius $\mathfrak{acb}$ obvertatur, et tum moveatur planum $\mathfrak{cde}$ circa $\mathfrak{cd}$, ita ut si prius alba facies albæ obvertebatur, et nunc alba ipsius $\mathfrak{cde}$ facies albae ipsius $\mathfrak{cdb}$ faciei obvertatur: si per planum altera vice motum secetur $\mathfrak{abc}$ (cadente ex. gr. $\mathfrak{ce}$ in $\mathfrak{ca}$), orietur *angulus solidus rectilineus* per tria latera nempe sectores $\mathfrak{acb}$, $\mathfrak{cbd}$, $\mathfrak{cde}$ ad apicem communem clausus, quorum summa manifesto est minor quatuor rectis.

Patet etiam $\mathfrak{cfe}$ circa $\mathfrak{cf}$ moveri, motumque quoties libuerit continuari posse: ut angulus solidus numero laterum quolibet claudatur. Poterit conditio esse, ut facies nigra nigræ obviam semper eat, aut hæc conditio tolli.

·31122. *Plures motus plani circa axem.*

·311221. Cuiusvis motus axi punctum idem $\mathfrak{p}$ commune: nempe intelligantur omnia in eadem spatii e plano P plaga (ex. gr. superiore), sitque motus plani cuiusvis angulus $< 2R$, denotante R rectum; moveaturque sub hac conditione planum P circa rectam $\mathfrak{pa}$ in eo sitam; atque e quovis loco, unde libuerit, moveatur item circa aliquam rectam ipsiusdem per $\mathfrak{p}$ euntem, continuando donec libuerit; orietur *angulus solidus rectilineus*. Poterit ea quoque determinatio accedere, ut P semper versus faciem illam moveatur, quæ inferior erat.

Hosted by Google

Notandum autem est *numerum laterum anguli solidi rectilinei ad apicem communem clausi minimum esse tres*, et latera talia esse, ut *summa quorumvis binorum* (ut in triangulo) *maior tertio sit.* Nam si (Fig. 204.) arcus $ba = ba'$ et $da' = de$: moveatur abc circa bc, donec ca in ca' cadat, et moveatur dce circa cd, donec ce in ca' cadat; atque tum moveatur retrorsum abc circa cb, et dce circa cd; describent puncta a et e circulos in superficie sphæræ; sit enim $aA \perp cb$, et manifesto describet in motu dicto Aa planum et a circulum, qui omnino in superficie sphæræ erit, manente nempe centro c et radio ca. Duo hi circuli autem si præter punctum a adhuc aliquid commune haberent supra planum cbd, fieret id etiam inferius; adeoque duo circuli se invicem in pluribus quam duobus punctis secarent. Hoc autem fieri nequit, etsi circuli non in idem planum cadant: sint enim puncta p, a, q circulo utrique C et c communia; ea non in recta sunt, adeoque planum idem circuli utriusque determinant; ibi vero duo circuli tria puncta communia habere nequeunt.

Atque manifesto si summa arcuum ab et de sit arcu bd minor, ex. gr. sit arcus $ab = ba'$ et arcus $de = de'$, et sint ex e ad cd, et ex a ad cb perpendiculares eE et aA: circuli centrorum A et E radiis Aa et Ee secare se invicem prorsus nequeunt. Nam si circuli priores se invicem nonnisi in a' secabant, circulus centri E radii eE nihil cum circulo centri A radii Aa' commune habebit; namque circulus in superficie sphæræ circa centrum d per punctum e scriptus, totus intra circulum centri eiusdem per punctum a' scriptum manet.

Quod nempe via talis in superficie sphæræ circulus sit, patet e prius dictis, ubi aA perpendicularis ad cb mota planum, et a circulum plano sphæræque communem generat.

Sunt igitur in angulo solido rectilineo trilatero quævis bina latera simul sumta tertio maiora. Atque hinc patet etiam, *quodvis triangulum sphaericum*, nempe figuram in superficie sphæræ e tribus arcubus circuli maximi compositam, *talem esse, ut summa quorumvis binorum laterum tertio maior sit*: secus enim anguli solidi dicti bina quædam latera tertio maiora non essent. Unde et via minima inter duo puncta superficiei sphæricæ in circulo maximo est.

Hosted by Google

Est quoque angulus solidus rectilineus dictus *per tria latera forma* absolute *determinata*, uti triangulum rectilineum per tria latera; et *idem de triangulo sphaerico* patet. Nam si (Fig. 205.) c in centrum sphæræ ponatur, et c in c manente, e in a cadat, trianguli apex d cadet aut supra aut infra planum acb, neque vero ullum aliud tale punctum d′ in eadem plaga (ex. gr. supra planum) datur; quia tum duo circuli extremitate d perpendicularium ex d ad $\widetilde{ac}$ et $\widetilde{bc}$ missarum, circa has motarum, descripti se invicem supra planum in duobus, adeoque et infra illud in duobus secarent.

Manifesto quoque forma determinata generatur, etiamsi novus angulus solidus rectilineus trium laterum, ad eundem apicem, priori ita iungatur, ut nonnisi unum latus (nempe unus sector) utrique commune sit; idemque compositione plurium eiusmodi angulorum continuari posse patet, eodemque ordine iuxta se invicem positis eiusmodi angulis, formam determinatam, eidem semper æqualem, generari.

·31122211.

Planum R, plana parallela P, Q secans, alternos angulos et externum interno oppositum aequales, atque summam duorum internorum duobus rectis aequalem facit (Fig. 206.).

Fiat enim e puncto quopiam p plani P perpendicularis pp′ ad planum R, perpendicularis pq ad planum Q, atque ponatur per pqp′ pla-

·311222. Plures motus circa axem, absque puncto axium communi;

·3112221. Nonnisi planorum.

·31122211. Moto planorum (in ·3111112) parallelorum P, Q, uno circa quamvis rectam in eo sitam, donec ad alterum perveniat: novo hoc plani loco R dicto, *anguli* ab R cum P et Q facti *alterni* comparantur.

·31122212. Moto R circa rectam quamvis α per P et Q. euntem: novo plani loco S dicto, quæruntur sectiones cum P et Q formæ ex R et S constantis.

·31122213. Moto S quoque circa quamvis rectam β per P et Q euntem: novo plani loco T dicto, quæruntur sectiones cum P et Q formæ ex R, S, T compositæ; tam pro casu si $\alpha \parallel \beta$, quam si non.

·3112222. Planorum cum rectis.

Hosted by Google

num A; erit A tam ad P quam ad Q imo et ad R perpendiculare; nam $\mathfrak{pq}$ est tam ad P quam ad Q perpendicularis, adeoque planum per $\mathfrak{pq}$ positum est perpendiculare ad P et Q (pag. 222), ita planum per $\mathfrak{pp}'$ positum est perpendiculare ad R.

Sint porro sectiones plani A cum planis P, Q, R rectæ $\mathfrak{pi}'$, $\mathfrak{qr}'$, $\mathfrak{ip}'\mathfrak{r}$; erunt anguli $\mathfrak{i}'\mathfrak{pq}$ et $\mathfrak{r}'\mathfrak{qp}$ recti, atque parallelæ $\mathfrak{pi}'$, $\mathfrak{qr}'$ (in quibus secat planum A plana parallela P, Q) cum recta per $\mathfrak{p}'$ planis A et R communi in eodem plano A sunt. Est autem summa internorum, quos rectæ $\mathfrak{p}'\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{pi}'$ ad $\mathfrak{pp}'$ faciunt, ita summa internorum, quos rectæ $\mathfrak{p}'\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{qr}$ ad rectam $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}$ faciunt, duobus rectis minor. Consequenter $\mathfrak{pi}'$ et $\mathfrak{qr}'$ per $\mathfrak{ir}$ secantur; fiat hoc in $\mathfrak{i}''$ et $\mathfrak{r}''$. Unde assertum patet, quum angulorum, qui planorum parallelorum P et Q per tertium facta sectione generantur, quantitates eædem sint, quæ rectarum $\mathfrak{pi}'$ $\mathfrak{qr}'$ parallelarum per tertiam sectarum. Idem vero eodem modo patet, si $\mathfrak{p}'$ supra vel infra plana P et Q cadat.

·31122212.

Sectiones planorum R et S cum planis parallelis P et Q non solum sibi invicem parallelae sunt, sed etiam angulos aequales faciunt. (Fig. 207.). Sint enim planorum R et S cum P sectiones $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$ adeoque sit $\triangle$ $\mathfrak{bac}$, et cum plano Q sectiones $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{AC}$ adeoque sit $\triangle$ $\mathfrak{ABC}$; fiantque $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{AC}$ æquales; erunt $\mathfrak{ab} \parallel \mathfrak{AB}$, $\mathfrak{ac} \parallel \mathfrak{AC}$, atque $\mathfrak{AabB}$ et $\mathfrak{AacC}$ parallelogramma (pag. 68); itaque $\mathfrak{cC}$ et $\mathfrak{bB}$, eidem $\mathfrak{aA}$ parallelæ et æquales, erunt inter se quoque parallelæ et æquales. Consequenter $\mathfrak{cbBC}$ erit parallelogrammum (pag. 68); adeoque $\mathfrak{cb} = \mathfrak{CB}$; et per consequens $\triangle \mathfrak{cab} = \triangle \mathfrak{CAB}$ (per tria latera); itaque et $\wedge \mathfrak{cab} = \wedge \mathfrak{CAB}$, et anguli ad basim $\mathfrak{cb}$ angulis ad basim $\mathfrak{CB}$ æquales sunt.

Atque hoc continuari posse patet, si ut in numero

·31122213

etiam planum T, imo plura quotvis accedant. Si vero ibidem $\alpha \parallel \beta$ fuerit, sectio in P sectioni in Q æqualis erit; nempe non solum anguli sibi invicem

Hosted by Google

respondentes æquales, (quod etiamsi α non $\parallel \beta$, semper est), sed et latera sibi invicem respondentia æqualia erunt: considerentur enimvero duæ eiusmodi parallelæ uti α et β sunt; sit $\mathfrak{a}$ extremitas in P cadens ipsius α, et extremitas in Q sit $\mathfrak{a}'$, extremitas in P ipsius β sit $\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{b}'$ in Q; erit recta $\mathfrak{ab}$ in plano P rectæ $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ in Q parallela; quia in planum parallelarum α et β cadunt, et sectiones per hoc factæ planorum parallelorum P et Q sunt; itaque latera sibi invicem respondentia quoque nempe latera opposita parallelogrammi sunt æqualia.

·31122221.

Cum planis parallelis P, Q non solum planum tertium secans, sed et recta cum alterutro ipsorum P, Q aliquid commune habens, in neutrum incidens, angulos alternos aequales, pariterque externum interno opposito aequalem, et summam duorum internorum duobus rectis aequalem facit.

Si enim (Fig. 208.) ex puncto $\mathfrak{p}$ ipsius P ad quodvis punctum $\mathfrak{q}$ vel $\mathfrak{q}'$ recta concipiatur, fiant e punctis $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ (vel $\mathfrak{q}'$) perpendiculares $\mathfrak{pP}$, $\mathfrak{qQ}$ (vel $\mathfrak{q}'\mathfrak{Q}$) ad Q; erunt hæ etiam ad P perpendiculares, atque $\mathfrak{pPQr}$ rectangulum erit; unde propter summam duorum internorum, (quos ad $\mathfrak{pP}$ faciunt $\mathfrak{PQ}$ et $\mathfrak{pq}$, vel $\mathfrak{PQ}$ et $\mathfrak{q}'\mathfrak{p}$ producta), duobus rectis minorem, secabitur recta $\widetilde{\mathfrak{PQ}}$, adeoque planum Q; transibitque recta $\mathfrak{pq}$ (vel $\mathfrak{pq}'$) per utraque plana parallela P et Q.

Fiant hi transitus in $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{k}$ (Fig. 209.), fiatque e puncto $\mathfrak{d}$ rectæ $\mathfrak{kp}$ perpendicularis $\mathfrak{de}$ ad Q; erit hæc perpendicularis ad planum P quoque, necnon ad sectiones $\mathfrak{ip}$, $\mathfrak{ek}$ planorum parallelorum P, Q per planum $\mathfrak{dek}$ factas; suntque $\mathfrak{ip}$, $\mathfrak{ek}$ parallelæ per $\mathfrak{dk}$ sectæ, atque anguli $\mathfrak{ipd}$, $\mathfrak{ekd}$ plane anguli rectæ $\mathfrak{dk}$, quos cum planis P et Q efficit.

Scholion 1. Sunt autem etiam *anguli, quos rectae parallelae* $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bk}$ *per planum P sectae* (in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$) *cum plano eodem faciunt, aequales.*

·31122221. Rectæ, quæ e quovis plani P puncto est ad quodvis punctum plani Q ad P paralleli, anguli alterni &, quos cum P et Q facit, comparantur.

Hosted by Google

Sint enim (Fig. 210.) rectæ parallelæ ac et bf in plano tabulæ, quod dicatur Q: erit recta ab planis P et Q communis, utcunque vertatur P circa ab. Erigantur ex a, b perpendiculares ac′, bf′ ad ab in Q, et ex iisdem punctis a, b ad eandem rectam ab perpendiculares aa′, bb′ in P, et perpendiculares aa″, bb″ ad P. Angulus rectæ ac cum plano P est is, quem ac cum sectione plani illius p facit, in quod ac et perpendicularis ex c ad planum P cadunt; atque hoc planum idem cum eo est, in quod ac cum perpendiculari ex a ad planum P erecta cadit; nam duæ hæ perpendiculares ad idem planum P, sunt parallelæ, in quarum alteram cadit a, et c in alteram.

Si Q circa ab moveatur, donec $\angle$ c′aa′ (consequenter etiam f′bb′) rectus sit, ac′ cum aa″, et bf′ cum bb″ coincidet; secat autem planum per aa″ et ac, cum plano P punctum a commune habens, ipsum P in recta quapiam aa‴ per a eunte; atque angulus, quem recta ista ad verticem a cum recta ac facit, est quantitas anguli rectæ ac cum plano P.

Evidens autem est, totum schema in se moveri posse, recta $\widetilde{ab}$ in se, P in se, Q in se manentibus, donec a in b veniat; atque tum ac′ in bf′, ac in bf venire; et propter generationes æquales angulum rectæ bf cum plano P æqualem priori produci.

Scholion 2. Manifesto quoque aa‴ cum ab in plano P angulum α illi æqualem facit, quem bb‴ cum recta ab ultra b continuata facit: consequenter aa‴ ∥ bb‴; nempe *rectae ex* a, b, *in quibus parallelae* ac, bf *planum* P *secant, ad puncta, in quae perpendiculares ad* P *ex* c *et* f *cadunt, ductae sunt parallelae.*

Scholion 3. *Si* (Fig. 211.) *in plano* Q *sit* AB ∥ A′B′ *et* AC ∥ A′C′, *atque supra* Q *sint talia puncta* a *et* a′, *ut* Aa *cum* AB *ita* A′a′ *cum* A′B′ *faciant angulum* v, *et* Aa *cum* AC *ita* A′a′ *cum* A′C′ *faciant angulum* q (quovis seorsim intellecto): *erit tum* Aa *ipsi* A′a′ *parallela.*

Nam orientur hoc pacto anguli solidi ad apices A et A′ triangulares, qui A′ in A, et A′C′ in AC atque A′B′ in AB cadentibus super Q congruunt, angulo C′A′a′ in CAa, et angulo B′A′a′ in BAa cadentibus. Demissis igitur ex a et a′ ad planum Q, in quod bases ABC, A′B′C′ angulorum cadunt, perpendicularibus aK, a′K′: manifesto erunt anguli CAK

Hosted by Google

et $\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$, atque $\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{a}'\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$ æquales; adeoque propter $\mathfrak{A}\mathfrak{C} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ erit quoque $\mathfrak{A}\mathfrak{K} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$.

Plana $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'\mathfrak{K}'$ (perpendiculares ad planum Q complectentia) autem sunt ad Q perpendicularia, et præterea de parallelis $\mathfrak{A}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$ erecta; adeoque parallela sunt, secanturque per plana Q (nempe $\mathfrak{K}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$) et $\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ se invicem in $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ secantia: et erunt sectiones angulares æquales, nempe sectio per planum $\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ in plano $\mathfrak{a}'\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$ facta cum $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$ angulum ipsi $\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{K}$ æqualem efficit, sectio autem alia præter $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ esse nequit. Consequenter $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ in idem planum cadunt, suntque sectiones eiusdem cum duobus planis parallelis, adeoque parallelæ.

Scholion 4. (Fig. 212.). *Si plana parallela P et Q per rectas parallelas* $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ *secentur, et* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ *in P atque* $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ *in Q fuerint: erit* $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$. Nam ex $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ fiant $\mathfrak{p}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{b}'$ perpendiculares ad Q, orientur (nisi $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ adeoque $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ perpendiculares sint) triangula $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{b}'$ æqualia; quia $\mathfrak{p}\mathfrak{b} = \mathfrak{p}'\mathfrak{b}'$, anguli $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{b}'$ sunt rectarum $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ anguli cum plano Q, adeoque æquales, atque et rectus æqualis recto. Manifesto etiam fit $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{q}'\mathfrak{p}'$ parallelogrammum, quum $\mathfrak{p}\mathfrak{q} \parallel$ et $= \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$.

Scholion 5. *Si plana parallela P et Q per planum R secentur, et sectio planorum P et R sit recta* $\mathfrak{p}\mathfrak{i}$, *planorum Q et R autem sectio sit* $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$: *quodcunque planum p ponatur per* $\mathfrak{p}$ *ad Q parallele, sectio planorum p et R eadem cum* $\mathfrak{p}\mathfrak{i}$ *erit.* Nam per $\mathfrak{p}$ nonnisi unum planum ad Q parallelum datur; sed inde quoque patet, quod si sectio $\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ planorum p et R diversa a $\mathfrak{p}\mathfrak{i}$ esset, in plano R per punctum $\mathfrak{p}$ ad rectam $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ duæ diversæ parallelæ darentur.

·31122222.

Hoc numero in calce expositæ constructionis resultatum, ibidem *prisma rectilineum* dicitur; quod si pro $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ nonnisi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ fuerit,

·31122222. Si in plano P fuerit figura rectilinea $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$, et quodvis punctum $\mathfrak{a}$ fuerit supra planum (omnibus supra planum acceptis); vertatur P circa $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ donec recta $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ incidat, fiatque $\mathfrak{B}\mathfrak{b} \parallel$ et $= \mathfrak{A}\mathfrak{a}$, et tum vertatur planum item prius P circa $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ donec recta $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ incidat, fiatque $\mathfrak{C}\mathfrak{c} \parallel$ et $= \mathfrak{B}\mathfrak{b}$: atque hoc

Hosted by Google

triangulare, si 𝔄𝔅ℭ𝔇 parallelogrammum sit, *parallelepipedum* & audit. Dicitur vero *prisma rectum*, si 𝔄𝔞 ad basim 𝔄𝔅ℭ . . . perpendicularis sit, secus *obliquum* audit.

Scholion. Datur autem (pag. 17 &) conceptus prismatis generalior; et si ex omnibus punctis cuiusvis continuæ portionis plani rectæ concipiantur (in eadem plaga) eidem cuipiam rectæ parallelæ et æquales: complexus omnium illarum rectarum *prisma* est. Interim hic de prismate tali, quod geometrice (sensu lato) construi potest et sub numerum ·31122222 cadit, prius sermo est, inferius sub numero ·3121 cylinder pariter (sensu lato) geometrice constructum prisma erit.

§. 1.

1. In constructione prismatis rectilinei, cuius portio plani a figura rectilinea 𝔄𝔅ℭ . . . clausa *basis* dicitur, oriuntur præter 𝔄𝔅ℭ . . . et 𝔞𝔟𝔠 . . . tot latera, quot latera ipsius 𝔄𝔅ℭ . . . sunt: nempe ex. gr. ipsius 𝔄𝔅ℭ𝔇𝔄 latera 𝔄𝔅, 𝔅ℭ, ℭ𝔇, 𝔇𝔄 producent parallelogramma 𝔄𝔅𝔟𝔞, 𝔅ℭ𝔠𝔟, ℭ𝔇𝔡𝔠, 𝔇𝔄𝔞𝔡. Præterea vero 𝔞𝔟𝔠 . . . erit in plano per 𝔞 ad planum, in quo 𝔄𝔅ℭ . . . est, parallelo, eritque ipsi 𝔄𝔅ℭ . . . congruenter æqualis.

2. Si planum q ex Q ipsi Q parallele moveatur in illa plaga, in qua prisma est, ubicunque sectio eius cum prismate ipsi 𝔄𝔅ℭ . . . congruenter æqualis erit, et prisma prius in duo prismata dividit.

3. Si punctum quodvis 𝔓 ipsius 𝔄𝔅ℭ . . . (sive in perimetrum sive intus cadat) et punctum 𝔭, in quo planum 𝔞𝔟𝔠 . . . per parallelam ex 𝔓 ad 𝔄𝔞 erectam secatur, *sibi invicem respondentia* dicantur: erunt hæc plane ea, quæ 𝔄 in 𝔞, 𝔅 in 𝔟, ℭ in 𝔠 & cadentibus congruent, et quæcunque portio continua b plani perimetro 𝔄𝔅ℭ . . . clausi fuerit, complexus rectarum ex omnibus portionis illius punctis usque ad puncta illis respondentia *prisma* basi b insistens erit, atque in prius cadet; et quæ-

continuetur usque ad ultimum latus; ac demum moveatur planum 𝔞𝔟𝔄𝔅 circa 𝔞𝔟, donec 𝔠 incidat: nascetur *parallelepipedum*, si 𝔄𝔅ℭ𝔇 parallelogrammum fuerit, in genere vero *prisma rectilineum*.

Hosted by Google

cunque figuræ planæ $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ et $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\ldots$ fuerint in plano tales, ut recta $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sit $\parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, et puncto $\mathfrak{A}'$ in recta $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ usque in $\mathfrak{A}$ moto, rectam $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ parallele ferendo (simul cum figura $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\ldots$), $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{A}$ veniente congruant: prismata per complexum rectarum ex omnibus figuræ $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$, item ex omnibus figuræ $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\ldots$ punctis eidem rectæ $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ parallelarum et æqualium, generata congruibilia sunt. Generale hoc tamen, hic ad figuras rectilineas restringitur.

I. Quod primum attinet: ponatur per $\mathfrak{a}$ planum p ad planum Q, in quo $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ est, parallelum, seceturque hoc per planum $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ in recta $\mathfrak{a}\mathfrak{b}'$; erit $\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{b}$ idem. Nam $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \parallel$ et $= \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, quia $\mathfrak{A}\mathfrak{a} \parallel$ et $= \mathfrak{B}\mathfrak{b}$; itaque $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}'$ et $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}$ coincidunt, quia per $\mathfrak{a}$ ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nonnisi una parallela datur. Est vero $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ parallelogrammum, quod pariter de $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$, et porro de omnibus patet; sed quum de $\mathfrak{b}$ idem quod de $\mathfrak{a}$ dictum est valeat, cadet etiam $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ in planum p; atque eadem ad $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, ... applicando, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots$ in planum p per punctum $\mathfrak{a}$ ad planum Q parallelum cadet.

II. Quod alterum attinet: sit plani q cum plano $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ sectio $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$, ita $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ sectio item plani q cum $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{c}\mathfrak{b}$, et ita porro; dari has sectiones patet, si q per rectam $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ feratur; secabit enim quamvis ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ parallelam; eritque $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' \parallel$ et $= \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \parallel$ et $= \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ &, item $\angle \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' = \angle \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\angle \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}' = \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ & (pag. 225). Itaque figura $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\ldots$ congruere ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ poterit.

III. Tertium sic patet: quodcunque punctum $\mathfrak{H}'$ fuerit (Fig. 213.), sive in perimetro ipsius $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ sive intus, illi respondens $\mathfrak{h}'$ plane illud erit, in quod caderet $\mathfrak{H}'$ congruentibus $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots$, cadentibus $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}$, atque $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{c}$ &. Nam etsi non in perimetrum adeoque intus caderet $\mathfrak{H}'$, poterit recta $\mathfrak{A}\mathfrak{H}'$ duci et continuari, donec perimeter in $\mathfrak{H}''$ secetur; sit $\mathfrak{H}''$ in perimetri latere $\mathfrak{H}\mathfrak{J}$, accipiatur in perimetri $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots$ latere $\mathfrak{h}\mathfrak{i}$ recta $\mathfrak{h}\mathfrak{h}'' = \mathfrak{H}\mathfrak{H}''$. Erit $\mathfrak{H}\mathfrak{J}\mathfrak{i}\mathfrak{h}$ parallelogrammum, adeoque et $\mathfrak{H}\mathfrak{H}''\mathfrak{h}''\mathfrak{h}$; quia tum $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'' \parallel$ et $= \mathfrak{h}\mathfrak{h}''$. Eritque $\mathfrak{H}''\mathfrak{h}''$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ eidem $\mathfrak{H}\mathfrak{h} =$ et $\parallel$; itaque $\mathfrak{H}''\mathfrak{h}'' =$ et $\parallel \mathfrak{A}\mathfrak{a}$; atque hinc $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{h}''\mathfrak{H}''$ parallelogrammum est, atque $\mathfrak{a}\mathfrak{h}'' \parallel$ et $= \mathfrak{A}\mathfrak{H}''$. Consequenter si in $\mathfrak{a}\mathfrak{h}''$ accipiatur $\mathfrak{h}''\mathfrak{h}' = \mathfrak{H}''\mathfrak{H}'$, erit $\mathfrak{H}''\mathfrak{H}'\mathfrak{h}'\mathfrak{h}''$ parallelogrammum, atque et $\mathfrak{H}'\mathfrak{h}'$ ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ parallela; quæ sola ex $\mathfrak{h}'$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ est, nempe e puncto illo ipsius $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots$,

Hosted by Google

quod in $\mathfrak{H}'$ cadit, congruentibus $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ et $\mathfrak{abc}\ldots$, cadentibusque $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{c}$ &.

Si igitur sive toto $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$, sive e quavis figura (nunc rectilinea) $\mathfrak{K}\mathfrak{L}\mathfrak{M}\ldots$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ existente, concipiantur rectæ e quovis puncto ad punctum ei respondens, complexus earum erit prisma *inter eadem plana parallela*, *basi* $\mathfrak{K}\mathfrak{L}\mathfrak{M}\ldots$ *iuxta rectam* $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ *superstructum*; et quidem si $\mathfrak{K}\mathfrak{L}\mathfrak{M}\ldots$ idem cum $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ fuerit, fiet idem cum prismate priore, secus vero pars huius erit. Nam si puncta ipsis $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, ... respondentia $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, ... dicantur: erit $\mathfrak{K}\mathfrak{k} \parallel$ et $= \mathfrak{A}\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{L}\mathfrak{l} \parallel$ et $= \mathfrak{A}\mathfrak{a}$ &, atque $\mathfrak{K}\mathfrak{k}\mathfrak{l}\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{M}$ & parallelogramma erunt, et antea dicta applicari poterunt.

Evidens etiam est, prisma basi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ iuxta rectam $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ superstructum rectarum e quovis puncto ipsius $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ parallelarum et æqualium complexum esse: nam recta e quovis puncto ipsius $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ parallela et eidem æqualis in dictum prisma cadit, nec ullum in dicto prismate punctum $\mathfrak{f}'$ est, quod non in parallelam ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ ex aliquo ipsius $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ puncto in eadem cum reliquis plaga cadat; quia si planum per $\mathfrak{f}'$ ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ parallelum ponatur, sectio plani positi cum prismate erit congruenter æqualis ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$, et $\mathfrak{f}'$ in hac sectione erit, quia in prisma cadit; atque paulo antea dictis applicatis, patet rectam per $\mathfrak{f}'$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ parallelam tam per $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ quam per $\mathfrak{abc}\ldots$ ire.

Quod autem congruentiam prismatum super basibus $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ et $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\ldots$ congruenter æqualibus (in eodem plano sitis) sub conditione (pag. 230) dicta iuxta eandem rectam $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ in eadem plaga exstructis attinet: sint ambo prismata in plaga superiore, et facies ipsius $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ (ac pariter facies ipsius $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\ldots$) superior dicatur *alba*, inferior *nigra*; facies nigra ipsius $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\ldots$ faciei albæ in omni casu superimponi poterit, et tum $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ cum $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}'\mathfrak{b}'$ cum $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$, & coincident, (extremitates parallelarum ex $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'\ldots$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ ductarum literis accento insignitis denotando); nam $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$, facie nigra ipsius $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ faciei albæ ipsius $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ superimposita, in plagam eandem cum $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ cadit, neque aliorsum cadere potest: quia $\mathfrak{A}\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$, adeoque cum plano eodem angulos æquales faciunt; atque idem de $\mathfrak{B}'\mathfrak{b}'$ et reliquis patet. Et facile perspici potest, et inferius prisma super eadem basi iuxta eandem rectam $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ generatum priori

Hosted by Google

congruere, si basis inferior sursum moveatur sibi parallele, donec ipsi 𝔄𝔅ℭ . . . congruat.

§. 2.

At vero superficies prismatis basi 𝔄𝔅ℭ . . . superstructi, rete e parallelogrammis supra dictis, (quorum unum latus in omnibus æquale est, alterum vero in primo est 𝔄𝔅, in secundo vero 𝔅ℭ &, atque anguli pro dato angulo rectæ 𝔄𝔞 cum plano 𝔄𝔅ℭ computari possunt), adiectis duabus basibus, compositum ultro præbet; e quo si facies superior alba sit in plaga superiore, nonnisi una eadem forma compingi potest; atque idem rete, prouti facies alba aut nigra extrorsum vertetur, formas dare potest, quæ congruere nequeunt, alioquin æquales.

Nimirum si latera anguli solidi sint A, B, . . ., ordine eorum eodem, forma unico modo determinatur, atque idem e fine lateris cuiusvis ulterius progrediendo patet; nec maius vel minus prodire potest, si rete invertatur, ut facies nigra claudatur, et alba extrorsum versa sit; quum nullum aliud duarum generationum per se resultato unico gaudentium discrimen sit, nisi quod altera in altera plaga faciem baseos nigram respiciente suscepta sit.

Possunt tamen hoc pacto formæ tales prodire, quæ congruere nequeunt. Ex. gr. sit (Fig. 214.) prismatis basis 𝔄𝔅ℭ in plano Q, et sit e 𝔇 meditullio rectæ 𝔄𝔅 ad 𝔄ℭ parallela 𝔇𝔇′, atque ℭ𝔇′ sit ∥ 𝔄𝔅, concipiaturque prisma iuxta rectam 𝔄𝔞 (ut in præcedentibus) plano tabulæ superius insistens; nec sit 𝔄𝔞, adeoque 𝔅𝔟 perpendicularis ad 𝔄𝔅ℭ, sed sit ex. gr. 𝔅𝔟 ad lævam versus 𝔅𝔇 inclinata; evidens post dicta est, quod si prisma rectum esset, atque △ 𝔇𝔈𝔅 cum prismate super eo exstructo superponeretur triangulo 𝔇′𝔈ℭ, (𝔈 in se, 𝔇 in 𝔇′ et 𝔅 in ℭ cadentibus): oreretur parallelepipedum rectum super basi 𝔄ℭ𝔇′𝔇 exstructum; at si 𝔅𝔟 inclinet (ex. gr. ad lævam, ut dictum est), et superimponatur △ 𝔇𝔅𝔈 triangulo 𝔇′ℭ𝔈 (nempe si superior facies alba dicatur, inferior nigra), facies trianguli 𝔇𝔈𝔅 nigra faciei albæ trianguli 𝔇′𝔈ℭ superponetur; et recta 𝔅𝔟 in prismate basi ℭ𝔈𝔇′ superposito, ad dextram versus ℭ𝔇′ inclinata erit; concipiatur nimirum 𝔇𝔅 sursum sibi parallele

Hosted by Google

moveri (triangulum DEB ante se ferendo) donec D in C, et B in D′ veniat; cadet recta DB in CD′, sed D in C, et B in D′, atque E supra CD′ erit; at si vertatur DB e hoc loco circa meditullium, donec extremitas dimidium circulum describat: cadet B in C, D in D′, E in E, sed Bb ad dextram, nempe ad CD′ inclinabitur; adeoque si triangula dicta nonnisi ista superimpositione congruere queant, prismata super iis tanquam basibus iuxta eandem rectam Aa exstructa congruere non poterunt. At vero si rete invertatur, adeoque generetur prisma super basi CD′E in plaga inferiore, ut facies alba baseos CED′ extus maneat superius; sitque recta Cc′ sectio parallelogrammorum rectis CD′, CE in plaga inferiore insistentium: erit prisma dictum in plaga inferiore, ad basim CED′ iuxta rectam Cc′ exstructum, atque Cc′ cum CD′ angulum æqualem illi faciet, quem Bb cum BD faciebat, et angulus ipsius Cc′ cum CE etiam fit æqualis angulo, quem Bb cum BE faciebat; atque si continuatio rectæ Cc′ in plaga superiore Cc″ sit, faciet Cc″ cum CK angulum æqualem illi, quem Bb cum BD faciebat, et eadem recta Cc″ faciet cum CH angulum æqualem ei, quem Bb cum BE faciebat; atque hinc (per pag. 227) fiet $\overline{Cc''} \parallel Bb$ et per consequentiam $\overline{Cc''}$ parallela Aa est.

Poterit igitur prismatis inferioris basis inferior iuxta rectam c′C sursum sibi parallele moveri, usquequo in basim superiorem perveniat: atque tum manifesto prisma totum super plano *Q* erit, triangulo CED′ iuxta rectam Aa superstructum; atque hoc, simul cum prismate basi trapezio ADEC superstructo, efficiet parallelepipedum basi ADD′C iuxta rectam Aa superstructum.

Unde quum rete etiamsi invertatur, corpora æqualia (etsi non semper congruentia) producantur: quodvis prisma triangulare erit parallelepipedo tali æquale, cuius *altitudo* (nempe perpendicularis *e basi superiore ad planum baseos inferioris* superiori parallelum) est eadem, basis vero est parallelogrammum, in quod basis triangularis modo dicto mutata est; inferius patebit idem valere, etsi triangulum in aliud parallelogrammum mutetur.

Scholion. Eodem tantum modo per retis inversionem fiunt et duo illa prismata triangularia æqualia, in quæ parallelepipedum obliquum

Hosted by Google

dispescitur, si basi per diagonalem in duas partes æquales divisa in altera basi diagonalis respondens accipiatur. Erunt nempe duæ diagonales in plano; et plane (in Fig. 214.) tale parallelogrammum EfCD′ cum diagonali CE exhibetur, si △ DEB ad ductum rectæ BC feratur, donec E in C, et B in E, atque BD in Ef veniat; quo pacto, si fiat super basi EfCD′ prisma iuxta rectam prius dictam Aa, e dictis patet prisma ipsius EfC prismati ipsius ED′C nonnisi per retis inversionem congruere posse.

§. 3.

Parallelepipeda super basi eadem EBCD (in plano Q sita) in plaga eadem exstructa basibus superioribus in plano q ad Q parallelo terminata, si parallelogramma EBae et EBa′e′ tanquam latera prismatum ipsi EB insistentium in eodem plano fuerint: aequalitate terminata aequalia erunt.

Si enim (in Tom. I. Fig. 17c) prius concipiatur schema circa EB elevatum plano tabulæ insistens, item in tabulæ plano concipiatur CD ‖ et =EB, ut fiat pro basi parallelogrammum EBDC; atque claudantur prismata: erunt manifesto et parallelogramma ipsi CD insistentia in eodem plano, atque alterum alteri congruenter æquale respondebit. Evidens etiam est, etiam parallelogramma EBae et EBa′e′ pro basibus prismatum eorundem iuxta rectam EC exstructorum accipi posse; concipiantur idcirco novæ hæ eorundem prismatum bases EBae, EBa′e′, ita uti in tabula sunt; cadent prismata et basis prior ECDB in plagam inferiorem; atque si (pag. 230) lineis, quæ partes parallelogrammorum æqualitate terminata æquales distinguunt, in basibus novis inferioribus respondentes accipiantur, orientur totidem prismata sibi invicem respondentia æqualia; nempe ut prismatum horum partialium bases congruant, quævis solo motu rectarum (tanquam laterum) sine versione pervenire potest.

Scholion. Atque hinc etiam sequitur: 1. quodvis parallelepipedum obliquum etiam, si latere (nempe parallelogrammo) ad basim perpendiculari gaudeat, recto æquale esse terminata æqualitate, adeoque etiam tali, cuius basis rectangulum est; nam prisma rectum ad quamvis basim,

Hosted by Google

priori basi æqualitate terminata æqualem, reduci posse patet. 2. Atque etiam (Fig. 121.) applicari posse in aperto est; nempe si parallelepipedum quodpiam ad rectum reductum sit, adeoque angulus z rectus sit, reperietur parallelogrammum æqualitate terminata æquale inter eadem plana parallela; nempe reperitur x pro datis A, a, B.

§. 4.

Parallelepipeda P et p super basi $\mathfrak{AB}\mathfrak{CD}$ in plano Q sita, superioribus basibus in plano q ad Q parallelo terminata, etsi nulli parallelogrammi $\mathfrak{AB}\mathfrak{CD}$ lateri insistentia ipsorum P et p latera (nempe parallelogramma) in eodem plano fuerint: sunt aequalitate terminata aequalia.

Dicantur enimvero (Fig. 215.) A et A' plana laterum ipsius P parallelorum, lateribus baseos parallelis $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{CD}$ insistentium, et dicantur a et a' plana laterum ipsius p parallelorum ipsis $\mathfrak{AD}$, $\mathfrak{BC}$ insistentium; sitque in A latus ipsius P parallelogrammum $\mathfrak{AB}\mathfrak{ba}$, in A' vero sit $\mathfrak{CD}\mathfrak{dc}$, latus ipsius p autem sit $\mathfrak{AD}\mathfrak{d}'\mathfrak{a}'$ in a, et in a' sit $\mathfrak{BC}\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'$.

Plana parallela A et A' manifesto secantur per plana a et a', nam a cum A punctum $\mathfrak{A}$ et cum A' punctum $\mathfrak{D}$ commune habet, ita a' cum A punctum $\mathfrak{B}$ et cum A' punctum $\mathfrak{C}$ commune habet. Sint hæ sectiones (a plano Q usque ad planum q) $\mathfrak{Aa}''$, $\mathfrak{Bb}''$, $\mathfrak{Cc}''$, $\mathfrak{Dd}''$; orietur hoc pacto super eadem basi tertium parallelepipedum, quod dicatur k; nempe $\mathfrak{Aa}''$ est $\parallel$ et $= \mathfrak{Dd}''$, quia sectiones planorum parallelorum A, A' per planum a factæ inter plana parallela sunt (pagg. 225, 228), ita $\mathfrak{Bb}'' \parallel$ et $= \mathfrak{Cc}''$; atque etiam $\mathfrak{Aa}'' \parallel$ et $= \mathfrak{Bb}''$, quia planorum parallelorum sectiones per A inter plana parallela Q et q sunt.

Evidens quoque est parallelepipeda p, k inter plana parallela a et a', atque P et k inter plana parallela A et A' contineri. Consequenter tam P quam p eidem k (per præcedentia), atque adeo (Tom. I. pag. 64) et P ipsi p æqualitate terminata æqualia sunt.

Scholion. (Fig. 216.). Itaque qualevis parallelepipedum in *rectum* æqualitate terminata exstrui potest, et basis in rectangulum, atque hoc in

Hosted by Google

quadratum mutari, imo et quotvis et qualiavis parallelepipeda ad bases quadratas reduci, et hæc in unum quadratum summari (pagg. 109, 110), atque (pag. 108) dicta applicari possunt. Sint nimirum parallelepipedi iam ad rectum reducti dimensiones A, B, C, nempe pro basi rectangula laterum A et B sit altitudo C; mutetur basis hæc in rectangulum, cuius latus α sit, prodeat latus alterum β, et fiat e prismate priore novum huic rectangulo altitudine C insistens; erit idem parallelepipedum rectum etiam pro basi rectangula laterum C et β, et altitudine α; mutata iam ista basi in rectangulum, cuius latus α sit, prodeat alterum $=\gamma$, reducaturque parallelepipedum ad hanc basim; manebit omnino altitudo α, et baseos latus unum erit pariter α; consequenter latus unum parallelepipedi quadratum lateris α, altitudo vero γ erit.

§. 5.

Parallelepipedi P soliditas est, sensu statim dicendo, basi per altitudinem multiplicatae aequalis: per altitudinem in omnibus prismatibus (etsi non rectilinea fuerint) distantiam duarum basium, nempe perpendicularem e qualibet ad alteram, intelligendo.

Sint enim baseos rectangulæ latera A et B, atque altitudo sit C (Fig. 217.); sintque prius A, B, C commensurabilia; ac pro unitate determinata, et m, a, b, c numeros integros denotantibus, sit

$$A=\frac{a}{m},\quad B=\frac{b}{m},\quad C=\frac{c}{m}\quad \text{et}\quad u=\frac{1}{m}.$$

Fiant ab extremitatibus ipsorum u in A parallelæ ad B, et ab extremitatibus ipsorum u in B parallelæ ad A; eriganturque ex omnibus his rectis rectangula altitudinis C ad basim perpendicularia, atque ab extremitatibus ipsorum u in C fiant plana ad basim parallela: fient manifesto in strato inferiore tot cubi, quot quadrata in basi generata sunt, nempe numero ab tales cubi, quorum latus lineare $u=\frac{1}{m}$ est; itaque in toto parallelepipedo erunt abc tales cubi. Est vero rectarum A, B, C *factum* nempe ABC

Hosted by Google

$$= \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{c}{m} = abc \cdot \frac{1}{m^3},$$

atque cubus quadrato, cuius latus $= 1$ est, insistens, qui pro unitate solidorum ponitur, continet numero m^3 cubum quadrato, cuius latus $u = \frac{1}{m}$ est, insistentem: itaque factum lineare ABC est unitatis linearis abc/m^3-tum, uti parallelepipedum unitatis solidorum. Itaque *hoc sensu* exprimet *basis* nempe AB (pag. 99) *multiplicata per altitudinem* C *soliditatem parallelepipedi.*

Si vero aliquod ipsorum A, B, C, aut certa duo, vel singula cum unitate incommensurabilia fuerint: sit

$$A = a\frac{1}{m} + \omega, \quad \omega < \frac{1}{m},$$

id est A contineat a-ies ipsum u, et supersit $\omega < u$, sitque

$$B = \frac{b}{m} + \varkappa, \quad \varkappa < \frac{1}{m},$$

$$C = \frac{c}{m} + \lambda, \quad \lambda < \frac{1}{m},$$

(si quod ipsorum ω, $\varkappa$, λ non $< u$ sed $= 0$ esset, ibi $= 0$ pro $< \frac{1}{m}$ scribi debet).

Erit

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{m^3} > P > \frac{abc}{m^3};$$

dicatur trium harum quantitatum prior P', et posterior p; fiet $P' - p \backsim 0$, si $m \backsim \infty$, adeoque $P - \frac{abc}{m^3} \backsim 0$, (quum $P - p < P' - p$ sit); consequenter $\frac{abc}{m^3} \backsim P$, nempe limes ipsius $\frac{abc}{m^3}$ est ipsi P æqualis; limes iste autem ABC erit (Tom. I. pag. 86); nam $\frac{a}{m} \backsim A$, $\frac{b}{m} \backsim B$ et $\frac{c}{m} \backsim C$. Id igitur tantum demonstrandum venit, quod $P' - p \backsim 0$; quod facile sic patet.

Est

$$P' - p = \frac{bc + ac + c + ab + b + a + 1}{m^3}$$

$$= \left(\frac{b}{m}\frac{c}{m} + \frac{a}{m}\frac{c}{m} + \frac{a}{m}\frac{b}{m} + \frac{a+b+c+1}{m^2}\right) : m;$$

Hosted by Google

et hoc est

$$< \frac{BC}{m} + \frac{AC}{m} + \frac{AB}{m} + \frac{A+B+C}{m^2} + \frac{1}{m^3}$$

atque hoc quoque $\backsim 0$ (Tom. I. pag. 80).

§. 6.

Est autem qualevis parallelepipedum α aequale tali parallelepipedo recto β, cuius altitudo altitudini prioris, et basis rectangula basi prioris (qualevis parallelogrammum fuerit) aequalis est. Nempe quævis parallelepipeda α et γ, quorum altitudines æquales sunt, si bases congruenter æquales sint, ita poni possunt, ut basibus congruentibus, bases oppositæ in eodem plano ad basim priorem parallelo sint; atque tum (pag. 234) dicta valent, etsi γ prisma rectum fuerit; tum vero basi ipsius γ in rectangulum mutata, γ in β mutari poterit.

Atque hinc manifesto *soliditas* non solum parallelepipedi cuiusvis sed et *prismatis cuiusvis*, adhucdum saltem *rectilinei*, *basi per altitudinem multiplicata prodit.* Quodvis prisma triangulare enim æquatur (pag. 233) parallelepipedo, cuius altitudo altitudini illius, et basis basi illius (nempe parallelogrammum triangulo) æquales sunt; atque quodvis prisma rectilineum, basi rectilinea in triangula divisa, in totidem prismata triangularia dispescitur, adeoque totum æquatur summae triangulorum, in quæ basis divisa est, per altitudinem eandem multiplicata.

·31122223.

Forma sub hoc numero (in calce) generata cum complexu rectarum ex omnibus figuræ planæ rectilineæ punctis ad idem punctum $\mathfrak{a}$ ductarum manifesto coincidit: *forma pyramidalis* (sensu generaliore) exponitur pag. 10, quo etiam conus (de quo plura inferius) aliaque pertinent.

·31122223. Si in 31122222 e cuiusvis anguli vertice ad quodvis punctum $\mathfrak{a}$ ibidem dictum recta cogitetur; vertaturque planum P circa latus quodvis, donec $\mathfrak{a}$ incidat: nascitur *pyramis rectilinea.*

Hosted by Google

§. 1.

Si *pyramis triangularis* (Fig. 218.), nempe triangulo 𝔄𝔅𝔆 superstructa, plano ad basim 𝔄𝔅𝔆 per 𝔞 parallelo secta fuerit, latus 𝔄𝔞𝔆 secabitur in 𝔞𝔠 ∥ 𝔄𝔆, latus 𝔄𝔞𝔅 secabitur in 𝔞𝔟 ∥ 𝔄𝔅, atque latus tertium nempe 𝔆𝔞𝔅 secabitur in 𝔠𝔟 ∥ 𝔆𝔅; fientque anguli ad apices triangulorum 𝔞𝔟𝔠, 𝔄𝔅𝔆 litera nominis eiusdem designatos æquales; consequenter triangula dicta erunt similia; quod et inde patet, quod propter 𝔞𝔠 ∥ 𝔄𝔆 et 𝔞𝔟 ∥ 𝔄𝔅, atque 𝔟𝔠 ∥ 𝔅𝔆, triangula 𝔞𝔞𝔠 et 𝔄𝔞𝔆, 𝔞𝔞𝔟 et 𝔄𝔞𝔅, 𝔟𝔞𝔠 et 𝔅𝔞𝔆 similia sint, adeoque

$$\mathfrak{ac} : \mathfrak{AC} = \mathfrak{ka} : \mathfrak{kA} = \mathfrak{ab} : \mathfrak{AB} = \mathfrak{kb} : \mathfrak{kB} = \mathfrak{bc} : \mathfrak{BC};$$

unde triangula per latera proportionalia similia sunt.

§. 2.

Pyramidis rectilineae soliditas est aequalis basi multiplicatae per tertiam partem altitudinis (id est rectæ perpendicularis ex apice 𝔞 ad planum baseos demissæ).

Nam si pyramidis triangularis (nempe cuius basis triangulum est) soliditas basi per tertiam partem altitudinis multiplicatæ æqualis sit, quævis pyramis rectilinea, si basis in triangula dispescatur, erit summæ horum triangulorum (nempe basi totius pyramidis) per altitudinis totius (nempe perpendicularis ex eodem apice 𝔞 ad idem planum demissæ) tertiam partem multiplicatæ æqualis.

Quamobrem id tantum demonstrandum est, quod pyramidis triangularis soliditas sit tertia pars facti e basi in altitudinem, adeoque parallelepipedi, cuius basis basi pyramidis, altitudo altitudini æqualis est: quod fit modo sequente. (Fig. 219.)

Basis 𝔄𝔅𝔆 dicatur B', altitudo A', sintque latera linearia ad verticem A, B, C, sintque

$$\frac{A}{3} = a, \quad \frac{B}{3} = b, \quad \frac{C}{3} = c,$$

Hosted by Google

atque fiant per puncta divisionis rectarum A, B, C plana: erunt hæ (per præcedentia) ad basim B' parallela; fientque tria strata, quorum infimum cum medio triangulum $\mathfrak{abc}$, uti medium cum supremo triangulum $\mathfrak{a'b'c'}$ commune habebit. Ducantur ex apicibus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ trianguli $\mathfrak{abc}$, (quod strato infimo medioque commune est), parallelæ $\mathfrak{ab''}$, $\mathfrak{ac''}$ ex $\mathfrak{a}$ ad B et C, et ex $\mathfrak{b}$ ad A et C parallelæ $\mathfrak{ba''}$, $\mathfrak{bc'''}$; orientur in strato infimo quatuor corpora, nempe prisma super basi $\mathfrak{c''c'''C}$ iuxta rectam $\mathfrak{Cc} = c$ exstructum, pyramis e basi $\mathfrak{Ab''c''}$ ad apicem $\mathfrak{a}$, et pyramis e basi $\mathfrak{Ba''c'''}$ ad apicem $\mathfrak{b}$, et corpus quinque laterum, quorum retia (Fig. 219*, 1, 2, 3, 4) exhibent; nimirum basis $\mathfrak{ABC}$ dispescitur in triangula $\mathfrak{Ab''c''}$, $\mathfrak{Ba''c'''}$, trapezium $\mathfrak{b''a''c'''c''}$, et triangulum $\mathfrak{c''c'''C}$ basim prismatis.

Pyramides dictæ sunt singulæ pyramidi, quæ stratum supremum constituit, æquales, uti rete (Fig. 219*, 5) demonstrat, nempe in triangulo $\mathfrak{ACk}$ est

$$\mathfrak{Ac''} : \mathfrak{AC} = \mathfrak{Aa} : \mathfrak{Ak};$$

itaque si $\mathfrak{AC} = 3\alpha$, erit $\mathfrak{Ac''} = \alpha$; ita $\mathfrak{Ab''} = \gamma = \mathfrak{Ba''}$, et si $\mathfrak{BC} = 3\beta$, est $\mathfrak{Bc'''} = \beta$; adeoque dum $\mathfrak{c''}$ baseos cum $\mathfrak{c''}$ lateris $\mathfrak{AkC}$ coincidit, $\mathfrak{c''b''}$ fit $= \beta$, etiam $\mathfrak{b''}$ in se manente &c. Prismatis dicti autem soliditas est $= \frac{4A'B'}{27}$; nam basis est

$$\triangle\, \mathfrak{c''Cc'''} = \mathfrak{abc} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 B',$$

quia areæ similium sunt, uti quadrata laterum homologorum, $\mathfrak{ab}$ vero $\frac{2}{3}$-tum ipsius $\mathfrak{AB}$ est; altitudo autem prismatis dicti est $= \frac{A'}{3}$, quia si perpendicularis demittatur ex $\mathfrak{k}$ ad $\mathfrak{ABC}$, erit hæc et ad $\mathfrak{abc}$ perpendicularis, sit hoc in punctis $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{p}$: erunt triangula $\mathfrak{kPA}$ et $\mathfrak{kpa}$ similia, adeoque

$$\mathfrak{kp} : \mathfrak{kP} = \mathfrak{ka} : \mathfrak{kA}.$$

Stratum medium vero erit pyramis truncata, cuius si uti tota pyramis compacta est, in planis laterum $\mathfrak{aa'c'c}$ et $\mathfrak{bb'c'c}$ ad rectam $\mathfrak{cc'}$ ex $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ rectæ parallelæ æqualesque ducantur: orietur manifesto prisma, completa pyramide truncata dicta per corpus quinque laterum, cuius rete est plane illud, quod (Fig. 219*, 4) in strato inferiore exponitur; quamvis

Hosted by Google

inverti debeat, ut complementum dictum prodeat; erit nempe superius trapezium, cuius latus unum $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' = \gamma$ et ei parallelum 2γ est, latus ex $\mathfrak{a}'$ est $= \alpha$ et latus ex $\mathfrak{b}'$ est $= \beta$ (per parallelogrammorum latera opposita); secundum latus corporis huius, pyramidem dictam truncatam ad prisma complentis, est parallelogrammum ex $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 2\gamma$ et c, tertium est trapezium $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{b}\mathfrak{a}$, quartum et quintum sunt ad A et B triangula laterum a, c, α et laterum b, c, β.

Tota pyramis igitur est $= \frac{8A'B'}{27} + 3p$ (si pyramis stratum superius constituens p dicatur), nempe duo strata inferiora simul duo prismata æqualia et duo p efficiunt. Est autem ipsius p basis $= \frac{B'}{9}$ (pag. 111), altitudo $\frac{A'}{3}$; et si cum p eadem operatio suscipiatur, dicaturque p' pyramis stratum superius constituens: erit $p = \frac{8A'B'}{27^2} + 3p'$, quum pro A' nunc $\frac{A'}{3}$ et $\frac{B'}{9}$ pro B' sit; adeoque $3p$ erit $= \frac{3 . 8A'B'}{27^2} + 3^2 p'$; atque si eodem modo tractetur quodvis p', et quævis pyramis stratum superius efficiens uno accento plures nanciscatur: manifesto prisma totum erit

$$= 8A'B'\left(\frac{1}{27} + \frac{3}{27^2} + \frac{3^2}{27^3} + \frac{3^3}{27^4} + \cdots + \frac{3^{n-1}}{27^n}\right) +$$

$+ 3^n$ eiusmodi pyramidibus, quarum basis $\frac{B'}{9^n}$, altitudo $\frac{A'}{3^n}$ est.

Est autem summa s harum pyramidum minor, quam si pro eadem basi et altitudine in prismata mutarentur; esset vero prismatum horum summa $3^n \cdot \frac{B'}{9^n} \cdot \frac{A'}{3^n}$, adeoque $s < \frac{A'B'}{9^n}$, consequenter $s \backsim 0$ si $n \backsim \infty$.

Summa S progressionis geometricæ intra parenthesim (quum exponens $\frac{3}{27} < 1$ sit) autem $\backsim \frac{1}{27} : \left(1 - \frac{3}{27}\right) = \frac{1}{24}$; quod per $8A'B'$ multiplicatum $\backsim \frac{A'B'}{3}$. Consequenter $S \backsim \frac{A'B'}{3}$, et si tota pyramis P dicatur, S semper $< P$ manet, sed $P - S = s \backsim 0$; itaque $S \backsim P$; et per consequentiam $P = \frac{A'B'}{3}$.

Scholion 1. *Pyramidem triangularem quamvis in genere aequalitate terminata ad prisma reduci posse vel non posse (adhucdum) haud liquet.*

Hosted by Google

Scholion 2. Potest etiam quodvis corpus planis rectilineis clausum in pyramides rectilineas (uti figura rectilinea in triangula) dispesci; et *summa pyramidum erit soliditas totius.*

Scholion 3. *Superficies pyramidis* rectilineæ manifesto est summa triangulorum latera pyramidis constituentium, basi addita.

Sed quæstiones oriuntur:

1. quomodo perpendicularis ex apice demissæ quantitate locoque atque basi $\mathfrak{ABC}$ pyramidis triangularis, cuius apex $\mathfrak{p}$ est, datis, latera innotescant, ut etiam rete construi queat.

2. Si nonnisi basis $\mathfrak{ABC}$, recta $\mathfrak{Ap}$ et angulus solidus ad $\mathfrak{A}$ detur: inde altitudinem et latera reperire.

I. Quoad primum: sit (Fig. 220.) $\mathfrak{p}$ apex pyramidis, cuius basis $\mathfrak{ABC}$ est, et perpendicularis ex $\mathfrak{p}$ ad planum baseos sit $\mathfrak{pP}$; erit $\mathfrak{pP}$ perpendicularis ad $\mathfrak{PA}$, $\mathfrak{PB}$, $\mathfrak{PC}$; atque in triangulis rectangulis $\mathfrak{APp}$, $\mathfrak{CPp}$, $\mathfrak{BPp}$ e cathetis hypotenusae innotescunt, nempe ex $\mathfrak{AP}$, $\mathfrak{Pp}$ prodit hypotenusa $\mathfrak{Ap}$, ex $\mathfrak{BP}$ et $\mathfrak{Pp}$ prodit $\mathfrak{Bp}$, et ex $\mathfrak{CP}$ et $\mathfrak{Pp}$ prodit $\mathfrak{Cp}$. E trianguli $\mathfrak{APC}$ lateribus autem innotescit γ, atque e triangulo $\mathfrak{APq}$ ad $\mathfrak{q}$ rectangulo prodit $\mathfrak{Pq}$, et in triangulo $\mathfrak{pPq}$ ad $\mathfrak{P}$ rectangulo prodit etiam angulus, quem $\mathfrak{pq}$ cum $\mathfrak{qP}$, id est planum $\mathfrak{pAC}$ cum plano $\mathfrak{ABC}$, facit.

II. Quoad secundum (Fig. 220.) si præter basim $\mathfrak{ABC}$ nonnisi $\mathfrak{Ap}$ et angulus solidus ad $\mathfrak{A}$ detur, nempe $\angle \mathfrak{pAC} = v$, et $\angle \mathfrak{CAB}$ sit β, atque $\angle \mathfrak{BAp}$ sit α: dicatur u angulus, quem planum $\mathfrak{ApC}$ cum basi facit. Concipiatur angulus solidus ad $\mathfrak{A}$ in centrum sphæræ poni; per angulos v, β, α, ad verticem $\mathfrak{A}$ datos, latera trianguli sphærici omnia data erunt, unde prodit u (per inferius dicenda).

Demissa tum ex $\mathfrak{p}$ in plano $\mathfrak{ACp}$ perpendiculari $\mathfrak{pq}$ ad $\mathfrak{AC}$, in triangulo $\mathfrak{Apq}$ ad $\mathfrak{q}$ rectangulo ex $\mathfrak{Ap}$ et v prodit $\mathfrak{pq}$ (imo etiam $\mathfrak{Aq}$); atque hinc in triangulo ad $\mathfrak{P}$ rectangulo $\mathfrak{pqP}$, ex $\mathfrak{pq}$ et angulo u planorum $\mathfrak{ApC}$ et $\mathfrak{ABC}$, prodit cathetus nempe perpendicularis quæsita $\mathfrak{pP}$, et prodit etiam $\mathfrak{Pq}$.

Latus $\mathfrak{pB}$ trianguli $\mathfrak{ApB}$ autem prodit ita: ex $\mathfrak{Aq}$ et $\mathfrak{Pq}$, quæ antea prodierant, in triangulo rectangulo $\mathfrak{AqP}$ prodit γ et $\mathfrak{AP}$; atque in triangulo $\mathfrak{PAB}$ ex angulo $\gamma+\beta$ et lateribus $\mathfrak{AP}$ et $\mathfrak{AB}$ prodit $\mathfrak{PB}$; atque hinc in triangulo ad $\mathfrak{P}$ rectangulo $\mathfrak{PpB}$ e cathetis $\mathfrak{Pp}$, $\mathfrak{PB}$ prodit $\mathfrak{pB}$.

Hosted by Google

Scholion 4. Superficies prismatis rectilinei est summa parallelogrammorum lateribus baseos insistentium, additis duabus basibus æqualibus. Hic quoque prisma triangulare considerare sufficit. *Latera linearia* hic omnia sunt æqualia; nempe si (pagg. 228 &) basis sit $\mathfrak{AB}\mathfrak{C}$, et latera prismatis sint parallelogramma $\mathfrak{AB}\mathfrak{ba}$, $\mathfrak{AC}\mathfrak{ca}$, $\mathfrak{BC}\mathfrak{cb}$: erit prisma iuxta rectam $\mathfrak{Aa}$ constructum, et $\mathfrak{Aa} = \mathfrak{Bb} = \mathfrak{Cc}$, atque $\mathfrak{Aa}$, $\mathfrak{Bb}$, $\mathfrak{Cc}$ *latera linearia* dici possunt.

Quæstiones heic prioribus analogæ exoriuntur.

1. Data basi $\mathfrak{AB}\mathfrak{C}$, (Fig. 221.) et puncto $\mathfrak{a}'$, quo perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ ad planum baseos demissa cadit, si latus lineare $\mathfrak{Aa}$ detur, e triangulo rectangulo $\mathfrak{aa}'\mathfrak{A}$ innotescit cathetus $\mathfrak{aa}'$ ex hypotenusa $\mathfrak{Aa}$ et catheto $\mathfrak{a}'\mathfrak{A}$. Si vero præter punctum $\mathfrak{a}'$ et prismatis altitudo $\mathfrak{aa}'$ data fuerit, innotescit latus lineare $\mathfrak{Aa}$, ex eodem triangulo ad $\mathfrak{a}'$ rectangulo, e cathetis $\mathfrak{aa}'$ et $\mathfrak{Aa}'$.

Ex $\mathfrak{Aa}'$, $\mathfrak{AC}$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{C}$ vero innotescit angulus γ; atque ex $\mathfrak{Aa}'$ et γ prodit $\mathfrak{a}'\mathfrak{q}$ perpendicularis ad $\mathfrak{AC}$, et prodit etiam $\mathfrak{Aq}$; atque e triangulo rectangulo $\mathfrak{aa}'\mathfrak{q}$, ex $\mathfrak{aa}'$ et $\mathfrak{a}'\mathfrak{q}$ prodit angulus plani $\mathfrak{AaC}$ cum plano baseos.

2. Si vero præter basim $\mathfrak{AB}\mathfrak{C}$ et latus lineare $\mathfrak{Aa}$ nonnisi angulus solidus ad $\mathfrak{A}$, ex $v = \mathfrak{aAC}$, $\beta = \mathfrak{CAB}$ et $\alpha = \mathfrak{aAB}$, detur: tum (ut antea in pyramide, e triangulo sphærico) prodibunt anguli u, u', quos prismatis latera $\mathfrak{AacC}$, $\mathfrak{AabB}$ cum basi faciunt. E triangulo ad $\mathfrak{q}$ rectangulo $\mathfrak{aqA}$ vero ex $\mathfrak{Aa}$ et v prodibunt $\mathfrak{aq}$ et $\mathfrak{Aq}$; atque hinc e triangulo ad $\mathfrak{a}'$ rectangulo $\mathfrak{aa}'\mathfrak{q}$, ex $\mathfrak{aq}$ et angulo lateris $\mathfrak{aAC}$ cum basi prodit altitudo $\mathfrak{aa}'$.

Atque etiam lateris ipsi $\mathfrak{BC}$ insistentis angulus $\mathfrak{bBC}$ parallelogrammi $\mathfrak{BC}\mathfrak{cb}$ innotescit modo sequente: $\mathfrak{bB}$ est $= \mathfrak{aA}$, et si ex $\mathfrak{B}$ parallela $\mathfrak{Bb}'$ ducatur ipsi $\mathfrak{Aa}'$, eidem æqualis, erit $\mathfrak{bb}'$ perpendicularis ex $\mathfrak{b}$ ad basim; et ex $\mathfrak{b}'$ perpendiculari $\mathfrak{b}'\mathfrak{q}'$ ad $\mathfrak{BC}$ missa exhibebitur $\mathfrak{Bq}'$, eritque $\mathfrak{bq}'$ perpendicularis ad $\mathfrak{Bq}'$; adeoque in triangulo ad $\mathfrak{q}'$ rectangulo $\mathfrak{Bq}'\mathfrak{b}$ innotescit angulus ad $\mathfrak{B}$ parallelogrammi ipsi $\mathfrak{BC}$ insistentis. Aut ponatur anguli solidi ad $\mathfrak{B}$ apex in centrum sphæræ; erit in triangulo sphærico latus unum per parallelogrammi $\mathfrak{AabB}$ angulum $\mathfrak{ABb} = 2R - \alpha$ datum (nempe summa duorum internorum $= 2R$), alterum quoque datur,

Hosted by Google

quum sit $= \angle \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, et angulus u' antea innotuerat. Unde latus tertium prodit, parallelogrammi lateris $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ insistentis angulum ad $\mathfrak{B}$ exprimens; adeoque latera prismatis singula innotescunt. Si parallelepipedum sit, tum parallelogrammis, quæ ipsis $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ insistunt, opposita æqualia sunt.

·312.

Motus figurarum circa axem.

·3121.

Quadrilaterum rectangulum circa latus aliquod revolutum parit *cylindrum rectum* circulo tanquam basi insistentem, e cuius centro erecta ad basim perpendicularis *axis cylindri* audit. Estque manifesto cylinder prisma rectum, quum recta axi parallela, donec redeat, ubique eadem et tam ad tangentem circuli quam ad radium perpendicularis, adeoque ad planum ipsum perpendicularis sit.

Est vero, sive circulus sive quævis figura in plano (sive curva, sive e curva et recta utcunque mixta) pro basi accipiatur, iuxta quamvis rectam, plano sive perpendiculariter sive oblique insistentem, constructum fuerit prisma: *soliditas eius, basi per altitudinem multiplicatae aequalis.*

Nam consideretur prius cylinder (sive rectus sive obliquus) circulo insistens: erat (ex pag. 104) polygoni inscripti area a, atque $a + \lambda > C > a$. Si igitur cylindri altitudo A sit, et concipiantur ad eandem altitudinem A prismata rectilinea basibus $a + \lambda$ et a insistentia, dicaturque prius Q, posterius q, atque cylinder dicatur C': erit manifesto $Q > C' > q$ (nempe $(a + \lambda)\ A > C' > aA$); atque $Q - q \backsim 0$. Consequenter $C' - q \backsim 0$, adeoque $q \backsim C'$. Sed $q \backsim \frac{PrA}{2}$, (si radius r sit, et $p \backsim P$); itaque C' æqualis est areæ circuli per altitudinem multiplicatæ.

·312. *Motus figurarum circa axem.*
·3121. Quadrilateri rectanguli revolutio circa latus parit *cylindrum rectangularem.*
·3122. Trianguli rectanguli revolutio circa cathetum parit *conum rectangularem.*
·3123. Revolutio semicirculi circa diametrum parit *sphaeram.*

Hosted by Google

Potest autem quævis basis, (sive una linea curva claudatur, sive perimetri tantum pars una vel plures curvæ sint), ita dividi, ut summa prismatum his baseos partibus insistentium prismati toti æqualis sit; possuntque pro quavis α harum baseos partium, cuius perimeter parte curva gaudet, talia rectilinea L, l generari, ut $L > \alpha > l$, atque $L - l \backsim 0$, adeoque $\alpha - l \backsim 0$, et consequenter $\alpha A - Al \backsim 0$, atque $Al \backsim \alpha A$, id est αA sit ipsius Al limes, æqualis prismati basi α altitudine A insistenti.

·3122.

Trianguli rectanguli revolutio circa cathetum parit *conum rectum*, et cathetus dictus *axis*, *hypotenusa vero coni latus* audit. Patet autem iuxta (pag. 10) pyramidem sensu latiore esse non hunc conum solum, sed et obliquum, nempe complexum omnium rectarum, quæ e circulo ad idem aliquod tale punctum $\mathfrak{p}$ sunt, etsi recta ex $\mathfrak{p}$ ad centrum circuli non sit perpendicularis ad planum circuli; imo et complexum rectarum e cuiusvis figuræ planæ punctis omnibus ad idem punctum $\mathfrak{p}$ extra planum situm; atque etiam iis, quæ (in præcedentibus) de cylindro dicta sunt, applicatis, cuiusvis coni soliditatem esse basi per tertiam partem altitudinis multiplicatæ æqualem.

§. 1.

Superficies cylindri recti (præter bases) *est* $A\pi D$, *si* A *altitudinem cylindri*, D *diametrum baseos circularis, et* π *quantitatem peripheriae pro diametro* 1 *denotet.* Si nimirum basi inferiori inscribatur polygonum, et in basi superiore puncta inferioribus respondentia accipiantur, atque parallelogramma, per latera parallela polygonorum in basibus parallelis sibi invicem respondentia efformata, concipiantur: limes summæ horum parallelogrammorum est summæ laterum polygoni limes per constantem A multiplicatus; atque per superficiem cylindri, dum cum plano comparatur, hoc intelligitur; fit nempe tum quantitas respectiva, quamvis et per se etiam quantitas sit, et quævis eius portiones quidem inter se (quoad maioritatem minoritatemve) comparari queant; interim et duæ

Hosted by Google

superficies cylindricæ, si circulis radiorum inæqualium insistant, respectu dicto nonnisi ut quantitates respectivæ comparantur.

Idem ad conum, aliasque quasvis superficies curvas applicatur; demonstrari nempe potest triangulis se invicem excipientibus inscriptis, ut nempe apices omnes eorum in superficiem curvam cadant: summam eorum ad limitem certum tendere, si cuiusvis eorum singuli tres apices sibi invicem dato quovis propius veniant; limitemque eum, utcunque inscribantur triangula, eundem esse.

In cono recto circulo insistente patet, triangulorum ex apice ad latera polygoni basi inscripti generatorum summam ad $\pi D\alpha$ tendere, si D diametrum baseos et α dimidium lateris coni denotet.

Scholion. Atque hinc *rete cylindri recti* erit (præter bases) rectangulum altitudinis eiusdem, quæ cylindri est, rectæ perimetrum baseos cylindri exæquanti superstructum; basis autem si circulus fuerit, sive recta dicta computatur e diametro, sive si e recta data quæratur diameter, facile construitur. Si vero alia linea sit perimeter baseos, eius longitudo computanda est, ut rectanguli basis prodeat.

Rete coni recti autem sector est, cuius centrum apicem, latus radium, et arcus perimetrum baseos circularis præbet. Sunt enim, si basis circulus et recta e centro ad apicem ducta ad basim perpendicularis fuerit, latera coni omnia æqualia, quum sint hypotenusæ triangulorum rectangulorum æqualium: quod ex. gr. si pro circulo ellipsis esset centro eodem gaudens, minime locum haberet. Basis circularis ex arcus longitudine, quæ e ratione arcus ad peripheriam atque radio innotescit, prodit; longitudo arcus enim per π divisa diametrum baseos præbet. Est vero angulus ad apicem eo acutior, quo minor angulus sectoris ad centrum est, et eo magis obtusus, quo propius ad quatuor rectos angulus dictus accedit.

Potest quoque e dato angulo ad apicem arcus sectoris, uti ex arcu sectoris angulus ad apicem reperiri. Sit nempe (Fig. 222.) latus coni l, axis a, et radius baseos sit r; dato angulo u et axe a, reperitur tam l quam r; eritque perimeter baseos $2r\pi$ arcui sectoris radio l scripti æqualis; tota peripheria esset $2l\pi$; sit x quantitas quæsita talis, ut

Hosted by Google

$$2l\pi x = 2r\pi$$

sit; erit

$$lx = r \quad \text{et} \quad x = \frac{r}{l}.$$

Si vero l et x data fuerint, erit $r = lx$, atque ex l et r prodit u.

Potest etiam rete pro cylindro basi qualivis datæ ad quemvis angulum insistente, saltem per puncta utvis propinqua construi; et idem de cono valet; neque proprie sensu geometrico præcisum sensum sive recta in curvam, sive planum in superficiem curvam flexa habent, nisi id per motum circa puncta illius, vel rectas huius ad intervalla fiat, atque resultatorum limites geometrici accipiantur.

Ex. gr. Sit basi circulari superstruendus cylinder aut conus talis, ut cum basi inferiore, in cylindro recta basium centra iungens, et in cono recta e centro baseos ad apicem, faciant certum angulum datum; aut in utroque sit basis ellipsis, cuius centrum c sit, atque angulus, quem in cylindro recta per centra baseos, in cono recta ex apice ad centrum, cum basi facit, dato angulo æqualis sit.

Potest cuivis curvæ, (qualiscunque fuerit), linea polygonalis inscribi, atque sive prisma sive pyramis fuerit, potest in triangularia dividi, quorum bases latera lineæ polygonalis dictæ sint; atque applicatis iis, quæ (pag. 242) dicta sunt, rete quantolibet exactius construi; imo etiam limes geometricus baseos in plano quæri, tam in prismate, si parallelogramma laterum basi insistentium æqualium, uti se invicem excipiunt, iungantur, quam in pyramide triangula, uti se invicem apice communi excipiunt, iungantur. Parallelepipedi recti rete (exclusis basibus) constabit e quatuor rectangulis eidem rectæ insistentibus; quia latera parallelogrammorum coincidentia cum basibus angulos rectos adeoque tales angulos deinceps positos efficiunt, qui simul duos rectos exæquant. Ubi vero hoc neque per limitem locum habet, parallelogramma in prismate, triangula in pyramide ita poni debent, uti se invicem excipiendo prodeunt; et ubi locum habet, limes geometricus quærendus est.

Est quoque, ut inferius patebit, cylinder obliquus circulo insistens nonnisi cylinder rectus ellipsi insistens, ad certum angulum oblique sectus;

Hosted by Google

et pariter conus circulo oblique insistens nonnisi conus rectus ellipsi insistens oblique sectus est: unde retia tam cylindri quam coni obliqui, sive circulo sive ellipsi ad datum angulum insistentium, reperiuntur.

Nempe cylindri recti circulo, imo et ellipsi insistentis rete construitur (pag. 245). Coni recti ellipsi insistentis quoque rete construi potest. Nam (Fig. 223.) sit ellipseos centrum $\mathfrak{c}$, sitque $\mathfrak{cd}$ dimidium axis minoris, et $\mathfrak{Ac}$ dimidium axis maioris; sitque $\mathfrak{cc}' \perp \mathfrak{Ac}$, et $\mathfrak{c}'$ apex coni; moveatur $\mathfrak{cd}$ usque in $\mathfrak{Ac}$, fiet ubique triangulum ad $\mathfrak{c}$ rectangulum, cuius cathetus e $\mathfrak{c}$ usque ad ellipsin crescet usque ad $\mathfrak{Ac}$, et ubique determinari poterit, alter cathetus vero $\mathfrak{cc}'$ erit; unde hypotenusa, nempe latus coni in illo loco, reperitur; adeoque etiam triangula se invicem excipientia, quorum bases chordæ et latera hypotenusæ dictæ sunt, adeoque rete cum errore quantovis minore construi poterit.

Si vero conus (vel cylinder) rectus constructus fuerit: sit (Fig. 224.) basis $\mathfrak{ABCDE}$ in plano tabulæ, atque $\mathfrak{AH}'$ sit tangens ad punctum $\mathfrak{A}$, circa quam planum e basi elevetur ad certum angulum u, atque planum baseos sit P, et planum elevatum dicatur p.

Quamvis res summa generalitate exponi posset, simpliciora proferre sufficiat.

Sit prius cylinder vel conus rectus ellipsi insistens, cuius axis minor $\mathfrak{AD} = b$, et axis maior $\mathfrak{EC}$, centrum $\mathfrak{f}$, et perpendicularis ad basim ex $\mathfrak{f}$ usque ad basim cylindri superiorem (aut apicem coni) sit $\mathfrak{pf}$; secetque planum p perpendicularem dictam $\mathfrak{fp}$ in $\mathfrak{f}'$. Innotescet $\mathfrak{ff}'$ in triangulo ad $\mathfrak{f}$ rectangulo $\mathfrak{Aff}'$ ex angulo u et catheto $\mathfrak{Af}$.

Sit iam e fine $\mathfrak{B}$ arcus $\mathfrak{AB}$ ad P erecta perpendicularis usque ad p; cadet hæc manifesto in superficiem cylindri; sit $\mathfrak{b}'$ punctum eius cum p commune.

Patet quod si cylindri rete rectangulare sit (Fig. 225.), cuius basis $\mathfrak{A}'\mathfrak{Q}$ = perimetro baseos, atque pro arcu $\mathfrak{AB}$ = rectæ $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ construatur ad $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ perpendicularis $\mathfrak{B}'\mathfrak{b}'' = \mathfrak{Bb}'$; et quum hoc cum punctis perimetri baseos quam proximis suscipi queat: rete cum errore quantovis minore construi possit, si ex $\mathfrak{A}'$ incipiendo usque ad $\mathfrak{Q}$ rectæ ducantur ab $\mathfrak{A}'$ ad $\mathfrak{b}''$ et a $\mathfrak{b}''$ ad $\mathfrak{c}''$ &c., atque pars infra hanc lineam cadens resecetur.

Hosted by Google

Itaque quæstio eo redit, ut (in præcedentibus) $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'$ determinetur, quod modo sequente fieri potest: perpendicularis ex $\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{H}'$ demissa cadat in $\mathfrak{B}''$, erit

$$\angle \mathfrak{b}'\mathfrak{B}''\mathfrak{B} = \angle \mathfrak{k}'\mathfrak{A}\mathfrak{k} = u;$$

itaque triangula rectangula $\mathfrak{b}'\mathfrak{B}''\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{k}'\mathfrak{A}\mathfrak{k}$ erunt similia; adeoque erit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{k} : \mathfrak{k}\mathfrak{k}' = \mathfrak{B}''\mathfrak{B} : \mathfrak{B}\mathfrak{b}' \quad \text{seu} \quad \mathfrak{B}\mathfrak{b}' = \alpha . \mathfrak{B}\mathfrak{B}'',$$

si $\frac{\mathfrak{k}\mathfrak{k}'}{\mathfrak{A}\mathfrak{k}}$ dicatur α. Est autem

$$\mathfrak{B}''\mathfrak{B} = \frac{b}{2} + y,$$

si y infra $\mathfrak{E}\mathfrak{C}$ negative et superius positive accipiatur.

Si vero cylinder circulo insistat, adeoque b diameter sit: manifesto $\mathfrak{B}''\mathfrak{B}$ sinus versus arcus $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ erit; adeoque si polygonum regulare inscribatur, et $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sit arcus chordæ primæ ex $\mathfrak{A}$ incipientis, dicaturque β, erunt in rete transferendæ perpendiculares sequentes: α sin. vers. β, α sin. vers. 2β, α sin. vers. 3β &c., nempe ad distantias β, 2β, 3β &c. ex $\mathfrak{A}'$ acceptas.

Sit iam conus rectus basi eidem superimpositus; in reti coni punctum plano p superficiei conicæ commune, reperto $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'$, facile innotescit: (Fig. 226.) $\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{b}'\mathfrak{B}$ ad planum P perpendiculares in plano sunt, at in hoc idem cadit coni latus $\mathfrak{p}\mathfrak{B}$, et in idem cadit recta $\mathfrak{k}'\mathfrak{b}'$, (quia puncta $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{B}$ in idem cadunt, adeoque et recta inter quævis bina eorum); manifesto autem secatur $\mathfrak{p}\mathfrak{B}$ per $\mathfrak{k}'\mathfrak{b}'$, et sectio ista in p est, quia puncta $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{b}'$ in p sunt, adeoque quodvis punctum rectæ $\mathfrak{k}'\mathfrak{b}'$ in p est. Sit sectio ista $\mathfrak{q}$; recta $\mathfrak{B}\mathfrak{q}$ in rete ad latus $\mathfrak{p}\mathfrak{B}'$ ex $\mathfrak{B}'$ transferenda facile prodit, (sive per constructionem, sive calculum), quum $\triangle\, \mathfrak{k}\mathfrak{p}\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{k}$ rectangulum, simul cum $\mathfrak{k}\mathfrak{k}'$ et $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'$ data sint.

Si vero (Fig. 227.) planum P circa $\mathfrak{A}'\mathfrak{H}''$ ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{H}'$ parallelam elevetur, et planum elevatum in loco novo dicatur p: tum nonnisi β subtrahendum ex $\mathfrak{B}\mathfrak{B}''$ erit, ut remaneat $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'''$; et si perpendicularis ex $\mathfrak{D}$ usque ad planum p erecta k dicatur, hæc ex γ et angulo u ipsis p cum P innotescit; et si perpendicularis ex $\mathfrak{B}$ ad P sit $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'''$, erit

Hosted by Google

$$\gamma : k = \mathfrak{BB}''' : \mathfrak{Bb}''';$$

et huic $\mathfrak{Bb}'''$ æqualis erit pro hoc casu in reti perpendicularis ad basim ad distantiam ab $\mathfrak{A}'$ ipsi $\mathfrak{AB}$ æqualem pro puncto $\mathfrak{B}$ construenda.

In cono recto autem (Fig. 227.), si $\mathfrak{fp}$ per p non secetur, adeoque planum secans p ad P planum baseos perpendiculare sit, erit $u = R$, nempe angulus planorum p et P se invicem (Fig. 228.) in $\mathfrak{PQ}$ secantium rectus erit; prodibitque pro puncto $\mathfrak{M}$ recta $\mathfrak{Mm}'$ e latere $\mathfrak{pM}$ ex $\mathfrak{M}$ incipiendo in reti resecanda modo sequente: fiat e centro $\mathfrak{f}$ recta ad $\mathfrak{M}$, secetque hæc rectam $\mathfrak{PQ}$ in $\mathfrak{c}'$; secabunt se invicem plana $\mathfrak{fMp}$ et p, ad P perpendicularia et punctum $\mathfrak{c}'$ commune habentia, in recta aliqua per $\mathfrak{c}'$ eunte; erit igitur hæc perpendicularis ad P adeoque ad $\mathfrak{fM}$, secabitque hæc rectam $\mathfrak{pM}$; fiat id in $\mathfrak{m}'$; erunt triangula rectangula $\mathfrak{pfM}$ et $\mathfrak{m}'\mathfrak{c}'\mathfrak{M}$ similia; consequenter

$$\mathfrak{fM} : \mathfrak{pM} = \mathfrak{c}'\mathfrak{M} : \mathfrak{Mm}'.$$

§. 2.

Corporum similium soliditates sunt, ut cubi linearum homologarum, superficies autem sunt, ut quadrata linearum homologarum.

Etenim quodvis corpus C, cuius superficies sit S, in pyramides triangulares (saltem e puncto interno uno aut pluribus) dispesci potest; et aut summa basium superficies corporis erit, aut apicibus basium triangularium dato quovis propius acceptis summa pyramidum $\backsim C$, summa basium vero $\backsim S$.

Sint corpora similia A et B; applicatis iis, quæ (pagg. 77—78, 111 et 239) dicta sunt: quævis linea in A erit eidem homologæ in B per constantem α (eandem pro omnibus) multiplicatæ æqualis; et si bases triangulares in utroque semper simultaneo homologæ accipiantur, erit in A quodvis triangulum t ei in B homologo t' per α^2 multiplicato æquale; pyramidis p autem basi t insistentis altitudo erit altitudini pyramidis p' basi t' insistentis homologa, adeoque si altitudo ipsius p sit $a = \alpha a'$, erit

Hosted by Google

$$p = \frac{ta}{3} = \frac{\alpha^2 t' \alpha a'}{3} \quad \text{et} \quad p' = \frac{t'a'}{3},$$

consequenter

$$p : p' = \frac{\alpha^3 t' a'}{3} : \frac{t'a'}{3} = \alpha^3 : 1,$$

sive uti tertiæ potentiæ linearum homologarum.

Hinc etiam, si summa omnium pyramidum $p \backsim P$, et summa omnium pyramidum $p' \backsim P'$, erit

$$P : P' = \alpha^3 : 1.$$

Ita si summa omnium triangulorum $t \backsim s$, et summa omnium triangulorum $t' \backsim s'$, erit

$$s : s' = t : t' = \alpha^2 : 1.$$

Scholion. In pyramidibus similibus, quæ rectilineis insistunt, divisio in pyramides triangulares ex apice in utraque fieri potest. In sphæra fit e centro via limitis: atque hinc, (quum sphæræ similes sint), soliditates sunt uti tertiæ, superficies autem uti secundæ potentiæ radiorum. S sphæræ, cuius radius 1 est, superficies β, soliditas γ dicatur: erit sphæræ, cuius radius n est, superficies $n^2\beta$, soliditas $n^3\gamma$.

Prismata vero quævis, etsi modo dicto per divisionem e puncto interno in pyramides triangulares tractari queant: quum tamen factis ex altitudine in basim æqualia sint: si similia fuerint, sufficit bases altitudinesque quoad soliditatem considerare; nempe si alterutrius altitudo a sit, et basis b, alterius autem altitudo sit na: erit huius basis n^2b, et soliditas $n^2bna = n^3ab$, prioris autem est ab.

·3123.

Revolutio semicirculi circa diametrum parit sphaeram: cuius soliditas et superficies quærendæ veniunt. (Fig. 229.)

Sit quadratum 𝔄𝔅𝔠𝔇, et diagonalis 𝔇𝔅, ac quadrans 𝔄𝔠 centro 𝔅 radio 𝔅𝔄, atque parallela quævis 𝔡𝔠 ad 𝔄𝔅: erit manifesto v (ubicunque scriptum est) $= \frac{1}{2} R$, adeoque trianguli 𝔣𝔠𝔅 crura 𝔣𝔠 et 𝔠𝔅 æqualia erunt. Dividatur porro 𝔅𝔠 per n, et sit ex 𝔅 incipiendo versus 𝔠 recta 𝔣𝔠

Hosted by Google

pars eiusmodi; fiatque per f parallela ef ad AB, atque erigatur ex s perpendicularis st ad dc, et demittatur e puncto r, in quo ef quadrantem secat, perpendicularis rg ad ef, atque fiant perpendiculares hi et kl. Revolvatur schema totum circa BC; describet quadrans AC hemisphærium, quadratum ABCD cylindrum, et △DBC ad C rectangulum describet conum, eritque tam coni quam cylindri basis circulus, cuius radius æqualis radio r hemisphærii est, altitudo vero radius; per rectangula edcf, tscf, rgcf et hicf, lkcf autem describentur cylindri, quorum altitudo $cf = \frac{r}{n}$, bases vero sunt circuli radiorum r, sc, gc, ic, kc. ARCHIMEDES movendo planum e circulo per AB descripto huic parallele, donec in DC perveniat, sectiones simultaneas in cylindro, hemisphærio, conoque comparat, et reperiendo, quod (quasvis sectiones simultaneas intelligendo) sectio C in cylindro facta sit æqualis summæ sectionis c in cono factæ et sectionis s in hemisphærio factæ: concludit (omnes sectiones simultaneas accipiendo) cylindrum esse summæ coni et hemisphærii æqualem. Et hoc rite intelligendo, ut (Tom. I. pagg. 209 &) dictum est, germen calculi sublimioris continet.

Explicatio sequens est.

Soliditas cylindri dicatur A, soliditas sphæræ sit B, et soliditas coni sit K; dicaturque cylinder qui per edcf describitur a, per tscf descriptus sit s', per rgcf scriptus sit s'', et per hicf scriptus sit c'', ac per lkcf scriptus dicatur c'; atque per rscf scriptum (per rs arcum intelligendo) sit b, et per hkcf scriptum sit k.

In triangulo rectangulo scB est

$$sB^2 = sc^2 + cB^2 = sc^2 + ck^2,$$

quia $kc = cB$. Atque hinc circulus radio Bs scriptus est summæ circulorum radiis sc, kc scriptorum æqualis, id est (quia $sB = cd$) erit $C = s + c$; et hinc $a = s' + c'$.

Dicatur B' summa omnium s', et summa omnium s'' sit B''; atque summa omnium c' sit K', et summa omnium c'' sit K''; summa pro quovis n omnium a est A, omnium b est B, omnium k est K; atque quum tam cylindri a, quam cylindri s' et c' numero eodem prodeant, et pro quibusvis simultaneis sit $a = s' + c'$, manifesto erit $A = B' + K'$.

Hosted by Google

Sed

$$B'+K''>B+K>B''+K';$$

quia

$$s'>b>s'' \quad \text{et} \quad c''>k>c'$$

adeoque, quum hoc de omnibus simultaneis valeat, est

$$B'>B>B'' \quad \text{et} \quad K''>K>K'.$$

Atque si $n \backsim \infty$, fit

$$B'+K''-(B''+K') \backsim 0,$$

quia $\frac{s'}{s''} \backsim 1$, et $\frac{c'}{c''} \backsim 1$; adeoque et

$$B+K-(B''+K') \backsim 0,$$

id est

$$B''+K' \backsim B+K.$$

Sed et $B' \backsim B$, et $K' \backsim K$; nam ex $\frac{s'}{s''}$ et $\frac{c'}{c''} \backsim 1$, et $s'>b>s''$, atque $c''>k>c'$, fit etiam $\frac{s'}{b} \backsim 1$, et $\frac{c'}{k} \backsim 1$ (Tom I. pagg. 93 et 209 &). Consequenter

$$B'+K' \backsim B+K=A.$$

Est autem $K=\frac{A}{3}$; nempe conus et cylinder eidem circulo maximo insistunt, et altitudo utriusque radius est: consequenter

$$B=A-K=\frac{2}{3}A;$$

atque tota sphæra diametri d fit $=\frac{d^3\pi}{6}$; nempe area circuli maximi est $\frac{d^2\pi}{4}$, et hemisphærium est

$$\frac{2}{3}\,\frac{d^2\pi}{4}\,\frac{d}{2}=\frac{d^3\pi}{3\cdot 4},$$

et huius duplum est

$$\frac{d^3\pi}{6}=\frac{4r^3\pi}{3}.$$

Hinc item ARCHIMEDES reperit *superficiem S sphaerae quadruplo areae circuli maximi aequalem.*

Hosted by Google

Accipiantur nempe tria puncta in S, et iungantur rectis, ut fiat triangulum, et quodvis latus fiat trianguli novi basis cum apice novo in S, atque hoc semper porro continuetur, ita ut per triangula omnia demum superficies simplex e planis composita apicibus angulorum solidorum in S cadentibus exsurgat. Dicatur summa horum triangulorum S', fiantque hæ pyramidum apice communi in centro gaudentium bases, sitque pyramidum istarum summa p. Si cuiusvis harum pyramidum latera triangularia producantur, poterunt hæc per planum priori basi parallelum et ipsum S tangens tale secari, ut pyramis baseos novæ priore maior sit, et si pro quavis priorum pyramidum eiusmodi pyramis fiat, dicatur omnium novarum pyramidum summa P. Facile patet, quod $P-p \backsim 0$, si cuiusvis trianguli apices dato quovis propius accipiantur; est vero (sphæra B dicta),

$$P > B > p,$$

adeoque $B-p \backsim 0$; consequenter $p \backsim B$. Sed radio r dicto, poni potest

$$p = S' \frac{r-\omega}{3},$$

nam quamvis S' summa diversorum triangulorum esse possit, altitudo semper est radio minor; atque ex. gr.

$$\alpha(r-\lambda)+\beta(r-\varkappa)=(\alpha+\beta)(r-\omega)$$

poni potest, quia inde valor ipsius ω prodit.

Patet autem, quod $\omega \backsim 0$, adeoque si tum $S' \backsim S''$, ipsum $p \backsim S'' \frac{r}{3}$; atque hinc, quum soliditas sphæræ antea fuerit $= \frac{(2r)^3\pi}{6}$, erit

$$\frac{4r^3\pi}{3} = S'' \frac{r}{3};$$

et hinc

$$S'' = 4r^2\pi;$$

id est (per superficiem sphæræ limitem laterum planorum corporis inscripti intelligendo) erit superficies sphæræ quadruplo areæ circuli maximi æqualis. Aliquid tamen hanc eandem materiam concernens paulo inferius addetur.

Hosted by Google

Scholion 1. *Rete sphaerae* quidem e planis neutiquam construi potest, ut statim patebit; sed exhiberi quam proxime potest: nempe concipiatur (Fig. 230.) quadrans arq in partes numero m dividi; sit centrum c, et revolvatur arq circa qc; describet a circulum maximum, basim coni recti apicem in polo q habente; r vero describet circulum priori parallelum, basim coni recti apicem in eodem q habente; atque via chordæ ar conus truncatus erit. Si iam tam huius coni truncati rete, quam uti se invicem chordæ m-tarum partium quadrantis usque ad polum excipiunt, retia conorum truncatorum per vias chordarum dictarum descriptorum construantur, atque ita uti se invicem excipiunt compingantur, manifesto quo maius m accipitur, eo minore errore sphæra exhibebitur.

Coni truncati per chordam ar descripti rete prodit modo sequente: secet continuatio rectæ ar continuationem rectæ cq in p; fiatque centro p radio pa arcus $ab = 2r\pi$, et eodem centro p radio pr fiat arcus $rd = 2r'\pi$: erit rabd rete coni truncati; nempe notandum est, quod basis coni, cuius apex q et latus qa erat, et basis coni, cuius apex p et latus pa est, congruant, quum utrumque circulus sit, peripheria longitudinis eiusdem gaudens.

Innotescit autem tam ap quam r', sive per constructionem, sive per calculum, quum

$$rr' = \sin. qr = \cos. ar$$

sit, et anguli, quos latera polygoni ex a incipientis cum perpendicularibus ad qc missis faciunt, facile computentur. Idem vero de quovis latere ad sequens continuari posse patet: ex. gr. conus truncatus lateris rt generatur per arcum $= 2\pi . tt'$, centro p' radio p't scriptum, et arcum $= 2\pi . rr'$ centro p' radio p'r scriptum. Constructi autem hi coni truncati, uti se invicem excipiunt, conglutinari et omnia intra bases quadamtenus expleri quoad praxim possunt.

Aut circulus maximus dividitur in quo plures partes æquales, et segmenta a quavis parte ad polos exstruuntur æqualia; si plana per axem et puncta divisionis ponantur: manifesto conorum truncatorum bases omnes in totidem partes divisæ, segmenta appropinquantia præbebunt.

Hosted by Google

Plures huius modos ad praxim magis pertinentes vulgaresque referre non huius loci est.

Quod reipsa autem e plano segmentum tale construi nequeat, sic patet: sit recta $\mathfrak{a}'\mathfrak{q}'$ in quadrantem $\mathfrak{a}\mathfrak{q}$ flexa, ita ut $\mathfrak{q}'$ in polum $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{a}$ cadat; planum $\mathfrak{q}'\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ quoque simul incurvabitur; atque etiam $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ per se circa coni latus $\mathfrak{q}\mathfrak{a}$ incurvari posset, ut in circulum maximum C, cuius polus $\mathfrak{q}$ est, cadat; pariter seorsim quivis arcus $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ posset in arcum circuli paralleli per ei respondens $\mathfrak{r}$ euntis incurvari; at si hoc simul fieri debeat, in motu flexus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$ simul quiescere deberent, quamvis non in recta sint.

Pariter patet, si prius $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ incurvetur, ut in C cadat; fiet enim tum figura plana $\mathfrak{q}'\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ pars superficiei cylindricæ aut conicæ; atque tum novam incurvationem, ut $\mathfrak{a}'\mathfrak{q}'$ in $\mathfrak{a}\mathfrak{q}$ cadat, fieri non posse pariter patet; quia primus motus circa $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ fiet, et nulla portio plani ex $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ incipientis manente arcu $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ moveri poterit, quum $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ non sit recta, adeoque axis motus esse nequeat.

Generaliter nulla flexio superficiei esse potest, nisi rectæ se invicem continuo excipiant, atque motus circa illas fiat, uti se invicem continuo excipiunt.

Scholion 2. Solet in praxi hexapeda in 6 pedes, pes in 12 pollices, pollex in 12 lineas primas, linea μ-ta in 12 lineas $\mu+1$-tas dividi; ita ut $25^\circ\ 5'\ 7''$ denotet 25 hexapedas 5 pedes 7 pollices; at eandem subdivisionem tam in areis quam in soliditatibus retinere (ob numeros minores) visum est: nempe ubi de areis sermo est, *pes quadratus* significat sextam partem quadrati, cuius latus hexapeda est, et huius pars duodecima dicitur *pollex quadratus* ℰ, ita ut pes quadratus sit rectangulum, cuius altitudo unus pes est, pollex rectangulum altitudinis unius pollicis ℰ sit, semper hexapedam pro basi accipiendo; ita cubi, cuius latus hexapeda est, sexta pars *pes cubicus*, et huius duodecima pars *pollex cubicus* ℰ audit; adeoque pes cubicus est parallelepipedum, cuius altitudo pes, et pollex cubicus parallelepipedum, cuius altitudo pollex ℰ est, pro basi semper quadratum, cuius latus hexapeda est, intelligendo.

Variæ hinc tam areas quam soliditates computandi methodi sunt,

Hosted by Google

quibus computata sensu dicto exhibeantur. Simplicissima videtur sequens.

Sit unitas duobus hexapedis æqualis, *pertica* dicta; erunt in pertica pedes 12, in pede pollices 12 et ita porro; atque quum computatio areæ per factum e duobus factoribus, soliditas vero e tribus prodeat, res ad multiplicationem redit: quæ si pro 10 et 11 signa darentur, *numeratione duodecadica* facile peragi, et factum ad linguam communem dictam transferri posset, modo sequente. Scribantur factores ita, ut numerus hexapedarum numero perticarum exprimatur; ex. gr. pro 101° 5′ 10″ scribatur 50, 11′ 10″; nempe absque eo, ut pro 10 et 11 signa pecularia ponerentur, possunt pedes, pollices & imo et perticæ, intervallis distincta, decadice designari, ut in exemplo allato 50 unitates, 11 duodecimæ, et unius duodecimæ 10 duodecimæ denotentur; imo factum quodvis partiale e termino in terminum decadice quæri scribique potest.

Ita scriptis binis areæ factoribus, multiplicatio in numeratione duodecadice peragenda est, ita ut in decadica, dummodo heic 12 ipsius 10 vicem subeat; notando, quod in productorum partialium postea addendorum linea suprema prius tot loca notarum duodecimalium signanda sint, quot notæ duodecimales in factore utroque simul sunt, atque his anteponendum comma sit, ante quod ad lævam numerus unitatum sequitur; atque numeri duodecadum additio ad lævam nonnisi usque ad locum commate insignitum fiat continueturve. Demum vero factum post comma per 2, ante comma autem per 4 multiplicetur, ea cum restrictione, ut a dextra incipiendo usque ad terminum, qui post comma est, translatio duodecadum fiat, in termino post comma ad dextram autem numerus senariorum addatur termino, qui e multiplicatione per 4 termini ante comma prodit. Si vero soliditas quæratur: factum, quod e duobus factoribus prodit, ante multiplicationem per 4 ante comma et post comma per 2, per tertium factorem eodem modo ut dictum est, (iuxta systema duodecadicum) multiplicetur; et factum plane ut antea tractetur, eo tantum discrimine, quod termini post comma per 4, et terminus ante comma per 8 multiplicentur.

Nempe una pertica quadrata continet 4 hexapedes quadratas, et una

Hosted by Google

pertica cubica 8 hexapedas cubicas continet: atque hinc pars duodecima perticæ quadratæ est æqualis tertiæ parti hexapedæ quadratæ, adeoque 2 pedibus sensu dicto; ita duodecimæ duodecima 2 pollices facit, quod porro continuari patet; quivis igitur terminus facti e duobus factoribus prodeuntis post comma per 2 ante comma per 4 multiplicandus est; at quum 6 pedes sensu dicto hexapedam quadratam faciant, numerus senariorum termino ante comma per 4 multiplicato additur. Duodecima scilicet perticæ quadratæ

$$= \frac{4^\circ}{12} = \frac{1^\circ}{3} = \frac{6'}{3} = 2',$$

et huius duodecima

$$= \frac{2'}{12} = \frac{2 \,.\, 12''}{12} = 2'' \text{ ℭ}.$$

Et perticæ cubicæ duodecima

$$= \frac{8^\circ}{12} = \frac{4^\circ}{6} = 4 \cdot \frac{1^\circ}{6}.$$

Exemplis tamen sequentibus etiam illustrare haud supervacuum erit; notando, quod non solum ut dictum est, termini singuli, etsi novenarium excedant, decadice scribantur, et termini quivis decadice multiplicentur, sed etiam divisio per 12 decadice peragatur; quod omnino facile fit, quum duplum, triplum, ... usque ad nontuplum ipsius 12 memoria facile retineatur.

Sint areæ alicuius dimensiones per se invicem multiplicandæ $6^\circ\ 2'\ 7''$ et $8^\circ\ 1'\ 8''$, et sint soliditatis dimensiones $6^\circ\ 2'$, $8^\circ\ 5'$ et $4^\circ\ 2'$; fiet

		3,	2	7
		4,	1	8
0,	2	1	8	8
0,	3	2	7	
12,	10	4		
13,	3	8	3	8
4				2
53°	$1'$	$4''$	$7'''$	$4''''$

		3,	2
		4,	5
	1,	3	10
	12,	8	
	13,	11	10
	2,	2	
2,	3	11	8
27,	11	8	
30,	3	7	8
8			4
242°	$2'$	$6''$	$8'''$

Hosted by Google

Sit etiam exemplum pro divisione per 12, nonnisi usque ad locum commatis extendenda. Sit una dimensio 303° 5′, altera 3° 4′

	151,	11
	1,	10
126,	7	2
151,	11	
278,	6	2
4		2
1114°	0′	4″

Scholion 3. Si duo prismata P et p fuerint, et prioris altitudo A basis B, posterioris altitudo a basis b fuerit: erit

$$P = AB \quad \text{et} \quad p = ab;$$

adeoque

$$P : p = AB : ab,$$

atque si $P = p$, erit

$$A : a = b : B,$$

et si $A = a$, erit

$$P : p = B : b,$$

et si $B = b$, erit

$$P : p = A : a.$$

Eritque, si $A = a$ et bases similes atque L et l lineæ homologæ sint,

$$P : p = L^3 : l^3.$$

Idem ad pyramidem applicari evidens est.

Scholion 4. Transmutari quoque corpus quodpiam in aliud potest; si ex. gr. sphæra diametri d in pyramidem altitudinis a baseos x mutanda sit: erit

$$\frac{d^3\pi}{6} = \frac{xa}{3};$$

atque hinc

$$x = \frac{d^3\pi}{2a}.$$

Atque basis x computata, item sive in circulum sive in aliam figuram converti potest. Nec his amplius immorari necesse est; quum perspectis iis, quæ dicta sunt, Tyrones ipsi omissa reperire queant.

Hosted by Google

·3124.

De hoc in Tomo primo dicta sufficiant.

·313.

Si planum cum superficierum relatarum aliqua punctum commune habeat: oriuntur *sectiones coni*, *cylindri*, *sphaerae* &.

§. 1.

Si planum quamvis infinitum apicem solum cum superficie coni commune habeat, sectio punctum est; si adhuc unum commune habeat, sectionem aut duæ rectæ se invicem in apice coni secantes efficient, aut sectio latus coni erit. Si planum secans basi parallelum fuerit, erit sectio figura basi similis, orieturque *conus truncatus rectus circularis*, si conus rectus et basis circulus fuerit: quæ omnia facile patent.

Si (Fig. 231.) cylinder rectus basi B parallele secetur, sectio $b = B$ erit; atque si per planum ad angulum u secetur, erit $F = G$ (tam quoad superficiem quam quoad soliditatem); adeoque etiam $E + F$ innotescit, quum F sit $= \frac{F+G}{2}$, adeoque

$$E + F = B\alpha + B\frac{\beta}{2} = \frac{2B\alpha + B\beta}{2} = B\frac{A+\alpha}{2};$$

·3124. Sectionum coni cum plano statim sequentium revolutiones pariunt *paraboloidem*, *ellipsoidem* et *hyperboloidem*.

·313. Motus plani circa axem, punctum aliquod formæ cuiuspiam earum, quæ prodierunt, complectentem.

·3131. Si coni verticales fuerint, oriuntur *sectiones conicae*.

·3132. Forma secta etiam Cylinder aut

·3133. Pyramis vel

·3134. Prisma esse potest.

·3135. Si forma hæc *sphaera* fuerit, et

·31351. Plana per centrum eant: oritur in superficie sphæræ *triangulum sphaericum*; quæ e datis sufficientibus computare docet *Trigonometrica sphaerica*.

Hosted by Google

ubi si de soliditate sermo fuerit, area ipsius B, si superficies quæratur, peripheria accipienda est.

§. 2.

Coni truncati, nempe partis coni recti inter basim et planum basi parallelum, *superficies* exclusis basibus est *lateri per peripheriam illam multiplicatae* æqualis, *quae cum perpendiculari e medio lateris ad axem missa tanquam radio describitur*. Sit nempe (Fig. 232.) rete coni truncati abed, et coni totius sit pde, atque latus coni truncati sit ad, et eius medium c; erit radiis r et r' descriptis circulis, area annuli (pag. 108)

$$= (r^2 - r'^2)\pi = (r + r')(r - r')\pi =$$
$$= (r - r')\left(\frac{r + r'}{2}\right)2\pi = (r - r').\left(r' + \frac{r - r'}{2}\right)2\pi.$$

Est vero $r - r'$ latus coni truncati, $r' + \frac{r - r'}{2}$ vero est pc, quod per 2π multiplicatum dat peripheriam radii pc.

Hinc idem de sectore patet; si nempe is n-ta pars totius fuerit, erit et pars annuli in sectore pars n-ta annuli totius. Unde res in aperto est.

§. 3.

Soliditas coni per planum basi parallelum *truncati* e basibus et altitudine prodit sic. Sit (Fig. 233.) data *basis inferior* B, *superior* b; atque a *altitudo coni truncati*. Sit coni superius absecti altitudo x. Erit

$$B : b = (a + x)^2 : x^2.$$

Hinc autem est

$$Bx^2 = b(a + x)^2,$$

et hinc

$$x^2 - \frac{2abx}{B - b} - \frac{a^2 b}{B - b} = 0,$$

adeoque

$$x = \frac{ab}{B - b} + \sqrt{\frac{a^2 b^2}{(B - b)^2} + \frac{a^2 b}{B - b}} =$$
$$= \frac{ab + a\sqrt{b^2 + b(B - b)}}{B - b} = \frac{a(b + \sqrt{Bb})}{B - b}.$$

Hosted by Google

Itaque

$$a + x = \frac{Ba - ba + ab + a\sqrt{Bb}}{B - b} = \frac{a(B + \sqrt{Bb})}{B - b}.$$

Est vero conus truncatus æqualis residuo coni totius, subtracto superiore, adeoque fit

$$= \frac{B(a + x)}{3} - \frac{bx}{3} = \frac{a(B + \sqrt{Bb})B - a(b + \sqrt{Bb})b}{3(B - b)} =$$

$$= \frac{a(B^2 - b^2 + \sqrt{Bb}(B - b))}{3(B - b)} = \frac{a(B + b + \sqrt{Bb})}{3}.$$

Et posterius ad conum obliquum etiam, imo et pyramidem quamvis etiam obliquam, dummodo sectio per planum basi parallelum fiat, applicari, atque de quavis pyramide valere evidens est.

Scholion 1. Si vero l latus lineare pyramidis modo dicto truncatæ (Fig. 234.), atque β et β' sectiones basium cum plano per apicem factæ data fuerint: reperietur L latus pyramidis completæ ex

$$\beta : \beta' = l + x : x;$$

est enim

$$\beta x = \beta' l + \beta' x,$$

et hinc

$$x = \frac{\beta' l}{\beta - \beta'},$$

adeoque

$$L = l + x = \frac{\beta l}{\beta - \beta'},$$

quod et de cono valet.

Scholion 2. Notandum etiam est, quod

1. pyramidis truncatæ, si basis figura regularis, et recta per centra basium ad eas perpendicularis fuerit, superficies (præter bases) sit summa trapeziorum æqualium; adeoque unus factor altitudo trapezii, alter autem sit perimeter sectionis plani ad basim per lateris linearis meditullium paralleli.

2. In prismate vero qualecunque fuerit, perimeter sectionis plani ad latus lineare perpendicularis multiplicatur per latus lineare, ut super-

Hosted by Google

ficies (præter bases) prodeat: nam si prisma iuxta rectam $\mathfrak{Aa}$ exstructum sit, in quovis parallelogrammo latus lineare $= \mathfrak{Aa}$ pro basi accipi potest, et altitudo erit sectio parallelogrammi cum plano ad $\mathfrak{Aa}$ perpendiculari. Idem de cylindro obliquo etiam valere patet.

Scholion 3. Si omnia dolia similia conficerentur, tum nonnisi certa dimensio dolii certæ quantitatis nota esse deberet, ut cuiusvis alius dolii dimensione homologa cum priore comparata, vasis posterioris quantitas innotescat: si ex. gr. prioris dolii quantitas q, dimensio certa d, et posterioris quantitas Q, dimensio D esset, fieret

$$d^3 : D^3 = q : Q.$$

Manifesto autem et alia dimensio tentanda est, ut eo certius fiat idem pluribus modis comprobatum.

Quum vero hoc non sit: potest dolium ordinatis e linea per supremum eius punctum horizontali demissis, in conos truncatos quantumvis proxime dividi; et sive constructione sive calculo, tam plenum quam usque ad planum certum horizontale repletum, computari; ratione etiam crassitudinis ligni habita, quæ si non eadem ubique sit, errorem aliquem inducit. (Fig. 235.)

Coni truncati, cuius bases segmenta sunt, in casu si dolia plena non fuerint, soliditates (per pag. 261) innotescunt; nempe bases per plana verticalia liquidum secantia efformantur; et fiunt pyramides truncatæ, e basibus earumque distantia eodem modo computandæ.

Scholion 4. Sit (Fig. 236.) $\mathfrak{ab}$ latus polygoni regularis n laterum ex $\mathfrak{q}$ incipientis, radius r quadrantis $\mathfrak{qac}$, et $\mathfrak{dD}$ sit perpendicularis e chordæ $\mathfrak{ab}$ meditullio ad radium $\mathfrak{qC}$, et $\mathfrak{aA}$, $\mathfrak{bB}$ pariter sint ad radium $\mathfrak{qC}$ perpendiculares, et $\mathfrak{ap}$ perpendicularis ad $\mathfrak{bB}$. Fient triangula $\mathfrak{CDd}$ et $\mathfrak{abp}$ (pag. 69) similia (propter latera reciproce perpendicularia), adeoque $u' = u$; itaque

$$\mathfrak{Cd} : \mathfrak{dD} = \mathfrak{ab} : \mathfrak{ap},$$

et hinc

$$\mathfrak{Cd} . \mathfrak{ap} = \mathfrak{dD} . \mathfrak{ab} \quad \text{et} \quad 2\pi \mathfrak{Cd} . \mathfrak{AB} = 2\pi \mathfrak{dD} . \mathfrak{ab}.$$

Sed revoluto schemate circa $\mathfrak{AC}$, posterius est superficies coni truncati

Hosted by Google

(exclusis basibus), cuius latus $\mathfrak{ab}$ et altitudo $\mathfrak{ap} = \mathfrak{AB}$ est; prius autem nempe $2\pi\mathfrak{Cd}.\mathfrak{AB}$ est superficies cylindri (exclusis basibus), cuius altitudo $\mathfrak{AB}$, radius peripheriæ baseos autem $\mathfrak{Cd}$ est. Atque pro quovis alio polygoni latere pariter superficies coni truncati, per chordam descripti, erit superficiei cylindri eius æqualis, cuius altitudo est pars radii $\mathfrak{qC}$ inter perpendiculares ad eum ab extremitatibus lateris missas, basis vero est æqualis circulo, cuius radius æqualis perpendiculari e centro ad chordam missa, nempe $\mathfrak{Cd} \perp \mathfrak{ab}$, quia $\mathfrak{d}$ meditullium chordæ est. Dicatur hæc nomine generali r'; est nempe perpendicularis e centro ad quodvis latus polygoni regularis eiusdem æqualis.

Summa superficierum conorum truncatorum dicatur s'. Si n semper duplicetur, atque uti chordæ se invicem a $\mathfrak{b}$ usque ad $\mathfrak{a}$ excipiunt, coni truncati per revolutionem schematis generati accipiantur: erit $s' = 2\pi r'.\mathfrak{AB}$; quod manifesto $\backsim 2\pi r.\mathfrak{AB}$, quia $r' \backsim r$. Consequenter *superficies zonae aequatur peripheriae circuli maximi per altitudinem zonae multiplicatae.*

Et si hoc ad totum quadrantem extendatur, fiet superficies hemisphærii peripheriæ circuli maximi per radium multiplicatæ æqualis: scilicet erit $= 2\pi r.r$, et totius sphæræ superficies $= 4r^2\pi$ (ut antea).

Scholion 5. Per latus ultimum ad $\mathfrak{q}$ quidem non conus truncatus, sed conus apice ad $\mathfrak{q}$ gaudens describitur; at coni recti quoque superficies (exclusa basi) æquatur lateri per peripheriam illam multiplicato, quæ per perpendicularem e meditullio lateris ad axem missam describitur; sit enim latus coni adeoque radius sectoris rete superficiei præbentis r, et arcus ad imum radii sit a; erit e medio ipsius r arcus $= \frac{a}{2}$, et area sectoris

$$= \frac{r}{2} \cdot a = \frac{a}{2} \cdot r.$$

Unde patet et segmentum sphæræ e $\mathfrak{q}$ incipiendo esse peripheriæ circuli maximi per altitudinem multiplicatæ æquale.

Scholion 6. Et superficies coni truncati limes trapeziorum est, quæ, a certo latere coni incipiendo basibus inscribendo polygona regularia totidem laterum, oriuntur, et quodvis trapeziorum horum in duo trian-

Hosted by Google

gula apices in superficie habentia dispesci potest; atque limitem summæ triangulorum per superficiem curvam intelligi dictum est, sicubi cum plano ut *quantitas respectiva* comparatur (Tom. I. pag. 299).

Scholion 7. *Appendicis Auctor* (*Geometra acutissimus*), in opusculo singulari attentione digno (nec ratione voluminis æstimando), non solum independentem ab axiomate XI Euclideo Geometriam sagacitate summa docuit primus, sed ab eodem independenter Trigonometriam sphæricam stabilivit, imo etiam superficies sphæricas esse ut secundæ diametrorum potentiæ; atque superficiei sphæræ quantitatem deduxit.

§. 4.

Sectiones coni autem (ut pag. 152 dictum est) *lineas secundi ordinis esse*, et quidem si planum secans P lateri coni parallelum fuerit, *parabolam*, si P e situ parallelo versus latus dictum moveatur, *ellipsim*, si retrorsum moveatur, *hyperbolam in cono verticali utroque*, et quidem e duabus curvis æqualibus (in duobus conis verticalibus) constantem, esse sic patet. Sit (Fig. 237.) planum tabulæ T planum per axem conorum verticalium, quorum anguli verticales n sint; sitque planum P prius parallelum coni lateri $\mathfrak{AB}$, et perpendiculare ad planum tabulæ, sitque $\mathfrak{AP}$ cum hoc sectio ipsius P; fiatque planum p perpendiculare ad axem per $\mathfrak{P}$, sitque sectio $\mathfrak{BC}$ ipsius p cum plano tabulæ; erit sectio ipsius p cum superficie coni supra planum tabulæ semicirculus, in quo perpendicularis ex $\mathfrak{P}$ ad $\mathfrak{BC}$ dicatur y, cui correspondens $\mathfrak{AP}$ dicatur x; nempe in recta $\mathfrak{AP}$ poterit $\mathfrak{P}$ ubivis sumi, et dicenda ubique valebunt; erit manifesto y perpendicularis ad planum tabulæ adeoque ad x. Sit circuli radius r; $\triangle\mathfrak{ABC}$ æquicrurum est, adeoque anguli v ad basim sunt æquales, et

$$v = \frac{2R - n}{2} = R - \frac{1}{2} n,$$

et hinc

$$\sin. v = \cos. \frac{1}{2} n.$$

Porro in triangulo $\mathfrak{APC}$ est

Hosted by Google

$$x : 2r - z = \sin. v : \sin. n = \cos. \frac{1}{2} n : \sin. n.$$

Et hinc

$$2r - z = \frac{x \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n}.$$

Et si ex $\mathfrak{A}$ ipsi $\mathfrak{BC}$ parallela $\mathfrak{Ab}'$ fiat, erit

$$c : z = \sin. v : \sin. n = \cos. \frac{1}{2} n : \sin. n;$$

adeoque

$$z = \frac{c \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n}.$$

Est autem in semicirculo

$$y^2 = (2r - z) z;$$

consequenter substitutis valoribus ipsorum $2r - z$ et z, erit

$$y^2 = \frac{x \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n} \cdot \frac{c \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n} = \frac{cx \sin.^2 n}{\cos.^2 \frac{1}{2} n}.$$

Et hæc æquatio parabolæ pro parametro

$$\frac{c \sin.^2 n}{\cos.^2 \frac{1}{2} n}$$

est; atque parabola cuiusvis parametri q prodit, si

$$c = \frac{q \cos.^2 \frac{1}{2} n}{\sin.^2 n}$$

accipiatur; nempe is valor ipsius c accipi potest, proditque ex

$$q = \frac{c \sin.^2 n}{\cos.^2 \frac{1}{2} n}$$

posito.

Hosted by Google

Sit (Fig. 237*.) $\angle m > n$, et sit $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}$ nunc abscissa x ex $\mathfrak{A}'$ incipiens (ut prius ex $\mathfrak{A}$ erat). Erit tum

$$z = z + k - k;$$

est vero

$$z + k = \frac{c \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n} \quad \text{et} \quad k = \frac{x \sin. (m - n)}{\cos. \frac{1}{2} n};$$

nam in triangulo $\mathfrak{A}\mathfrak{P}\mathfrak{A}'$ externus

$$m = n + m - n,$$

et in triangulo $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}\mathfrak{P}$ est

$$x : k = \sin. u : \sin. (m - n) = \sin. v : \sin. (m - n),$$

(quia angulus deinceps ipsius u est $= v$). Unde

$$k = \frac{x \sin. (m - n)}{\sin. v} = \frac{x \sin. (m - n)}{\cos. \frac{1}{2} n}.$$

Atque hinc substitutis valoribus ipsorum $z + k$ et k, erit

$$z = z + k - k = \frac{c \sin. n - x \sin. (m - n)}{\cos. \frac{1}{2} n}.$$

Porro in triangulo $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ est

$$2r - z : x = \sin. m : \sin. v = \sin. m : \cos. \frac{1}{2} n,$$

adeoque

$$2r - z = \frac{x \sin. m}{\cos. \frac{1}{2} n}.$$

Atque hinc

$$y^2 = z(2r - z) = \frac{c \sin. n - x \sin. (m - n)}{\cos. \frac{1}{2} n} \cdot \frac{x \sin. m}{\cos. \frac{1}{2} n}$$

$$= \frac{xc \sin. n \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n} - \frac{x^2 \sin. (m - n) \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n};$$

quæ pro axe maiore

Hosted by Google

$$a = \frac{c \sin. n}{\sin. (m - n)}$$

et parametro

$$\beta = \frac{c \sin. n \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n}$$

aequatio ellipseos est.

Nempe ex

$$\frac{\beta}{a} = \frac{c \sin. n \sin. m}{a \cos.^2 \frac{1}{2} n} = \frac{\sin. (m - n) \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n}$$

sequitur

$$a = \frac{c \sin. n}{\sin. (m - n)} \quad \text{atque} \quad c = \frac{a \sin. (m - n)}{\sin. n}.$$

Si $\mathfrak{a}'\mathfrak{q} \parallel \mathfrak{f}\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' \parallel \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, atque $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ sit x, et $m < n$ sit (Fig. 237 supra $\mathfrak{f}$), et planum p antea ad T in $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ perpendiculariter insistens nu ipsi T in $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ insistat perpendiculariter: erit tum

$$z = h + k \quad \text{atque} \quad c : h = \sin. v : \sin. n,$$

adeoque

$$h = \frac{c \sin. n}{\sin. v} = \frac{c \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n};$$

porro in triangulo $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ est $\angle \mathfrak{p}\mathfrak{a}'\mathfrak{q} = n - m$, quia $\angle \mathfrak{c}\mathfrak{a}'\mathfrak{q} = n$ (propt $\mathfrak{a}'\mathfrak{q} \parallel \mathfrak{f}\mathfrak{b}$); atque est

$$x : k = \sin. v : \sin. (n - m);$$

adeoque

$$k = \frac{x \sin. (n - m)}{\sin. v} = \frac{x \sin. (n - m)}{\cos. \frac{1}{2} n}.$$

Porro in triangulo $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}\mathfrak{c}$ est

$$2r - z : x = \sin. m : \sin. v,$$

atque hinc

$$2r - z = \frac{x \sin. m}{\sin. v} = \frac{x \sin. m}{\cos. \frac{1}{2} n}.$$

Consequenter (ut antea)

Hosted by Google

$$y^2 = z(2r - z) = (h + k)(2r - z)$$
$$= \left(\frac{c \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n} + \frac{x \sin. (n - m)}{\cos. \frac{1}{2} n}\right) \frac{x \sin. m}{\cos. \frac{1}{2} n} =$$
$$= \frac{c \sin. n \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n} x + \frac{\sin. (n - m) \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n} x^2;$$

quæ *aequatio hyperbolae* est pro parametro

$$\gamma = \frac{c \sin. n \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n},$$

et axe primo

$$a = \frac{c \sin. n}{\sin. (n - m)}.$$

Nempe ex

$$\gamma = \frac{c \sin. n \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n},$$

simul coefficientem ipsius x ipsi $\frac{\gamma}{a}$ ponendo æqualem, erit

$$\frac{\sin. (n - m) \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n} = \frac{c \sin. n \sin. m}{a \cos.^2 \frac{1}{2} n};$$

atque hinc

$$\sin. (n - m) = \frac{c \sin. n}{a},$$

et

$$c = \frac{a \sin. (n - m)}{\sin. n} \quad \text{et} \quad a = \frac{c \sin. n}{\sin. (n - m)}.$$

§. 5.

Estque sectio in cono verticali facta priori æqualis.

Denotentur enim (abhinc usque ad pag. 273) sinus angulorum per nomina angulorum accento insignita; ex. gr. sin. n denotetur per n', et $(n - m)'$ denotet sinum anguli $(n - m)$, ita v' erit $= \sin. v = \cos. \frac{1}{2} n$.

Hosted by Google

Si iam (Fig. 238.) in cono superiore sectio per $\mathfrak{Dp}$, in inferiore autem continuatio eius per $\mathfrak{DP}$ fuerit, dicanturque M anguli verticales ad $\mathfrak{D}$: erit

$$c : C = M' : m' = (n - m)' : m',$$

(nempe $M = n - m$); itaque

$$C = \frac{cm'}{(n - m)'}.$$

Est vero (ut in præcedentibus)

$$y^2 = \frac{Cn'M'x + (n - M)'M'x^2}{v'^2},$$

quia $n > M$, (nempe externus interno opposito maior). Substituendo autem valores ipsorum C et M, fit

$$y^2 = \frac{cm'.n'.(n - m)'x}{(n - m)'v'^2} + \frac{m'(n - m)'x^2}{v'^2} = \frac{cm'n'x}{v'^2} + \frac{m'(n - m)'x^2}{v'^2},$$

uti in §. 4.

Scholion 1. Sit (Fig. 239. I.) cuiusvis rectæ datæ $\mathfrak{DB}$ meditullium $\mathfrak{C}$, sitque ad angulum quemvis u recto minorem recta $\mathfrak{Cf}$; ducanturque e quovis rectæ $\mathfrak{Cf}$ puncto $\mathfrak{f}$ rectæ $\mathfrak{fD}$, $\mathfrak{fB}$; in triangulis $\mathfrak{DCf}$ et $\mathfrak{BCf}$ est latus $\mathfrak{fC} = \mathfrak{fC}$, latus $\mathfrak{CD} = \mathfrak{CB}$, angulus interceptus u autem est altero intercepto deinceps posito minor, quia u (per hypothesim) acutus est; itaque $\mathfrak{fB} < \mathfrak{fD}$ est. Fiat $\mathfrak{fE} = \mathfrak{fD}$, et $\mathfrak{DE}$ dicatur A; atque translato schemate (in Fig. 239. II.), et tabulæ plano C dicto, erigatur ex A planum B ad C perpendiculare, fiatque in B ad axem A pro parametro $Q = \frac{Av'^2}{m'\omega'}$ ellipsis; erit recta e meditullio ipsius A ad $\mathfrak{f}$ ducta perpendicularis ad B, et simul axis coni recti per complexum rectarum ex omnibus ellipseos punctis ad apicem $\mathfrak{f}$ ductis efformati; eritque sectio huius coni, per planum P (ex $D = \mathfrak{DB}$) ad C perpendiculare facta, circulus diametri D; atque coni ex apice $\mathfrak{f}$ huic circulo insistentis axis (nempe recta ex apice $\mathfrak{f}$ ad $\mathfrak{C}$ centrum circuli) efficiet cum plano circuli tanquam basi angulum u; est enim basis hæc in plano P, et C planum tabulæ, in quod axis dictus cadit, ad P perpendiculariter positum est, quia P ad C (per hypothesim) perpendiculare est.

Hosted by Google

Nam moveatur planum ex B sursum ipsi A parallele; quocunque venerit, ex. gr. in planum b ad C ex $\mathfrak{de}$ perpendiculare, sectio eius cum cono erit ellipsis inferiori similis. Ellipseos huius axis (per $\mathfrak{de}$ repræsentatus) dicatur generaliter a, et parameter eius dicatur q, sitque $\mathfrak{Bp}$ abscissa x; et quæratur y nempe sectio plani P cum ellipsi, in qua planum b conum secat; est y tam ad D quam ad a nempe ad $\mathfrak{de}$ perpendicularis, quia sectio duorum planorum P et b ad tertium C perpendicularium est.

Eritque $A:a = Q:q$ (pag. 161), adeoque

$$q = \frac{aQ}{A}.$$

Estque

$$a = z + a - z = \frac{cn' - x\omega' + xm'}{v'};$$

quia et hic (ut pag. 267)

$$z = \frac{cn' - x\omega'}{v'} \quad \text{et} \quad a - z = \frac{xm'}{v'},$$

nimirum

$$v' = \cos.\frac{1}{2}n \quad \text{et} \quad \omega' = (m-n)'.$$

Est igitur

$$q = \frac{cn' - x\omega' + xm'}{v'} \cdot \frac{Q}{A} \quad \text{et} \quad y^2 = qz - \frac{qz^2}{a};$$

et hoc (substituendo valores ipsorum z et q) fiet

$$= \frac{cn' - x\omega'}{v'} \cdot \frac{cn' - x\omega' + xm'}{v'} \cdot \frac{Q}{A} - \left(\frac{cn' - x\omega'}{v'}\right)^2 \cdot \frac{Q}{A} =$$
$$= \frac{Qcm'n'x}{Av'^2} - \frac{Q\omega'm'x^2}{Av'^2},$$

(nempe $\frac{Q}{A} = \frac{q}{a}$). Substituendo autem valorem supra dictum ipsius Q, fit

$$y^2 = \frac{Av'^2 cm'n'x}{m'\omega'Av'^2} - \frac{Av'^2\omega'm'x^2}{m'\omega'Av'^2} = \frac{cn'}{\omega'}x - x^2 = Dx - x^2 = x(D-x);$$

nam

$$D = \frac{cn'}{\omega'},$$

quia in triangulo $\mathfrak{f}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ est

$$D : c = n' : \omega'.$$

Scholion 2. Sit pariter (Fig. 239. III.) in plano C rectangulum $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{D}$, et ducatur recta $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ ad quemvis angulum acutum u; fiantque (ut antea) planum B ex $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$, et planum b ex $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$, et planum P ex $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$, ad C perpendicularia; fiatque in B ad axem a pro parametro $q = \frac{D}{u'}$ ellipsis, et fiat ad hanc ellipsim tanquam basim cylinder rectus; erit sectio per planum b facta ellipsis basi æqualis, manentque q et a eadem. Eritque $z : x = u' : 1$, adeoque $z = xu'$, et $D : a = 1 : u'$, adeoque $a = Du'$; atque (per y sectionem planorum P et b in cylindri superficie terminatam intelligendo) fit

$$y^2 = qz - \frac{qz^2}{a} = \frac{Dxu'}{u'} - \left(\frac{D}{u'} : Du'\right) x^2 u'^2 =$$

$$= Dx - \frac{Dx^2 u'^2}{u' Du'} = Dx - x^2 = x(D - x);$$

itaque cylinder superior circulo diametri D ad datum angulum u insistet.

Scholion 3. Sit (Fig. 239. IV.) $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ diameter baseos circularis coni obliqui, sitque $\mathfrak{f}\mathfrak{E}$ latus brevissimum, adeoque $u < v$. Ponantur (ut antea) ad C perpendiculariter planum P ex $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$, et planum b per $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ ad basim parallelum; erit sectio coni per b circulus diametri $\mathfrak{d}\mathfrak{e} = \delta$; et

$$z + k : c = n' : u',$$

atque

$$k : x = (m - n)' : u' = \lambda' : u',$$

adeoque

$$z + k - k = \frac{cn' - x\lambda'}{u'} = z;$$

et

$$\delta - z = \frac{xm'}{v'},$$

quia

$$\mathfrak{p}\mathfrak{e} : \mathfrak{p}\mathfrak{B} = m' : v'.$$

Atque hinc

$$y^2 = z(\delta - z) = \frac{cn' - x\lambda'}{u'} \cdot \frac{xm'}{v'} = \frac{cn'm'x}{u'v'} - \frac{\lambda' m' x^2}{u'v'}.$$

Hosted by Google

Pro circulo

$$\frac{cn'm'}{u'v'} = D = \frac{cn'}{\lambda'} \quad \text{et} \quad \frac{m'\lambda'}{u'v'} = 1,$$

(nempe $c : D = \lambda' : n'$), adeoque $m'\lambda' = u'v'$ esset. Sed hoc fieri nequit: quia tum esset

$$m' : v' = u' : \lambda',$$

atque quum in triangulo $\mathfrak{pBe}$ sit

$$m' : v' = \mathfrak{pe} : \mathfrak{pB}$$

et in triangulo $\mathfrak{Dpd}$

$$u' : \lambda' = \mathfrak{Dp} : \mathfrak{dp}$$

quia $u' = \omega'$), esset

$$\mathfrak{pe} : \mathfrak{pB} = \mathfrak{Dp} : \mathfrak{dp},$$

et triangula $\mathfrak{Bpe}$ et $\mathfrak{dpD}$ (per duo latera cum angulo intercepto æquali proportionalia) similia fierent, et $\lambda = v$ ac $\omega = m$. Sed u (externus) $> \lambda$; consequenter $u > v$ esset, quamvis $u < v$ sit.

At (Fig. 239. V.) pro $\angle \mathfrak{fKG} = v$, circulus fit; nam

$$y^2 = \frac{cm'n'x}{u'v'} - \frac{\lambda'm'x^2}{u'v'} \quad \text{et} \quad D = \frac{cn'}{\lambda'},$$

sed

$$m' = v', \; u = 2R - v - n = \lambda, \quad \frac{cn'm'}{u'v'} = \frac{cn'}{\lambda'} = D, \quad \frac{\lambda'm'}{u'v'} = 1.$$

Scholion 4. Pariter prodit cylindri circulo oblique insistentis sectio (Fig. 239. VI.): nempe fit

$$y^2 = \frac{a\omega'x}{v'} - \frac{\omega'^2x^2}{v'^2};$$

ubi ut $\frac{a\omega'}{v'} = D$, $\left(\text{quod} = \frac{av'}{\omega'}\right)$, et $\frac{\omega'^2}{v'^2} = 1$ fiat, $v' = \omega'$ esse deberet; sed $u + v = 2R$, hinc $v + \omega < 2R$, et v, ω non gaudent sinu eodem.

In omnibus his autem pro K et k positivis fiet

$$y^2 = kx - Kx^2,$$

quæ æquatio ellipseos erit; nempe ex $K = \frac{k}{a}$ erit $a = \frac{k}{K}$, atque

$$y^2 = kx - \frac{k}{a}x^2.$$

Hosted by Google

ubi k parameter et $\frac{k}{K}$ axis maior est. Unde reliqui casus etiam (tam pro $m = n$, quam pro $m < n$) sectionis coni (et pariter cylindri) obliqui patent; omissisque aliis huius generis, sequitur in numero

·3135·

§. 1.

Sphaerae cum plano sectio aut *punctum*, aut *circulus* est, qui si per centrum transierit, *maximus* audit, quum omnes alii minores sint; pars sphæræ per planum absecta *segmentum*, et pars sphæræ inter duo plana parallela *zona* dicitur.

Nempe quodcunque planum secuerit sphæram, perpendicularis e centro ad illud missa aut in superficiem sphæræ cadet, aut intra eam; extus enim cadere nequit, quia quævis alia recta e centro ad planum idem dicta perpendiculari adeoque et radio maior est; itaque nullum plani punctum cum sphæra commune esset. Si vero extremitas perpendicularis dictæ in superficiem cadat, nullum aliud punctum erit plano sphæræque commune, quia quævis alia recta e centro ad planum excedit radium. Atque si perpendicularis intra sphæram terminetur, erit hæc ad omnes rectas ex eo puncto in plano secante perpendicularis, quæ singulæ exibunt per sphæram, efformabuntque omnia triangula rectangula æqualia; quia cathetus e centro omnibus communis, et hypotenusa radius est; atque manifesto sectio erit via catheti alterius, moto triangulo rectangulo circa cathetum priorem. Neque præter circulum hunc planum cum sphæra quidquam commune habet; superficies sphæræ enim via semicirculi circa diametrum est, et si in motu trianguli rectanguli plane dicto semicirculus moveatur, perpendicularis e quovis semicirculi puncto ad axem motus aliud planum describet, eruntque quævis plana parallela, adeoque nihil commune habentia.

Hosted by Google

§. 2.

Est quoque manifesto centrum sphæræ in perpendiculari e centro circuli in superficie sphæræ siti, ad planum huius erecta; atque *duarum talium perpendicularium sectio centrum est.*

§. 3.

Et facile de sphæris quoque patet, (uti de circulis in eodem plano, si sectionis sphærarum circularis, sectio duorum punctorum in circulis, vicem subeat), quod si sphærarum S et s centra sint $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{c}$, radii R et r, atque distantia centrorum d sit: pro casu si $\mathfrak{c}$ extra S cadat, sphæræ nil commune habeant, si $d > R + r$; si vero $d = R + r$, punctum solum commune utrique sit; et si $d < R + r$ fuerit, sectio circulus sit; pro $\mathfrak{c}$ in superficiem sphæræ S aut intus cadente autem sectio nulla sit, si $r > R + d$ aut $r < R - d$, sectio punctum sit, si $r = R \pm d$, et sectio circulus sit, si $r < R + d$, et r non $=$ nec $< R - d$ fuerit. Percurrendo singulos casus Tyrones ipsi e sola (Fig. 240.) inspectione rem in plano quoad circulos facile perspicere possunt.

Et tum quoad sphæras S et s quoque concludi potest, plano per centra $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{c}$ adeoque rectam $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{c}}$, in quam diameter utriusque cadit, posito, atque in hoc tam centro $\mathfrak{C}$ radio R quam centro $\mathfrak{c}$ radio r circulis descriptis. Sint nimirum circuli hi C et c; atque revolvatur schema e circulis C et c compositum circa $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$; generabuntur manifesto sphæræ S et s; quæ, si C et c nihil commune habuerint, pariter nihil commune habebunt, si autem C et c tetigerint se invicem, et sphæræ tangent se invicem, tangenturque a plano per viam rectæ ad diametrum e puncto tactus perpendicularis descriptum; si vero C et c in duobus punctis $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{p}$ secuerint se invicem, orientur duo triangula æquicrura $\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{c}\mathfrak{P}\mathfrak{p}$, adeoque si meditullium rectæ $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ sit $\mathfrak{m}$, erit tam $\mathfrak{C}\mathfrak{m}$ quam $\mathfrak{c}\mathfrak{m}$ perpendicularis ad $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$, itaque $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ erit, et in motu dicto per rectam $\mathfrak{P}\mathfrak{m}$ ad $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ perpendicularem describetur planum, et per punctum circulus in plano eodem sphæræ utrique communis.

Hosted by Google

·31351.

§. 1.

Si planum P per centrum eat, fit *circulus*, *quem maximum* esse inde patet, quod si e centro huius circuli C dicti, ad planum P perpendicularis L erigatur, et planum tale ponatur, in quod perpendicularis dicta incidit: secet hoc sphæram in circulo C'; huius revolutio circa L eandem sphæram parit; patetque, quod si radius circuli C' sit r', circuli per quodvis aliud peripheriæ C' punctum descripti radius versus polum propiorem semper descrescat; nempe circuli cuiusvis in hoc motu descripti radius est sinus arcus a polo usque ad punctum peripheriam describens. Quicunque autem circulus c in superficie sphæræ sit, alicui per puncta ipsius C' descriptorum æqualis est; nam c in plano est, et si e centro sphæræ perpendicularis ad planum hoc demittatur, hæc in centrum circuli c cadet; unde antea dictis applicatis patet.

§. 2.

Quilibet duo circuli maximi secant se invicem in duobus punctis, et quidem bisecant (pag. 41); atque duo illa sectionis puncta cum centro in eadem recta sunt.

§. 3.

Quomodo autem fiat angulus duorum circulorum maximorum quantitas respectiva, quæ in comparatione arithmetica semper intelligi debet, dictum (pag. 41) est: nempe angulus planorum, in quæ circuli illi cadunt, intelligitur, atque huius quantitas est arcus circuli maximi inter extremitates quadrantum e sectione circulorum illorum, de quorum angulo sermo est, acceptorum.

Hosted by Google

§. 4.

Demonstratum etiam est:

1. Circuli maximi *a* et *b* ad tertium *c* perpendiculares in fine quadrantum communi secant se invicem, fine hoc *polo* ipsius *c* dicto. Unde extremitas quadrantis ad *c* perpendicularis polus ipsius *c* est.

2. Si pa, pb quadrantes fuerint, anguli arcuum pa et pb quantitas arcus ab est.

§. 5.

Patet etiam:

1. e quovis superficiei sphæræ puncto p ad quemvis circulum maximum *C* dari circulum maximum perpendicularem. Nam tum p in hemisphærio est, cuius æquator *C* est, et polus q sit; adeoque circulus maximus per q et p secat circulum maximum *C*, et arcus ex q usque ad *C* quadrans ad *C* perpendicularis est.

2. Si p, a, b talia superficiei sphæræ puncta fuerint, ut p tam ab a quam a b quadrante distet, p polus arcus ab erit. Sit enim c centrum, erunt rectæ ca, cb perpendiculares ad cp; adeoque cp perpendicularis ad planum acb, et plana pca, pcb perpendicularia ad planum acb sunt.

§. 6.

Oriuntur quidem et in sphæra ut in plano triangula plurium generum, sed inprimis triangula sphærica tractare necesse est: figura quævis in superficie sphæræ tribus eiusmodi arcubus circulorum maximorum clausa, ut quivis bini arcus se invicem nonnisi in puncto secent, et diversorum circulorum maximorum arcus sint, sensu lato *triangulum sphaericum* est; et manifesto ab extremitatibus chordarum radiis ductis, pyramis triangularis orietur, cuius basis triangulum e chordis componitur, et lateris cuiusvis angulus rectilineus ad apicem est duobus rectis minor; at si latera plana huius pyramidis (inter crura angulorum rectilineorum dictorum) producantur, sectio illa, quæ cum superficie sphæræ fiet, dicitur

Hosted by Google

strictius *triangulum sphaericum*; nempe etsi pro arcu aliquo trium illorum, in quibus pyramis sphæræ superficiem secat, arcus alter eiusdem circuli maximi earundem extremitatum accipiatur, pariter triangulum sphæricum manebit sensu lato, sed chorda eadem erit, eademque pyramis generabitur.

§. 7.

Summæ angulorum latera pyramidis triangularis constituentium, idest laterum trianguli sphærici, limites sunt o et $4R$; ita summæ angulorum, quos latera pyramidis dictæ faciunt, (adeoque angulorum trianguli sphærici), limites sunt $2R$ et $6R$, nempe summa est $> 2R$ et $< 6R$.

Nam *quoad latera*: sint A, B, C latera pyramidis triangularis; est omnino quodvis $< 2R$; cadant A et B supra planum C et apex pyramidis in centrum sphæræ, seceturque sphæra per C in arcu $\mathfrak{ba}$, hemisphærium supra C autem secetur per A, B in $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{ca}$; poterit $\mathfrak{bc} = 2R - \omega$ et $\mathfrak{ca} = 2R - \lambda$, et $\mathfrak{ba} = 2R - \varkappa$ poni (Fig. 241.). Continuetur arcus $\mathfrak{cb}$ ultra $\mathfrak{b}$, donec ex $\mathfrak{c}$ incipiendo semicirculus fiat, patet ipsi $\mathfrak{cb}$ additum ω infra planum C cadere; pariter si arcui $\mathfrak{ca}$ addatur λ, semicirculus fiet, cum priore simul incipiens supra planum C, et simul desinens infra C; nam duo circuli maximi se in duobus punctis bisecant, eruntque semicirculorum dictorum initium et finis extremitates diametri; atque et infra C efformabitur nova pyramis et novum triangulum sphæricum, cuius laterum ω et λ summa est tertio maior; adeoque $\omega + \lambda - h = C$ poni potest, eritque

$$A + B + C = 2R - \omega + 2R - \lambda + \omega + \lambda - h = 4R - h.$$

Quoad angulos: laterum pyramidis triangularis quoque, evidens est, quemvis trium angulorum duobus rectis minorem, adeoque et summam sex rectis minorem esse.

Sed summam hanc duobus rectis maiorem, et sex rectis ita minorem esse, ut dato quovis minus ab utroque limite differre queat, sic patet. Construatur triangulum modo sequente: (In Fig. 242.) descriptis in superficie sphæræ ex apicibus trianguli sphærici $\mathfrak{abc}$ (in quo pyramis trian-

Hosted by Google

gularis eam secat), tanquam centris, quadrantis intervallo circulis maximis, erunt centra dicta poli circulorum descriptorum, et horum quilibet bini secabunt se invicem in duobus punctis et orietur trilaterum $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, sectione illa $\mathfrak{a}'$ accepta pro A (ex extremitatibus $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ eius facta), quæ respectu plani ipsius A in eandem plagam cum $\mathfrak{a}$ cadit, ita sectione illa $\mathfrak{b}'$ accepta pro B, quæ respectu plani ipsius B in eandem plagam cum $\mathfrak{b}$ cadit, atque sectione illa $\mathfrak{c}'$ ipsius C accepta, quæ respectu plani ipsius C in eandem plagam cum $\mathfrak{c}$ cadit; fieri nimirum posse hoc patet, quum trianguli $\mathfrak{abc}$ latus quodvis $< 2R$ sit, adeoque quadrantes circa extremitates motæ se invicem in hemisphærio illo quoque secant, ubi apex oppositus trianguli est.

Erit vero $\triangle\mathfrak{abc}$ et $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ eiusmodi, ut cuiusvis eorum anguli cuiusvis, latus alterius ei oppositum, complementum ad $2R$ sit.

Nempe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ poli arcuum A', B', C', et $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ poli arcuum A, B, C sunt; in quovis enim duo puncta ab eodem puncto quadrante distant (pag. 277). Itaque ex. gr.

$$b = u,$$

et

$$z + u = R = u + v, \qquad \text{adeoque} \qquad z = v;$$

et

$$z + u + v + u = 2R = B' + u = B' + b.$$

Quod pariter de reliquis patet; idemque applicare ad casus, si quod ipsorum A, B, C, aut duo eorundem, sive singula quadrantem excedant, Tyronibus relinquitur.

Atque hinc

$$A + B + C + a' + b' + c' = 6R = A' + B' + C' + a + b + c;$$

itaque tam $a' + b' + c'$ quam $a + b + c < 6R$, et quodvis ipsorum a', b', c', a, b, c, et A', B', C' est $< 2R$, nam ex. gr.

$$A' + a \text{ est } = 2R.$$

Efficiunt autem etiam A', B', C' pyramidem triangularem. Nam $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ non in eodem circulo maximo sunt, quia per $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ unicus maximus cir-

Hosted by Google

culus datur, cuius polus $\mathfrak{a}$ est, ita per $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}'$; adeoque trium eiusdem circuli maximi arcuum tres diversi poli nempe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ essent. Cadit igitur $\mathfrak{c}'$ (adeoque $\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'$ etiam) extra planum C', adeoque in hemisphærium supra vel infra illud cadere debet, suntque A', B', C' et a', b', c' singula duobus rectis minora.

Erit itaque et

$$A' + B' + C' < 4R;$$

atque hinc et

$$a + b + c > 2R;$$

nam

$$a + b + c + A' + B' + C' = 6R,$$

et si ex utroque ipso $4R$ minus subtrahatur, utrinque $> 2R$ manebit.

Potest autem $\triangle\,\mathfrak{abc}$ tale construi, ut $A + B + C$ quantovis α minus a o aut a $4R$ differat. Sit enim $\alpha = 2\omega$, et fiant e puncto superficiei sphæricæ duo arcus circuli maximi ipsi $\frac{\omega}{2}$ æquales, atque ducatur arcus circuli maximi per extrema eorum; erit summa priorum $= \omega$ tertio latere maior, adeoque summa trium $< 2\omega$.

Ita triangulum æquilaterum in sphæra describi potest pro basi $< \frac{4R}{3}$; nempe si basis $= \frac{4R}{3}$, arcus in eodem baseos circulo conveniunt; si vero quantovis minor accipiatur basis, in hemisphærio pariter intersectio fiet ut in plano.

Atque hinc $A + B + C$ potest ad limitem o tendere, adeoque $a' + b' + c' \sim 6R$; ita dum $A + B + C \sim 4R$ manens tamen $< 4R$, manifesto $a' + b' + c' \sim 2R$, manens tamen $> 2R$.

Notandum vero est dari triangulum sphæricum *sensu lato*, cuius laterum summa $> 4R$. Ex. gr. accipiatur in circulo maximo arcus $= 3R$, et ducantur ex eius polo quadrantes ad extremitates eiusdem arcus, erit summa laterum $= 5R$.

§. 8.

Posset quidem trigonometria sphærica e pyramidis triangularis analysi quoque deduci: at quum sphæra planum præcedat, certo tamen respectu eadem qualitate gaudens, et præterea quoque trigonometria sphærica,

Hosted by Google

ut (pag. 265) dictum est, ab Axiomate XI Euclideo independenter vera sit; tam ob dignitatem sphæræ æque tribuendam, quam ob rationem posterius dictam, pyramidum theoriam e trigonometria sphærica, in quantum a trigonometria dependet, deducere libet.

Manifesto autem in superficie sphæræ quoque plures operationibus in plano analogæ suscipi possunt: ex. gr. triangulum æquicrurum, æquilaterum & construi, perpendicularis erigi, demitti & possunt.

§. 9.

Circuli maximi A, B, C dividunt (Fig. 243.) sphæram in octo triangula, nempe t, a, b, c, a', b', c', et $\mathfrak{abc}$ sphæram inferius claudens, ipsi t æquale; estque $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$; nimirum bisecent se invicem plana circulorum B et C, A et C, A et B in diametris $\mathfrak{Aa}$, $\mathfrak{Bb}$, $\mathfrak{Cc}$; centrum $\mathfrak{k}$ his commune est, et anguli verticales $\mathfrak{AkB}$ et $\mathfrak{akb}$, $\mathfrak{AkC}$ et $\mathfrak{akc}$, $\mathfrak{BkC}$ et $\mathfrak{bkc}$ æquales sunt; et pariter in ceteris ita est; unde (per pag. 224) patet. Præterea et pro latere trianguli ex. gr. $\mathfrak{ABC}$, potest pro latere quovis ex. gr. $\mathfrak{AiB}$ accipi $\mathfrak{AiB}$, ut sensu latiore aliud triangulum prodeat; quamvis (ut dictum est) pyramidem per chordas eandem præbeat.

At priusquam in supplemento numerum hunc respiciente Trigonometria sphærica tractaretur, dicendum aliquid est de numero

'31352.

Corpora regularia numerus hic respicit. Dicuntur autem hæc *sensu stricto* ea, quæ figuris planis regularibus ita clauduntur, ut nullus angulus convexus sit (sive omnes anguli æquales sint); possentque etiam e superficie sphæræ deduci; nempe operationibus analogis ut in plano, figuræ regulares, arcus circulorum maximorum pro lateribus accipiendo, construi tales possunt, ut se invicem excipientes eam exhauriant.

'31352. Si planum quodvis tangat sphæram, aut aliter secet, atque plana omnia simul efficiant superficiem simplicem portionem spatii claudentem: inter hæc oriuntur etiam corpora aut *perfecte* aut *certo respectu regularia*.

Hosted by Google

§. 1.

Sed satis omnium constat, quomodo e retibus quinque corpora regularia componantur: nempe e triangulo æquilatero tria prodeunt, e quadrato unum, et unum e pentagono. Nec plura prodire posse sic patet. E tribus triangulis ad apicem anguli solidi fit *tetraedron*, e quatuor fit *octaedron*, et *icosaedron* ex quinque; at si sex triangula æquilatera componantur, fiet summa angulorum ad apicem $= 360^\circ = 6 . 60^\circ$; adeoque in planum cadent. Tres anguli recti efficiunt *cubum*, quatuor autem item in planum deciderent, quum $4 . 90^\circ = 360^\circ$. Pentagoni angulus est $= 108^\circ$, quorum tres pariunt *dodecaedrum*; sed $4 . 108^\circ$ transit in plagam alteram.

Si vero polygoni regularis laterum numerus n sit > 5: erit angulus polygoni (pag. 88)

$$= \frac{2nR - 4R}{n} = \frac{(n-2)\,2R}{n},$$

adeoque quum ad angulum solidum ad minimum tres anguli requirantur, esset summa eorum $6R\frac{(n-2)}{n}$, quod pro $n > 5$ excedit quatuor rectos; nam sit $n = 5 + m$ (pro m integro positivo); erit

$$\frac{6R(n-2)}{n} = \frac{6R(m+3)}{5+m},$$

quod si $m = 1$ fuerit, $= 4R$ erit; si vero m crescat, erit

$$\frac{6(m+1)+18}{5+m+1} > \frac{6m+18}{5+m},$$

ad eundem denominatorem reducendo patet.

§. 2.

Quod apices corporis regularis omnes in superficiem sphæræ cadant, sic patet. Demittantur (Fig. 244.) e duarum figurarum regularium latere ineari $\mathfrak{ab}$ communi gaudentium centris $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$ perpendiculares $\mathfrak{fq}$ et $\mathfrak{f}'\mathfrak{q}$; cadent illæ manifesto in punctum idem $\mathfrak{q}$; erigantur ex $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$ perpen-

Hosted by Google

diculares $\mathfrak{f}\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{f}'\mathfrak{r}'$ ad plana figurarum regularium dictarum, ducaturque recta $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'$; erit summa angulorum, quos perpendiculares $\mathfrak{f}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{f}'\mathfrak{r}'$ cum $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'$ faciunt, duobus rectis minor, adeoque concurrent; fiat hoc in $\mathfrak{p}$. Nempe e meditullio $\mathfrak{q}$ lateris communis duarum figurarum regularium æqualium (tanquam chordæ duorum circulorum communi) erectæ perpendiculares in planis earundem figurarum, per centra earum ducuntur; et angulus perpendicularium harum angulus planorum est, atque planum, in quod hæ perpendiculares cadunt, est ad utrumque perpendiculare; perpendiculares $\mathfrak{f}\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{f}'\mathfrak{r}'$ autem, ex iis centris ad plana figurarum centris appertinentium erectæ, in planum dictum ad utrumque perpendiculare cadunt.

Continuentur dicta a quavis figura regulari ad sequentem: manifesto concursus omnium in $\mathfrak{p}$ erit; si enim anguli rectilinei quotvis æquales ad angulum solidum convexum compingantur, anguli laterum planorum omnes æquales, et omnia circumcirca æqualiter determinata erunt.

Erit igitur recta, quæ a centro figuræ cuiusvis regularis usque ad idem $\mathfrak{p}$ est, ad planum figuræ perpendicularis, et pro quavis figura eidem rectæ æqualis; adeoque erit radius sphæræ illius, quæ figuras omnes tangit.

Si vero in quavis figurarum e centro $\mathfrak{f}$ ad apicem recta ducatur, ex. gr. ex $\mathfrak{f}$ ad apicem $\mathfrak{a}$: erit $\triangle\, \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{a}$ ad $\mathfrak{f}$ rectangulum, in quo hypotenusa, pro quavis figurarum æqualis, radius sphæræ circumscriptæ erit.

§. 3.

Si reperiatur u angulus duorum laterum planorum corporis regularis: dabitur $\angle\, \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{f} = \frac{1}{2}\, u$ ($\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{f}$ iuxta præcedentia intellectis); $\mathfrak{f}\mathfrak{q}$ e figura data notum est, adeoque e triangulo $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{f}$ ad $\mathfrak{f}$ rectangulo innotescit $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$; et hinc in triangulo $\mathfrak{a}\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ ad $\mathfrak{f}$ rectangulo ex $\mathfrak{a}\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ innotescit radius sphæræ circumscriptæ.

§. 4.

Angulus u autem, e data figura regulari et numero angulorum angulum solidum ad apicem constituentium, prodit sic. In *tetraedro* tres anguli sunt ad apicem, in *cubo* et *dodecaedro* pariter; in *octaedro* quatuor

Hosted by Google

triangulorum ad apicem concurrentium bases efficiunt quadratum, cuius latus $l =$ lateri triangulorum; unde (Fig. 245.) diagonalis d quadrati dicti innotescit, et efformabitur angulus solidus ad apicem priorem e tribus angulis compositus, quorum duo sunt anguli triangulorum æquilaterorum, tertius est ipsi d oppositus in triangulo, cuius duo latera $= l$ sunt, et tertium latus d est. Itaque angulus u per trigonometriam sphæricam in pyramide triangulari e lateribus datis prodit.

In *icosaedro* angulus ad apicem pariter ad pyramidem triangularem reduci potest modo sequente: quinque triangulorum ad apicem positorum bases pentagonum efficiunt, cuius latus $l =$ lateri triangulorum est; adeoque (Fig. 246.) k e latere utroque $= l$, et angulo intercepto 108^c innotescit. Itaque et hic angulus solidus fiet, cuius duo latera anguli trianguli æquilateri erunt, et tertium erit angulus ipsi k oppositus in triangulo, cuius duo latera ipsi l æqualia et tertium latus k est.

Prodeunte hinc u, e triangulo fpq ad f rectangulo prodit etiam altitudo fp, per cuius tertiam partem multiplicanda superficies corporis est, ut soliditas prodeat.

§. 5.

Quævis pyramis, cuius basis figura regularis n laterum est, si quævis atera pyramidis linearia eidem b æqualia fuerint, soliditas facile computatur. Nam ex. gr. (Fig. 247.) ex figura ipsa prodit z, distantia centri baseos ab apice eiusdem quovis; atque in triangulo ad centrum rectangulo, e hypotenusa b et catheto z, prodit pyramidis altitudo $y =$ catheto alteri.

Ita *in tetraedro*, ubi basis triangulum æquilaterum est, cuius area $= \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3}$ (pag. 119, ubi radius est $= z = \frac{b}{\sqrt{3}}$), erit

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{3} = \frac{2b^2}{3},$$

itaque

$$y = b\sqrt{\frac{2}{3}};$$

adeoque soliditas

Hosted by Google

$$= \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3} \cdot \frac{b}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{b^3 \sqrt{2}}{12}.$$

Octaedrum e duabus eiusmodi pyramidibus constat, quarum bases sunt quadrata lateris b, quod etiam latus triangulorum lateralium est. Est autem hic z, quadrati diagonalis dimidium,

$$= \sqrt{\frac{b^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}};$$

adeoque

$$y = \sqrt{b^2 - z^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}};$$

adeoque soliditas octaedri

$$= 2 \,.\, b^2 . \frac{b}{3\sqrt{2}} = \frac{2b^3}{3\sqrt{2}} = \frac{b^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Si vero radius r sphæræ quæratur, cui corpus regulare inscriptum est: sit x perpendicularis e centro ad latus quodvis corporis demissa; erit hæc recta e centro sphæræ ad centrum lateris; adeoque si n fuerit laterum numerus, et β sit area lateris, erit soliditas corporis $= \frac{n\beta x}{3}$; atque ex x et z prodit hypotenusa r. Imo et anguli ad centrum in triangulis æquicruris, quæ latera pyramidum constituunt, innotescunt; quum duo latera ipsi r sint æqualia, tertium vero b sit.

Potestque etiam arcus u circuli maximi, cuius chorda b est, reperiri: nempe

$$b = 2 \sin. \frac{1}{2} u,$$

adeoque

$$\sin. \frac{1}{2} u = \frac{b}{2},$$

et arcus ipsi $\frac{b}{2}$ tanquam sinui respondentis duplum erit arcus circuli maximi, quo tanquam latere in superficie sphæræ, figuræ regulares (concernentes) eam claudentes describi possunt. Potest autem b per r exprimi; adeoque etiam sinus pro dato radio r quæri.

Quod si ad *tetraedrum* applicetur: fiet soliditas

Hosted by Google

$$\frac{x}{3}4 \cdot \frac{b^2}{4}\sqrt{3} = \frac{x}{\sqrt{3}}b^2 = \frac{b^3\sqrt{2}}{12},$$

atque hinc

$$x = \frac{b\sqrt{6}}{12}.$$

Est autem

$$r^2 = x^2 + z^2 \quad \text{et} \quad z = \frac{b}{\sqrt{3}},$$

adeoque

$$r = \sqrt{\frac{6b^2}{144} + \frac{b^2}{3}} = b\sqrt{\frac{3}{8}};$$

atque etiam b ex r dato prodit, nempe

$$b = r : \frac{\sqrt{3}}{8} = r\sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Atque si quæratur u arcus chordæ b, erit

$$\sin. \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}r\sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Idem ad reliqua applicatur. *Dodecaedri* et *icosaedri* soliditates subsidio trigonometriæ prodeunt: nempe pro latere lineari b est *dodecaedri soliditas*

$$= \frac{b^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}),$$

et *icosaedrum*

$$= \frac{5b^3}{12}(3 + \sqrt{5}).$$

Unde x et r & modo dicto reperiuntur, ex. gr. *pro icosaedro* erat $z = \frac{b}{\sqrt{3}}$, et basis cuiusvis pyramidum, quæ heic ad centrum numero 20 fient, est $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$; itaque ex

$$\frac{5b^3}{12}(3 + \sqrt{5}) = 20 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5b^2x}{\sqrt{3}}$$

prodit x, et tum r.

Hosted by Google

Quod cubum attinet, pro latere lineari b eius erit area lateris plani b^2, et soliditas b^3, z vero erit $\frac{b}{\sqrt{2}}$ (Fig. 247.); atque hinc

$$b^3 = \frac{x \cdot 6b^2}{3};$$

unde

$$x = \frac{b}{2}.$$

Itaque quum sit

$$r^2 = x^2 + z^2,$$

erit

$$r^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} = \frac{3b^2}{4},$$

adeoque

$$r = \frac{b\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Hinc si arcus u chordæ b quæratur, erit

$$\sin. \tfrac{1}{2} u = \tfrac{1}{2} b = \frac{r}{\sqrt{3}};$$

itaque arcus ipsi $\frac{r}{\sqrt{3}}$ tanquam sinui respondentis duplum erit arcus quæsitus u.

Quod ad reliqua etiam applicari evidens est.

Scholion. Notandum autem est, quod si circulus maximus C per n dividatur, atque e divisionis punctis ad utrumque polum quadrantes ducantur, et e quovis divisionis puncto in quadrantibus inde ductis ubique æquales arcus v absecentur; atque in quovis hemisphærio arcuum absectorum proximorum fines, item eorundem fines in quovis semicirculo rectis iungantur: oriantur corpora certa e duabus figuris regularibus n laterum et n rectangulis, quæ quadrata esse possunt; et si ab extremitatibus arcuum ad divisionis ipsius C puncta rectæ ducantur, trapezia numero $2n$ æqualia et duo polygona n laterum æqualia erunt sphæræ inscripta.

Hosted by Google

§. 6.

Erant autem (§. 2) dicta corpora regularia sensu stricto; at dantur etiam alia, quæ figuris regularibus quidem, sed diversæ speciei clauduntur; et dantur præterea talia, quæ per figuras rectilineas non regulares, sed omnes inter se æquales clauduntur; imo et hoc per figuras diversæ speciei quoque fieri potest, quarum quævis eiusdem speciei inter se æquales sunt, atque certo ordine continuo se invicem excipiunt; imo possunt etiam figuræ nonnisi quoad aream æquales esse; possuntque hæc *corpora regularia ordinis primi, secundi, &* dici.

Recensere autem hæc, computareque et retia exhibere, quamvis disquisitionem haud inelegantem præbeat, longius esset, quam heic locum habere queat. Aliquid tamen annotare liceat.

Quæri potest: superficies sphæræ in quot qualesve figuras æquales, quarum latera arcus circulorum maximorum sint, dividi queat? et quarum sint laterum chordæ in plano, quarum non? atque in casu priore quales figuras planas præbeant?

Ex. gr. Dividitur superficies sphæræ in n triangula pro quovis numero pari n, si circulus maximus per $\frac{n}{2}$ dividatur, atque ad puncta divisionis a polis quadrantes ducantur; imo quivis numerus n etiamsi impar fuerit, circulo maximo per n diviso, semicirculis a polo ad polum per divisionis puncta ductis, partes æquales numero n prodibunt; at aliter superficies sphæræ (adeoque spatium per formas pyramidales, apice communi in centro gaudentes) nonnisi per numerum parem dividi potest. Dividitur autem superficies sphæræ, ope quinque corporum regularium, (iuxta Fig. 248.) modis sequentibus:

1. e cuiusvis lateris plani centro ducantur rectæ ad apices figuræ;

2. e quovis apice per centrum usque ad perimetrum figuræ;

3. in quovis triangulo æquicruro, (in 1.) generato, ducatur e centro perpendicularis ad basim;

4. e cuiusvis figuræ centro mittatur perpendicularis ad quodvis figuræ latus;

Hosted by Google

5. in cubo præterea etiam ducatur ad duo tantum latera quadrati parallela;

atque producantur, usque ad superficiem sphæræ, rectæ omnes e centro sphæræ per extrema rectilineorum hoc pacto generatorum; et ponantur per puncta sectionis arcus circulorum maximorum, lateribus figurarum rectilinearum respondentes. Manifesto dividetur in quovis casuum dictorum superficies sphæræ in figuras æquales.

Sed et, paucis exceptis, chordæ laterum cuiusvis figuræ sphæricæ novum corpus regulare sensu latiore præbent. Ex. gr. (Fig. 249.) dat trapezium, et hoc pacto duodecim trapeziis æqualibus clausum corpus e cubo prodit. Sed (Fig. 250.) nullum dat, quia chordæ non sunt in plano. Sit enim (Fig. 249.) quadratum $\mathfrak{ABCD}$ latus cubi, cuius centrum $\mathfrak{k}$ sit, sintque $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$ meditullia rectarum $\mathfrak{AD}$, $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{Ef}$, et sit $\mathfrak{k}''$ centrum illius lateris cubi, quod cum $\mathfrak{ABCD}$ rectam $\mathfrak{AB}$ communem habet: erunt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ in superficie sphæræ, cuius centrum $\mathfrak{k}$ et radius $\mathfrak{kA}$ est; atque planum $\mathfrak{kEf}$ secabit sphæram in circulo maximo C, ad quem recta $\mathfrak{kk}''$ perpendicularis erit; et polus $\mathfrak{p}$ ipsius C in hanc cadet; eruntque $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ in plano, uti $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$; nam $\mathfrak{AE} \parallel \mathfrak{GK} \parallel \mathfrak{kk}''$. Secent $\mathfrak{kE}$, $\mathfrak{kf}$, $\mathfrak{kK}$, $\mathfrak{kG}$ productæ superficiem sphæræ in $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{g}$; efficient $\mathfrak{eEkp}$ et $\mathfrak{fFkp}$ cum arcubus claudentibus $\mathfrak{eAp}$ et $\mathfrak{fBp}$ quadrantes ad C perpendiculares, quorum partes $\mathfrak{eA}$ et $\mathfrak{fB}$ æquales sunt. Estque recta $\mathfrak{ef}$ in plano $\mathfrak{Ekf}$, et parallela ad $\mathfrak{Ef}$, atque hac maior, sed $\mathfrak{Ef} =$ et $\parallel \mathfrak{AB}$; itaque et $\mathfrak{ef} \parallel \mathfrak{AB}$, adeoque $\mathfrak{efAB}$ in plano est, et quum $\mathfrak{ef} > \mathfrak{Ef} = \mathfrak{AB}$ sit, trapezium est.

Sed (Fig. 250.) si planum c per $\mathfrak{AB}$ ad $\mathfrak{kk}''$ perpendiculare concipiatur, nempe cubi latus illud, cuius centrum $\mathfrak{k}''$ erat: erit hoc parallelum ipsi C, et sectio eius cum sphæra circulus parallelus; sit huius sectio $\mathfrak{q}$ cum quadrante $\mathfrak{pk}'$; erit arcus $\mathfrak{qk}' = \mathfrak{eA}$, et $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{k}'$ in plano erunt; sed recta $\mathfrak{kG}$ transit per planum c, adeoque $\mathfrak{g}$ ultra $\mathfrak{q}$ cadit, et arcus $\mathfrak{gk}' > \mathfrak{eA}$ est. Erant autem $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{k}'$ in plano, itaque $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{k}'$ non sunt in plano; quia si essent, etiam $\mathfrak{g}$ in eodem plano illo esset, quod per $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{k}'$ determinatur; adeoque et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{e}$ caderent in planum per circuli tria puncta $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{k}'$ determinatum; quod fieri nequit, quia arcus $\mathfrak{Ae}$

Hosted by Google

et $\mathfrak{gf}''$ partes quadrantum diversorum ad C perpendicularium sunt, quorum plana nonnisi rectam per polos communem habent; neque $\mathfrak{A}$ neque $\mathfrak{e}$ autem in rectam $\widetilde{\mathfrak{ff}}''$ per polos euntem cadit. Itaque casus posterior sphæram quidem (spatiumque) dividit, sed corpus regulare novum haud præbet.

Sed his amplius vacare instituti ratio prohibens, transire iubet ad

Supplementum numeri ·31351.

Ut in Trigonometria plana, et hic mutuam laterum ab angulis oppositis dependentiam quærere (præter plura iam dicta et veritatis ipsius desiderium) plurimæ mensurationes in cœlis terraque necessariæ induxerunt; quum inde triangulum sphæricum quoque e tribus datis illud determinantibus computare liceat. *Determinatur triangulum sphaericum* in eadem sphæra:

1. *per duo latera et angulum interceptum*,
2. *per duos angulos et latus interceptum*,
3. *per tria latera*,
4. *per tres angulos*.

Pagina sequens formulas primarias exhibet, e quibus reliqua fluunt; ex. gr. ex IV., dato latere B cum angulis adiacentibus a, c, reperitur $\angle b$; nempe

$$\cos. b = \cos. B \sin. a \sin. c - \cos. a \cos. c;$$

atque tum ex B, b, a latus A ipsi a oppositum quoque prodit per I.

§. 1.

Dependentia laterum ab angulis oppositis mutua vero a dependentia in triangulo rectilineo in eo differt, quod *ibi latera, hic vero sinus laterum sint ut sinus angulorum oppositorum.*

Sit nempe triangulum sphæricum (Fig. 251.) $\mathfrak{abc}$, et

$$\mathfrak{bc} = A,\ \mathfrak{ca} = B,\ \mathfrak{ab} = C,$$

Hosted by Google

et anguli oppositi sint

$$a,\ b,\ c;$$

est:

I. $$\sin. A : \sin. B = \sin. a : \sin. b;$$

unde e datis ipsorum A, B, a, b tribus prodit quartum; et ex hoc promanant formulæ pro Trigonometria sphærica primariæ sequentes.

II. $$\cot. a = \frac{\sin. C \cot. A - \cos. b \cos. C}{\sin. b}$$

(e datis A, C et intercepto angulo b angulus a).

III. $$\cos. b = \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \sin. A}$$

(e datis tribus lateribus angulus b).

IV. $$\cos. B = \frac{\cos. b + \cos. a \cos. c}{\sin. a \sin. c}$$

(e datis tribus angulis latus B).

Demonstrantur autem hæc in sequentibus; relatis etiam formulis triangula rectangula specialiter concernentibus.

§. 2.

Sinus laterum quorumvis esse ut sinus angulorum illis oppositorum, prius pro triangulo rectangulo demonstratur; unde generaliter liquet.

Sit (Fig. 252.) $\mathfrak{C}$ centrum sphæræ, et A, B sint catheti, atque H hypotenusa: erit angulus plani A cum plano B rectus, sit a angulus plani H cum plano B, et b angulus plani H cum plano A; hypotenusæ H rectus, et ipsis A, B opponentur a, b, compactoque triangulo, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ coincident. Demittatur ex $\mathfrak{b}$ ad $\mathfrak{Ch}$ perpendicularis $\mathfrak{bd}$; erit hæc perpendicularis ad planum B, quia planum $A \perp B$, et $\mathfrak{Ch}$ eorum sectio est (pag. 222), neque alia ex $\mathfrak{b}$ omnino cum $\mathfrak{b}'$ (in triangulo sphærico compacto) coincidente datur. Sit $\mathfrak{b}'\mathfrak{f} \perp \mathfrak{Ca}$, et in B sit $\mathfrak{fi}$ perpendicularis

Hosted by Google

ex $\mathfrak{f}$ ad $\mathfrak{Ca}$ erecta; erit $\angle \mathfrak{b}'\mathfrak{fi}$ angulus ipsorum H et B; eritque $\mathfrak{Cf}$ perpendicularis ad planum $\mathfrak{b}'\mathfrak{fi}$, quod dicatur Q; quia $\mathfrak{Cf}$ perpendicularis ad $\mathfrak{fb}'$ et $\mathfrak{fi}$ est; et hinc etiam $\mathfrak{Cf}$ planis H et B communis, utrumque ad Q perpendiculare reddit, atque sectio planorum B et Q est recta $\mathfrak{fi}$. Hinc autem ex $\mathfrak{b}'$ (quod cum $\mathfrak{b}$ coincidens in plano Q ad B perpendiculari est) demissa ad B perpendicularis, necessario in $\mathfrak{fi}$ cadit: quamobrem, quum perpendicularem hanc in $\mathfrak{d}$ cadere dictum sit, $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{fi}$ et simul in $\mathfrak{Ch}$ cadit. Efformatur itaque triangulum $\mathfrak{bfd}$, in quo $\angle \mathfrak{fdb}$ rectus, adeoque $= \angle AB$ (id est angulo ipsorum A et B), $\angle \mathfrak{dfb}$ vero $= \angle HB = a$, atque latus $\mathfrak{b'f} = \sin. H$, et latus $\mathfrak{bd} = \sin. A$.

In triangulo rectilineo $\mathfrak{bfd}$ vero est

$$\mathfrak{bf} : \mathfrak{bd} = \sin. \text{tot.} : \sin. a,$$

id est

$$\sin. H : \sin. A = 1 : \sin. a$$

(*pro radio* 1 *computando omnia*), atque hinc

$$\sin. H = \frac{\sin. A}{\sin. a}.$$

Pariter (e Fig. 252*.) patet, esse

$$\sin. H : \sin. B = 1 : \sin. b,$$

atque hinc

$$\sin. H = \frac{\sin. B}{\sin. b}.$$

Consequenter

$$\frac{\sin. A}{\sin. a} = \frac{\sin. B}{\sin. b},$$

seu

$$\sin. A : \sin. B = \sin. a : \sin. b.$$

Hinc *in quovis triangulo sphaerico, quaecunque duo latera* A, B *accipiantur, erunt sinus laterum uti sinus angulorum oppositorum.*

Nam e vertice trianguli lateri C opposito, arcus circuli maximi perpendicularis D ad C demitti potest (pag. 277); cadetque hæc aut intra fines ipsius C, aut extra C, aut ad finem. In casu primo (Fig. 253. *a.*) est

$$\sin. A : \sin. D = 1 : \sin. b$$

Hosted by Google

et

$$\sin. B : \sin. D = 1 : \sin. a ;$$

nempe A, B hypotenusæ sunt, et D cathetus; et hinc

$$\sin. D = \sin. A \sin. b = \sin. B \sin. a ;$$

atque hinc

$$\sin. A : \sin. B = \sin. a : \sin. b.$$

In casu secundo (Fig. 253*b*.) autem est

$$\sin. A : \sin. D = 1 : \sin. b$$

et

$$\sin. B : \sin. D = 1 : \sin. a';$$

sed

$$a + a' = 2R,$$

itaque

$$\sin. a' = \sin. a ;$$

adeoque idem quod prius erat, pariter sequitur.

In casu tertio erit triangulum rectangulum, de quo (in præcedentibus) demonstratum est.

§. 3.

In triangulo rectangulo præter angulum rectum duo sunt data: aut *duo latera*, aut *duo anguli*, aut *unum latus et unus angulus*; duo latera sunt aut *catheti*, aut *hypotenusa et cathetus*; *duo anguli* sunt nonnisi illi, qui *hypotenusae adiacent*; *unum latus et unus angulus* autem sunt angulus *hypotenusae adiacens* et *cathetus* aut *adiacens angulo, aut ei oppositus*. Omnium horum autem resolutio sequitur (e præcedentibus) modo sequente. (Fig. 254.)

Trianguli rectanguli 𝔄𝔅𝔇 hypotenusa H et catheti A, B (si necesse fuerit) continuentur, donec per circulum maximum ex 𝔅 quadrantis intervallo in superficie sphæræ descriptum, secentur in 𝔟, 𝔞, 𝔟. Casus plures dantur: nempe A est aut $>$ aut $<$ aut $= R$; atque in quolibet casuum

priorum sectio circuli, ex $\mathfrak{B}$ (tanquam polo) quadrantis intervallo descripti, cum B continuato aut cadet in H, aut inter H et A, aut ultra H.

Consideretur prius casus, ubi tam A, B quam $H < R$ (Fig. 254a.): manifesto ad $\mathfrak{a}$ angulus rectus est, adeoque $\mathfrak{H}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ quadrantes (pag. 277), atque $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$ poli arcuum $\mathfrak{a}\mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{H}$ sunt, adeoque $\mathfrak{a}\mathfrak{h} = \angle b$, $\mathfrak{H}\mathfrak{a} =$ angulo ad polum $\mathfrak{b}$; præterea patet, A', B', b', H' complementa ipsorum A, B, b, H esse. In $\triangle\, \mathfrak{b}\mathfrak{A}\mathfrak{h}$ (ubi verticales a sunt æquales), est

I. $$1 : \sin. a = \sin. B' : \sin. b' = \cos. B : \cos. b\,;$$

et in $\triangle\, \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{H}$ *sinus totus ad sinum anguli, uti cosinus catheti adiacentis ad cosinum anguli oppositi*; atque hinc

$$\sin. a = \frac{\cos. b}{\cos. B},$$

quo valore substituto in proportione, quæ in $\triangle\, \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{H}$ est, nempe in

$$\sin. a : \sin. b = \sin. A : \sin. B,$$

fit

$$\frac{\cos. b}{\cos. B} : \sin. b = \sin. A : \sin. B,$$

et hinc

$$\sin. b \sin. A = \frac{\cos. b \,.\, \sin. B}{\cos. B} = \cos. b \tang. B\,;$$

et

$$\tang. B = \frac{\sin. b \sin. A}{\cos. b} = \sin. A \tang. b,$$

seu

II. $$1 : \sin. A = \tang. b : \tang. B,$$

id est: *sinus totus ad sinum catheti, uti tangens anguli adiacentis ad tangentem lateris oppositi*; et hinc

$$\sin. A = \frac{\tang. B}{\tang. b} = \cot. b \tang. B,$$

et

$$\tang. B = \sin. A \tang. b.$$

III. In eodem triangulo $\mathfrak{b}\mathfrak{A}\mathfrak{h}$ est

Hosted by Google

$$\sin. B' : \sin. H' = 1 : \sin. A',$$

seu

$$\cos. B : \cos. H = 1 : \cos. A ;$$

unde *e quibusvis duobus lateribus tertium prodit*, et

$$\cos. H = \cos. A \cos. B.$$

IV. In eodem triangulo (per II.) est

$$1 : \sin. b' = \tang. A' : \tang. H',$$

seu

$$1 : \cos. b = \cot. A : \cot. H = \tang. H : \tang. A ;$$

quia

$$\frac{\cos. A}{\sin. A} : \frac{\cos. H}{\sin. H} = \frac{\sin. H}{\cos. H} : \frac{\sin. A}{\cos. A}$$

(per factum extremorum mediorumque $= 1$).

Id est *sinus totus ad cosinum anguli, uti tangens hypotenusae ad tangentem catheti angulo adiacentis.*

V. Item (per II.) in eodem triangulo est

$$1 : \sin. H' = \tang. a : \tang. b',$$

seu

$$1 : \cos. H = \tang. a : \cot. b,$$

id est *sinus totus ad cosinum hypotenusae, uti tangens anguli adiacentis ad cotangentem alterius.*

E quibus resolutiones quæsitæ patent. Sequitur etiam ex II., ubi $\tang. B = \sin. A \tang. b$ erat, quod si cathetus $>$ vel $=$ aut $< R$, et angulus ei oppositus $>=$ aut $< R$ sit; nam $\sin. A$ positivus est, itaque $\tang. B$ et $\tang. b$ (nisi $B = R = b$) simul positivæ aut simul negativæ esse debent, ut æqualitas locum habeat; tangens enim anguli obtusi negativa est, et recti infinita est, $\sin. A$ vero finitum est.

Ex III. autem, ubi $\cos. H = \cos. A \cos. B$, sequitur, quod si $H > R$, alteruter cathetorum tantum $> R$; et si $H < R$, tum uterque $>$ vel $< R$ est; si vero $H = R$, tum alterutrum saltem cathetorum item rectum esse oportet. Nam cosinus anguli obtusi negativus est, et $\cos. R = 0$;

Hosted by Google

itaque si $H = R$, fiet $0 = \cos. A \cos. B$; adeoque sive $\cos. A$ sive $\cos. B$ vel utrumque 0 est, quod, nisi A vel $B = R$ sit, fieri nequit. Ita si $\cos. H$ negativus fuerit, sive $\cos. A$ sive $\cos. B$ negativus erit; at si $\cos. H$ positivus fuerit, tam $\cos. A$ quam $\cos. B$ simul positivus vel simul negativus esse debet.

Ut tamen dicta generaliter valeant, casus omnes supra dicti percensendi sunt, quos (Fig. 254.) exhibet: demonstratio autem eadem in quovis casu erit, dummodo complementum arcus rite sumatur (nempe complementum 100 graduum -10° est), et angulorum se invicem ad $2R$ complentium sinus idem accipiatur, atque complementa literis iisdem accento insigniantur; reflectaturque polum esse in sectione duarum perpendicularium, et anguli ad polum quantitatem esse arcum circuli maximi ad quadrantis distantiam interceptum. Si $A = R$, tum etiam (pag. 295) $a = R = A$, adeoque $B = b$; atque $1 : \sin. a = \cos. B : \cos. b$ (ex I.) fit $1 : 1 = 1 : 1$. Casus reliquos singulos percensere Tyronum exercitio relinquitur.*

§. 4.

Si e vertice quovis trianguli sphærici ad latus oppositum C perpendicularis D demittatur (pag. 277), tres casus sunt: cadet nempe D aut intra fines ipsius C, aut ad finem, aut extra fines. Eritque (Fig. 253.

I. (e præcedente II.)

* Applicando (Tom. I. pagg. 531—532) dicta Tyronibus relicta facile sequent. Nempe (Fig. 254. *b*. dum $H = R$ et $A < R$, est b polus arcus A (propter R et R); itaque et

$$b = B = R \quad \text{et} \quad a = A;$$

atque iuxta (pag. 294) in I. fit

$$1 : \sin. a = 0 : 0;$$

in II. fit

$$1 : \sin. A = \infty : \infty,$$

nempe

$$\text{tang. } b = \text{tang. } B = \infty :$$

in III. fit

$$0 : 0 = 1 : \cos. A,$$

in quo casu ex H et B cathetus alter A haud innotescit; in IV. fit

$$1 : 0 = \infty : \text{tang. } A$$

et in V. fit

$$1 : 0 = \text{tang. } a : 0.$$

(Errata Ed. I. Tom. II. pag. 371).

Hosted by Google

$$1 : \sin M = \text{tang.}\, b : \text{tang.}\, D \qquad \text{et} \qquad 1 : \sin. N = \text{tang.}\, a : \text{tang.}\, D$$

atque hinc

$$\sin. M : \sin. N = \text{tang.}\, a : \text{tang.}\, b\,;$$

II. (e præcedente III.)

$$1 : \cos. M = \cos. D : \cos. A \qquad \text{et} \qquad 1 : \cos. N = \cos. D : \cos. B$$

atque hinc

$$\cos. M : \cos. N = \cos. A : \cos. B.$$

Notandum autem: quod si D extus cadat, a obtusus sit, adeoque angulus deinceps positus a' acutus erit; adeoque in linea secunda tang. a negativa sit $= -$ tang. a'; itaque N in hoc casu negative accipiendum est, ut proportio valeat (Tom. I. pag. 42); valebit enim hoc pacto; nam tum sin. N erit negativus, et tang. a quoque negativa, atque D erit $< R$, quum angulus oppositus $a' < R$ sit, adeoque tang. D positiva erit; itaque ordo signorum erit ⊢⊣ ⊢⊣ ⊢⊣ ⊢⊣.*

§. 5.

Atque hinc (ex §. 3. IV.) est

$$1 : \cos. b = \text{tang.}\, A : \text{tang.}\, M,$$

adeoque

$$\text{tang.}\, M = \cos. b\ \text{tang.}\, A.$$

Estque (e §. 4. I.)

$$\sin. M : \sin. N = \text{tang.}\, a : \text{tang.}\, b,$$

et hinc (quia $N = C - M$) fit

$$\sin. M : (\sin. C \cos. M - \cos. C \sin. M) = \text{tang.}\, a : \text{tang.}\, b;$$

* Si (Fig. 253. a c.) hypotenusa $A = R$ fuerit, in singulis tribus casibus $M = R$ (nisi $b = R$, adeoque triangulum ABC rectangulum sit); quia tum (pag. 295) alterutrum cathetorum $= R$ esse oportet, si vero D esset R, tum b quoque R esset. Erit igitur $\mathfrak{B}$ polus ipsius D, et $m = R$, atque $D = b$ in duobus casibus prioribus, in tertio vero D æquale deinceps posito ipsius b. Unde formulæ applicatæ patent.

Hosted by Google

et dividendo per cos. M, fit

$$\text{tang.}\, M : (\sin. C - \cos. C \,\text{tang.}\, M) = \text{tang.}\, a : \text{tang.}\, b\,;$$

atque hinc

$$\frac{\sin. C \,\text{tang.}\, a}{\text{tang.}\, b + \cos. C \,\text{tang.}\, a} = \text{tang.}\, M,$$

quod $= \cos. b \,.\, \text{tang.}\, A$ erat. Atque hinc

$$\sin. C \,\text{tang.}\, a = \cos. b \,\text{tang.}\, A \,\text{tang.}\, b + \cos. C \,\text{tang.}\, a \cos. b \,\text{tang.}\, A\,;$$

et per tang. a tang. A dividendo, et ipsi tang. b substituendo $\frac{\sin. b}{\cos. b}$, fit

$$\sin. C \cot. A = \sin. b \cot. a + \cos. b \cos. C\,;$$

e quo, si *latera* A et C *cum angulo intercepto* b data fuerint, *reperitur angulus* a.

Ita (in §. 5) ex

$$\text{tang.}\, M = \cos. b \,\text{tang.}\, A,$$

fiet

$$\infty = \cos. b \,.\, \infty.$$

Eritque in triangulo rectangulo, cuius catheti N et D, hypotenusa B est, in casu primo

$$N = C - M,$$

in secundo $-(C - M)$, in tertio $C + M$; adeoque in primo est

$$\sin. N = -\cos. C$$

(pag. 131), in secundo et tertio est cos. C; atque angulus adiacens est a in primo et tertio, in secundo $2R - a$. Atque (pag. 294, II.) in primo est

$$1 : \sin. N = \text{tang.}\, a : \text{tang.}\, D$$

seu

$$1 : -\cos. C = \text{tang.}\, a : \text{tang.}\, b,$$

in secundo

$$1 : \sin. N = \text{tang.}\, (2R - a) : \text{tang.}\, D$$

seu

$$1 : \cos. C = -\text{tang.}\, a : \text{tang.}\, b,$$

in tertio

$$1 : \sin. N = \text{tang.}\, a : \text{tang.}\, D$$

seu

$$1 : \cos. C = \text{tang.}\, a : -\text{tang.}\, b.$$

Itaque

$$\text{tang.}\, a = -\frac{\text{tang.}\, b}{\cos. C}\,;$$

atque hinc et pro $A = R$ valet formula (pagg. 291, 298); nempe ibidem

$$\cot. a = \frac{\sin. C \,.\, \cot. A - \cos. b \,.\, \cos. C}{\sin. b}\,;$$

quod pro $A = R$ fit

$$= -\frac{\cos. b \,.\, \cos. C}{\sin. b}\,;$$

Hosted by Google

§. 6.

Erat porro (§. 4. II.)

$$\cos. M : \cos. N = \cos. A : \cos. B,$$

et (quia $N = C - M$) fit

$$\cos. M : (\cos. C \cos. M + \sin. C \sin. M) = \cos. A : \cos. B;$$

hinc

$$\frac{\cos. M}{\cos. M} : \left(\frac{\cos. C \cos. M}{\cos. M} + \frac{\sin. C \sin. M}{\cos. M} \right) = \cos. A : \cos. B,$$

seu

$$1 : (\cos. C + \sin. C \operatorname{tang}. M) = \cos. A : \cos. B;$$

et (§. 5.)

$$\frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \cos. A} = \operatorname{tang}. M = \cos. b \operatorname{tang}. A.$$

Atque hinc

$$\cos. b = \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \cos. A \operatorname{tang}. A}$$

quod item

$$= \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \sin. A},$$

quia $\operatorname{tang}. A = \frac{\sin. A}{\cos. A}$.

Datis igitur tribus lateribus, reperitur angulus lateri cuivis B oppositus.

§. 7.

Ex hoc etiam sequitur modus e datis tribus angulis latus cuivis oppositum reperiendi.

nempe

$$\frac{1}{\operatorname{tang}. a} = \cot. a,$$

$$1 : -\frac{\operatorname{tang}. b}{\cos. C} = -\frac{\cos. C}{\operatorname{tang}. b};$$

atque hinc

$$\cot. a = -\frac{\cos. C \,.\, \cos. b}{\sin. b} \text{ (seu } -\cot. b \,.\, \cos. C).$$

Si et $D = R$, tunc etiam $B = R$, et triangulum rectangulum est; atque tunc

$$a = R = b, \qquad \text{et} \qquad \cot. a = -\cot. b \cos. C = 0.$$

(Errata Ed. I. Tom. II. pagg. 371—372).

Hosted by Google

Sit enim (Fig. 255.) $\triangle$ abc, et verticibus pro polis acceptis, descriptisque quadrantis intervallo arcubus, orietur triangulum novum $\alpha\beta\gamma$, cuius angulus quivis latus prioris trianguli illi angulo oppositum ad $2R$ complet (pag. 279).

Erit (per præcedentia)

$$\cos.\omega = \frac{\cos.\beta - \cos.\alpha \cos.\gamma}{\sin.\alpha \sin.\gamma}.$$

Sed arcus se invicem ad $2R$ complentes sinu eodem gaudent, imo et cosinus nonnisi in eo differunt, quod arcus quadrante minoris positivus sit, et eum ad $2R$ complentis negativus sit: itaque

$$\cos.\omega = -\cos.B, \quad \cos.\beta = -\cos.b, \quad \cos.\alpha = -\cos.a,$$

et

$$\cos.\gamma = -\cos.c; \quad \sin.\alpha = \sin.a, \quad \sin.\gamma = \sin.c.$$

Consequenter

$$-\cos.B = \frac{-\cos.b - (-\cos.a)(-\cos.c)}{\sin.a \sin.c};$$

adeoque

$$\cos.B = \frac{\cos.b + \cos.a \cos.c}{\sin.a \sin.c}.$$

Unde etiam, quum per angulos a, b, c singula latera, nempe A, B, C, determinentur, atque per trium laterum æqualitatem in duobus triangulis, in eadem sphæra ponatur æqualitas triangulorum (pag. 224): manifesto in eadem sphæra per solam angulorum æqualitatem in duobus triangulis ponitur triangulorum æqualitas.

§. 8.

Trianguli sphærici $\mathfrak{ABC}$ (Fig. 243.) autem area t e radio r et angulis α, β, γ prodit modo sequente. Erat (pag. 281) S superficies sphæræ $= 2t + 2a + 2b + 2c$; sed

$$t + a = \frac{r^2 \pi \alpha}{R},$$

nam segmentum hoc a polo $\mathfrak{A}$ ad alterum $\mathfrak{a}$ toties minor ipso S est.

Hosted by Google

quoties minor $\angle\alpha$ ipso $4R$ est; adeoque fit

$$4R : \alpha = 4r^2\pi : t + a.$$

Pariter est

$$t + b = \frac{r^2\pi\beta}{R} \qquad t + c = \frac{r^2\pi\gamma}{R};$$

adeoque

$$t + a + t + b + t + c = \frac{r^2\pi}{R}(\alpha + \beta + \gamma);$$

et

$$\frac{2r^2\pi}{R}(\alpha+\beta+\gamma) = 2(t+a+t+b+t+c) = 2t+2a+2b+2c+4t = S+4t;$$

et hinc

$$t = \frac{2r^2\pi}{4R}(\alpha+\beta+\gamma) - \frac{S}{4} = \frac{r^2\pi}{2R}(\alpha+\beta+\gamma) - r^2\pi = \frac{r^2\pi(\alpha+\beta+\gamma-2R)}{2R}.$$

Scholion 1. Formulæ ad casus quosvis calculo logarithmico adaptatæ reperiuntur in tabellis, tabulis trigonometricis plerumque adnexis.

Ex. gr. In §. 6. (pag. 299) erat

$$\cos. b = \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \sin. A}.$$

Sed erat (pag. 135) $\cos. b = 1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2} b$; et hinc

$$1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2} b = \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \sin. A};$$

atque hinc

$$\cos. B - \cos. C \cos. A = \sin. C \sin. A - 2\sin.^2 \frac{1}{2} b \sin. C \sin. A,$$

et

$$\sin.^2 \frac{1}{2} b = \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A - \sin. C \sin. A}{-2\sin. C \sin. A} = \frac{\cos.(C-A) - \cos. B}{2\sin. C \sin. A}.$$

Ponatur

$$C - A = x - y = d, \qquad B = x + y = s;$$

erit

$$x = \frac{B + C - A}{2}, \qquad y = \frac{B - C + A}{2};$$

nempe

$$\frac{s+d}{2} = x, \qquad \frac{s-d}{2} = y;$$

eritque

$$\cos. s = \cos. (x+y) = \cos. \frac{s+d}{2} \cos. \frac{s-d}{2} - \sin. \frac{s+d}{2} \sin. \frac{s-d}{2}$$

et

$$\cos. d = \cos. (x-y) = \cos. \frac{s+d}{2} \cos. \frac{s-d}{2} + \sin. \frac{s+d}{2} \sin. \frac{s-d}{2};$$

adeoque

$$\cos. d - \cos. s = 2 \sin. \frac{s+d}{2} \sin. \frac{s-d}{2} =$$

$$= \cos. (C-A) - \cos. B = 2 \sin. \frac{B+C-A}{2} \sin. \frac{B-C+A}{2};$$

quod item, si $\frac{A+B+C}{2}$ dicatur S, erit

$$= 2 \sin. (S-A) \sin. (S-C).$$

Consequenter

$$\sin.^2 \frac{1}{2} b = \frac{\sin. (S-A) \sin. (S-C)}{\sin. A \sin. C},$$

et

$$\log. \sin. \frac{1}{2} b = \frac{\log. \sin. (S-A) + \log. \sin. (S-C) - \log. \sin. A - \log. \sin. C}{2}.$$

Quæ formula ab ea, quæ (pag. 143) in trigonometria plana pro angulo e tribus lateribus relata est, nonnisi in eo differt, quod in membro æquationis ad dextram sinus deleatur.

Pariter $\cos. \frac{1}{2} b$ reperitur; nempe sinus sæpe ambiguum esse potest, quum acuto obtusoque eum ad $2R$ complenti sinus idem respondeat; cosinus autem negative prodiens angulum recto maiorem indicet, uti tangens et cotangens. Est (pag. 135) $2 \cos.^2 \frac{1}{2} b - 1 = \cos. b$; atque hinc

$$\frac{\cos. B - \cos. (C+A)}{2 \sin. C . \sin. A} = \cos.^2 \frac{1}{2} b;$$

atque si B ponatur d, et $C+A$ ponatur s, fiet

$$\cos. B - \cos (C+A) = 2 \sin. \frac{A+B+C}{2} \sin. \frac{C+A-B}{2}$$

et

$$\cos.^2 \frac{1}{2} b = \frac{\sin. S \sin. (S-B)}{\sin. A \sin. C}.$$

Hosted by Google

Scholion 2. Applicationes etiam quasdam trigonometriæ sphæricæ adferre in Tyronum gratiam supervacuum haud erit.

1. Satis omnium constat, dum sol in æquatore est, ubivis terrarum æquinoctium esse, exceptis polis ipsis: nam æquator et horizon duo circuli maximi bisecant se ubique, nisi coincidant, quod nonnisi pro polis fit; itaque ubivis præter polos, semicirculus est supra et infra horizontem; pro polis autem tunc totus circulus per 24 horas in horizonte percurritur; refractio (per se quoque variabilis) nunc haud consideratur.

Dicitur (Fig. 256.) sectio f æquatoris afd cum horizonte mfj, a meridiano mahp versus orientem, *cardo orientis*; et si sol supra vel infra æquatorem sit, describatque apparenter circulum *C* æquatori parallelum: arcus horizontis a cardine orientis usque ad sectionem p circuli *C* cum horizonte (a meridiano versus orientem) dicitur *amplitudo ortiva*; quæ post æquinoctium vernale in hemisphærium boreale, post æquinoctium autumnale autem in australe cadit. Itaque arcus fp cadit æstate supra æquatorem, hieme infra.

Si a polo nostro p ad alterum ducatur per p (amplitudinis ortivæ a cardine orientis incipiendo finem) semicirculus, hic æquatorem secabit, fiat hoc in d; secet *C* meridianum supra horizontem in h, et æquator secet meridianum in a; erit ph arcus solis ab ortu ad meridiem usque decurrendus, atque æquatoris arcus da totidem graduum erit. Est vero motus terræ circa axem uniformis, et circuli paralleli cum æquatore revolutionem tempore 24 horarum simul absolvunt, et fa quadrans a f usque in meridianum 6 horas habet. Si igitur d ultra f sit, arcus fd in tempus converti, et hoc tempus addi 6 horis debet (uti æstate fit); si vero d inter meridianum et f fuerit (ut hieme), tum fd in tempus conversum e 6 horis subtrahendum est, ut tempus ab ortu ad meridiem prodeat; cuius duplum, diem totum supra horizontem, et differentia huius a 24 horis noctem exhibet.

In triangulo sphærico fpd ad d rectangulo, dato angulo *b* ad f, qui (nempe angulus plani æquatoris cum horizonte) *altitudo aequatoris* audit, datoque arcu dp (latere *B* ipsi *b* opposito), qui est *declinationi* solis æqualis, reperitur arcus fd (id est *A*) per (pag. 294); est nempe

Hosted by Google

$$\sin. A = \frac{\text{tang.}\, B}{\text{tang.}\, b} \quad \text{et} \quad \log. \sin. A = \log. \text{tang.}\, B - \log. \text{tang.}\, b,$$

pro radio 1 (pag. 140).

Dicitur nempe *declinatio* stellæ cuiusvis arcus circuli maximi a stella ad æquatorem perpendicularis; adeoque dum sol in ♃ oritur, eius declinatio ♃♁ est. Dicitur etiam ♀♁ *differentia ascensionalis* solis: nempe *recta ascensio* stellæ est arcus æquatoris ad orientem, e puncto æquinoctii vernalis usque ad arcum declinationis; et *obliqua ascensio* stellæ dicitur arcus æquatoris, ab eodem puncto vernali usque ad ♀ cardinem orientis, tanquam punctum æquatoris illud, quod cum stella simul in horizonte est, adeoque simul oritur; uti hic punctum ♀ æquatoris et sol in ♃ existens simul oriuntur. Patet itaque ♀♁ differentiam ascensionalem esse, eamque, dum sol in æquatore est, $= 0$ fieri; nam tum ♃ et ♀ coincidunt.

Si vero quæratur: pro declinatione B solis, quantanam altitudo b æquatoris esse debeat, ut dies ex. gr. 22 horarum fiat? Dimidium huius erit 11, unde subtracto 6, residuum 5 in gradus conversum erit $= A$; atque in triangulo sphærico ad ♁ rectangulo ex B et A reperietur b (per pag. 294), ubi $\text{tang.}\, B = \sin. A\, \text{tang.}\, b$.

Si quæstio eadem pro 24 horis fuerit: tum e dimidio ipsius 24 subtracto 6, manet 6; et hoc in arcum conversum æquale quadranti erit, itaque ♀ polus ipsius B erit; adeoque $B = b$; nempe declinatio solis æqualis altitudini æquatoris.

2. *Gnomonica* etiam, certo sensu ad *unicum problema reductum*, ope trigonometriæ sphæricæ facile resolvitur.

Concipiatur nempe terra quasi globus transparens vacuus superficie vitrea, solo axe opaco; et concipiatur sol sive in æquatore, sive ei parallele circulum describere, radio ad axem terræ perpendiculari, haud considerato eo motu solis annuo, quo apparenti diurno contrarie movetur quotidie.

Concipiatur porro planum quodvis P per centrum ♀ sphæræ (Fig. 257. eam in circulo maximo C secans (sed extra polum, de quo inferius dicetur); et perpendicularis ad P e centro ♀ erecta secet superficiem in ♂, sintque poli ♀ et ♃; erit P loci ♂ *planum horizontale*, et recta ♂♀

linea verticalis, atque planum $\mathfrak{P}\mathfrak{m}\mathfrak{k}$ *planum meridiani* illius loci est; ac si demittatur ex $\mathfrak{P}$ (polo supra horizontem) perpendicularis $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ ad P, $\wedge\mathfrak{P}\mathfrak{k}\mathfrak{P}'$ *altitudo poli* loci $\mathfrak{m}$ dicitur. Secet recta $\mathfrak{k}\mathfrak{P}'$ superficiem sphæræ in $\mathfrak{P}''$, erit arcus $\mathfrak{P}\mathfrak{P}''$ æqualis altitudini poli; et secet meridianus æquatorem in $\mathfrak{m}'$.

Dividatur æquator in partes æquales 24 (aut 2.24, 4.24 &c.) ab $\mathfrak{m}'$ incipiendo, fiantque per divisionis puncta circuli maximi ad polum: manifesto centrum et uterque polus, adeoque axis omnibus communis erit; dicuntur autem omnes hi *circuli horarii*, et anguli, quos cum quadrante $\mathfrak{P}\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ faciunt ad $\mathfrak{P}$, *anguli horarii* dicuntur.

Si iam sol in æquatore aut circulo ei parallelo, e meridiano $\mathfrak{P}\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ uniformiter motus, describat arcum quempiam α, erit α quoad gradus quantitas anguli, quem planum meridiani cum plano p per axem et solem posito facit; eruntque anguli verticales planorum horum æquales. Manifesto autem umbra axeos in planum p, et ad planum P infra axem cadit, (si non in hemisphærio boreali, fiet in australi); atque nonnisi punctum illud $\mathfrak{q}$ quæritur, in quo peripheria C per planum p secatur; tum enim recta $\mathfrak{k}\mathfrak{q}$, e centro $\mathfrak{k}$ ad $\mathfrak{q}$, linea horaria in plano P erit; id est si ex. gr. $\alpha = \frac{n \cdot 360^\circ}{24}$ sit versus occidentem, dum umbra axeos tanquam stili in $\mathfrak{k}\mathfrak{q}$ cadet: erit tempus ante meridiem, ab ea n horis distans.

Innotescit autem $\mathfrak{k}\mathfrak{q}$ (Fig. 257*.) per angulum, quo a $\mathfrak{k}\mathfrak{P}''$ (nempe recta, in qua planum meridianum secat planum P) distat, e triangulo sphærico $\mathfrak{P}\mathfrak{P}''\mathfrak{q}$ ad $\mathfrak{P}''$ rectangulo; si enim detur A altitudo poli = arcui $\mathfrak{P}\mathfrak{P}''$, et angulus horarius $b = \wedge\mathfrak{q}\mathfrak{P}\mathfrak{P}''$: prodit arcus $\mathfrak{q}\mathfrak{P}''$, nempe in triangulo sphærico ad $\mathfrak{P}''$ rectangulo latus B angulo b oppositum; scilicet (pag. 294) tang. B = sin. A tang. b.

Atque ita lineæ pro quavis hora in P determinari poterunt; et quum sensu physico idem sit, sive per centrum sit P, sive P' ei parallelum per $\mathfrak{m}$ ad superficiem terræ positum fuerit, si et stilus umbram proiiciens axi terræ parallele ponatur; id est error sensibus perceptibilis inde, nec propter *refractionem* radiorum, nec *parallaxim* (id est angulum, quem rectæ e centro et superficie terræ ad solem faciunt) exsurgat: monstrabuntur per umbram stili horæ, si in P' e centro $\mathfrak{m}$ ducatur me-

Hosted by Google

ridiana, id est sectio plani meridiani cum P', et eo scribatur XII; atque ad angulos repertos ductis lineis horariis, adscribantur numeri horarum, recedendo a XII per numeros XI, X, . . ., dum sol versus orientem est, et progrediendo per I, II, . . . sole ad occasum vergente. Et hoc præbet loco $\mathfrak{m}$ *horologium horizontale.*

Sed eidem plano P parallelum quocunque ad superficiem terræ latum, simul cum omnibus lineis in eo designatis et axe, ita ut omnes lineæ locis prioribus parallelæ maneant, ubique idem monstrabunt, nempe horas pro loco $\mathfrak{m}$. Consequenter, si meridiani loci huius $\mathfrak{M}$ differentia a meridiano loci $\mathfrak{m}$ in arcu æquatoris data fuerit, hac in tempus conversa, nonnisi horarum numeros aliter scribere necesse erit; nempe si $\mathfrak{m}$ ab $\mathfrak{M}$ distet $\frac{360^\circ}{24}$ versus orientem, ibi XII una hora citius eveniet, ita reliqua; adeoque XII pro I et XI pro XII & scribere oportet.

Quodvis planum P' autem in loco $\mathfrak{M}$ fuerit, illud pro aliquo loco $\mathfrak{m}$ horizontale erit; adeoque nonnisi illius loci *altitudo poli* et *distantia meridianorum* locorum $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{M}$ quærenda est: quod (quum res tota praxim respiciat) facile fit, erigendo e puncto $\mathfrak{p}$ plani P' perpendicularem L, quæ punctum *zenith* loci $\mathfrak{m}$ respicit, ponendoque per idem punctum $\mathfrak{p}$ planum meridiani loci $\mathfrak{M}$, et ex eodem puncto ponendo rectam β axi terræ parallelam; angulus enim huius rectæ cum plano est æqualis altitudini poli in $\mathfrak{m}$, et angulus, quem planum per β ad P' perpendiculariter positum cum plano meridiani loci M (in quo β adest) facit, differentia meridianorum locorum $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{M}$ est; nimirum si β tanquam axis terræ spectetur, omnibus meridianis communis erit. Mensuratis itaque his duobus angulis, numeris per dicta mutatis, horologium pro $\mathfrak{M}$ inserviet.

Scholion 3. Quum sphæra (ut dictum est) sola cum plano id commune habeat, ut circa quodvis sui punctum in se moveri queat: in hac arcus circuli maximi rectæ vicem subire, imo alii circuli quoque describi, et motus componi possunt. Ita si *per arcum* arcus circuli maximi, per *distantiam puncti* $\mathfrak{p}$ a *puncto* $\mathfrak{b}$ autem arcus $\mathfrak{pb}$, per *distantiam puncti* $\mathfrak{p}$ *ab arcu* C arcus $\mathfrak{pp}'$ ad C perpendicularis intelligatur, et $\mathfrak{p}'$ *locus* puncti $\mathfrak{p}$ ad C *reductus* dicatur, definitiones dictæ fient breviores: nempe stellæ distantia ab æquatore est *declinatio*, ab ecliptica *latitudo*, a ho-

Hosted by Google

rizonte *altitudo* (uti *poli altitudo*); distantia a puncto vernali (orientem versus) stellæ ad æquatorem reductæ *recta ascensio*, illius æquatoris puncti, quod sub cardine orientis stella oriente est, *obliqua ascensio*, ad eclipticam reductæ *longitudo*, et distantia a *cardine australi* stellæ ad horizontem reductæ *azimuth* dicuntur. Dividit nempe *meridianus* cum *meridionali* item verticali, (sive cum æquatore, quum utrumque ad meridianum perpendiculare sit) horizontem in quatuor quadrantes, fiuntque quatuor *cardines*, quorum duo meridiani et duo meridionalis *poli* fiunt, uti *zenith* in medio meridiani *polus* horizontis est.

·32.

Campum ampliorem peragrare, huius opusculi (si Deus valetudini *et alioquin* benignius faverit) supplemento reservaturus, in *Appendice* ea pars Matheseos applicatæ sequitur, quæ e Matheseos anno ad cursus physici annum relinqui haud potest: nempe *primae lineae Perspectivae*, *Gnomonicae*, et *Chronologiae*.

·32. Formæ quæ rectarum operationumque primitivarum numero certo generari nequeunt: ex. gr. si figuræ, quæ ita generari nequit, omnibus punctis rectæ ad idem punctum, vel ad eandem rectam parallelæ, cogitentur; et tanto magis si sectio formæ cuiuspiam cum complexu rectarum dictarum quæratur, quod etiam *Perspectivae* problema est, si figuræ vicem qualisvis forma subeat. Verbo omnes formæ, quæ motu e tribus aut pluribus composito, sive modo in arbore exposito per tres rectas perpendiculares, sive motu in quavis forma certa lege facto, generantur, una cum omnibus iis, quæ e compositione horum oriuntur, huc pertinent.

Hosted by Google

APPENDIX TRIPLEX.

I. DE PERSPECTIVA.

Si quid A, punctum vel linea aut aliud quidpiam e spatio fuerit, atque superficies certa T positione detur; sitque punctum $\mathfrak{O}$ item positione datum tale, ut recta quævis ex A usque ad $\mathfrak{O}$ ducta cum T aliquid commune habeat: quæri potest

1. Complexus omnis eius, quod recta quæpiam ex $\mathfrak{O}$ ad aliquod punctum ipsius A ducta cum T commune habet; diciturque complexus iste *imago* obiecti A in *tabula* T *pro oculo* $\mathfrak{O}$, et data singulorum positione erga se invicem.

2. Potestque etiam supponi, ut punctum $\mathfrak{O}$ in recta certa $\mathfrak{O}t$ a T dabili quovis ulterius recedat, atque limes geometricus imaginis ipsius A in tabula T quæri; et si ex. gr. T planum sit, potest recta dicta perpendicularis ad tabulam, item tabula *horizontalis*, aut *verticalis* esse; aut potest recta dicta cum tabula dimidium rectum facere, aut alium quemvis.

3. Quum tria sint, nempe *oculus*, *obiectum* et *imago*; e quibusvis duobus tertium quæri potest: adeoque e dato obiecto eiusque imagine etiam locus oculi quæri potest; imo etiam e data imagine in tabula, et loco oculi, quæri obiectum A potest. Quo etiam *Gnomonica* pertinet; ubi nempe sol puncti $\mathfrak{O}$ vicem subit, stilus ut imago in tabula T spectari potest, quæ si ex umbra illius in datam superficiem proiecta rectæ ad $\mathfrak{O}$ ducerentur, in T describeretur; atque hic umbra hæc tanquam obiectum e stilo tanquam imagine, pro dato loco puncti $\mathfrak{O}$ quæritur.

Hosted by Google

§. 1.

Problemata hæc resolvere obiectum *Perspectivae* est. Casus simplicissimus est, si *tabula T planum* sit, et quidem aut *horizontale* aut *verticale*.

Si tabula T horizonti parallela sit, et $\mathfrak{Ot} \perp T$ atque $\mathfrak{O}$ dato quovis ulterius recedat (seu ut dici solet, oculus in zenith in infinito sit): limes imaginis geometricus talis est, ut *quaevis recta* $\mathfrak{AB}$ *horizonti parallela imagini suae* $\mathfrak{ab}$ *aequalis sit.* Nam tum $\mathfrak{Aa}$ et $\mathfrak{Bb}$ ad T perpendiculares sunt; adeoque parallelæ, per duo plana parallela sectæ, efficiunt parallelogrammum $\mathfrak{ABba}$. Hunc in finem delineantur sectiones per planum ad superficiem terræ horizontale ædificiorum exstruendorum, Grundriſz dictæ. Manifesto etiam quævis linea in planum ad tabulam parallelum cadens imagine sibi æquali gaudet.

Rectae ad tabulam perpendicularis autem imago punctum est, et quaevis recta $\mathfrak{PQ}$ *ad tabulam nec parallela nec perpendicularis imagine sua maior est.* Si enim $\mathfrak{P}$ superius situm fuerit, quam $\mathfrak{Q}$; sit ad tabulam perpendicularis $\mathfrak{Pp}$ ex $\mathfrak{P}$, et perpendicularis $\mathfrak{Qq}$ ex $\mathfrak{Q}$; erit $\mathfrak{pq}$ imago rectæ $\mathfrak{PQ}$; atque ex $\mathfrak{P}$ parallela $\mathfrak{PP'}$ ad $\mathfrak{pq}$ (usquequo rectam $\widetilde{\mathfrak{Qq}}$ secat) erit $= \mathfrak{pq}$, et in triangulo $\mathfrak{PP'Q}$ erit hypotenusa $\mathfrak{PQ} >$ catheto $\mathfrak{PP'}$. (Fig. 258.)

Ita si ad polum concipiatur planum T tangens: erit hoc ibidem horizontale, æquatori parallelum; et si ab æquatore incipiendo, ex omnibus hemisphærii punctis demittantur ad T perpendiculares, prodibit superficiei hemisphærii terræ talis imago. Et manifesto pro quovis circulo æquatori parallelo, cuius radius est *cosinus latitudinis* (id est arcus quo ab æquatore in quadrante usque ad polum ducto distat), seu sinus distantiæ a polo; prodibit in imagine quoque circulus æqualis; sed pro distantia duorum circulorum parallelorum, nempe arcu illo α (quadrantis ab æquatore usque ad polum ducti), qui ab uno circulo usque ad alterum est, erit imago sin. vers. γ — sin. vers. $(\gamma - \alpha)$ (Fig. 259.).

Si tabula T verticalis, et recta $\mathfrak{Ot} \perp T$, atque $\mathfrak{O}$ in $\widetilde{\mathfrak{Ot}}$ removeatur in infinitum, adinstar orientis solis: pariter quævis linea in planum ad

Hosted by Google

tabulam parallelum cadens imagine sibi æquali gaudet, rectæ ad tabulam perpendicularis autem imago punctum est, et quævis recta ad tabulam nec parallela nec perpendicularis imagine sua maior est. Aedificiorum facies ita delineatur.

Si tabula *T* item verticalis, at Ot cum *T* et simul cum horizonte efficiat 45°, atque sensu dicto removeatur oculus in infinitum: vocatur eiusmodi perspectiva Vogelperſpektive; quum aves in altum sæpe ad talem angulum sublatæ, hoc visu gaudeant. Multa hoc modo videri possunt, quæ in prioribus celantur. Suntque heic tam *horizontalium linearum quam verticalium imagines aequales.* Sit enim (Fig. 260.) PQ horizontalis, PS verticalis; erunt triangula Pkp et Qkq æquicrura propter angulum 45 graduum; itaque Qk=qk, et Pk=pk; consequenter PQ=pq. Est etiam PSpj parallelogrammum, adeoque PS = pj.

Scholion 1. Possunt autem omnes istæ imagines dictæ maiores minoresve similes construi, quasi maiorum minorumve similium imagines essent.

Scholion 2. Si cuiusvis puncti imago eo colore lucisque gradu in tabula posita fuerit, ut inde radii ita in oculum veniant, quasi ex obiecto venirent: retina ab imagine ita afficietur ut ab obiecto; at hinc sequitur oculum hunc in finem eo locandum esse, unde obiecti imago per tabulam excepta fuit. Et sequitur etiam tales imagines construi posse, ut radii ita veniant, quasi ex. gr. in Londini plateam sub stellifero cœlo inspiceretur; quod tamen fit imaginibus exactis, debite illuminatis intra focum lentium convexarum ita sitis, ut ad debitam distantiam removeantur imagines magnitudine naturali, unde radii ita veniant, quasi ab obiectis ipsis venirent.

§. 2.

(Fig. 261.) *Distantia puncti a plano* dicitur omnino perpendicularis e puncto ad planum. Sit *D* distantia oculi O a tabula *T*, et *d* distantia a *T* puncti P (tanquam obiecti ultra tabulam siti); quodvis *planum P* horizontale pro lubito acceptum *fundamentale* dicitur, et sectio huius cum tabula *linea fundamentalis* vocatur; perpendicularis PP′ ex P ad

Hosted by Google

P vero *altitudo* obiecti $\mathfrak{P}$ dicitur, et si perpendicularis ex $\mathfrak{P}'$ ad tabulam adeoque lineam fundamentalem in $\mathfrak{P}''$ cadat, dicitur $\mathfrak{P}''$ *punctum obiecti* $\mathfrak{P}$, uti $\mathfrak{O}'$, si perpendicularis ex oculo ad tabulam in $\mathfrak{O}'$ cadat, *punctum oculi* vocatur. Patet $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ esse distantiæ obiecti $\mathfrak{P}$ æqualem. *Linea* horizontalis per punctum oculi in tabula vocatur *linea oculi*. Recta $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ (nempe punctum oculi cum puncto obiecti connectens) dicitur *linea punctorum*; et si in lineam oculi ex $\mathfrak{O}'$ puncto oculi translata distantia *D* oculi in $\mathfrak{D}$ terminetur, et in lineam fundamentalem translata ex $\mathfrak{P}''$ puncto obiecti in alteram respectu $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ (lineæ punctorum) plagam distantia *d* obiecti $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{d}$ terminetur: recta $\mathfrak{D}\mathfrak{d}$ *linea distantiarum* dicitur; atque si recta ex $\mathfrak{P}''$ ad lineam fundamentalem in tabula perpendiculariter altitudini obiecti æqualis erecta in $\mathfrak{A}$ terminetur: recta $\mathfrak{O}'\mathfrak{A}$ *linea altitudinis* audit.

His denominationibus positis, *imago obiecti* $\mathfrak{P}$ *in tabula T erit, ubi verticalis ex intersectione lineae punctorum et lineae distantiarum erecta lineam altitudinis secat*; si nempe sectio rectarum $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ et $\mathfrak{D}\mathfrak{d}$ sit $\mathfrak{q}$, et verticalis ex $\mathfrak{q}$ secet rectam $\mathfrak{O}'\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{p}$, erit $\mathfrak{p}$ imago puncti $\mathfrak{P}$.

Etenim

I. (Fig. 262.) quodcunque punctum $\mathfrak{k}$ tabulæ fuerit, si recta ex oculo $\mathfrak{O}$ ad rectam $\mathfrak{k}\mathfrak{P}$ parallela tabulam in $\mathfrak{K}$ secet: imago $\mathfrak{p}$ puncti $\mathfrak{P}$ in recta $\mathfrak{K}\mathfrak{k}$ inter $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{k}$ erit. Nam tum rectæ $\mathfrak{O}\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{k}\mathfrak{P}$ parallelæ in plano sunt, et rectæ $\mathfrak{k}\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{O}\mathfrak{P}$ se invicem secando in idem planum cadunt.

Hinc autem (Fig. 261.) quum punctum $\mathfrak{P}'$ in planum fundamentale cadat, imago eius in $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ cadit; quia $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$ et $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ sunt parallelæ, nempe ad tabulam perpendiculares sunt.

II. Si igitur imago ipsius $\mathfrak{P}'$ dicatur $\mathfrak{i}$, id est recta $\mathfrak{O}\mathfrak{P}'$ tabulam in $\mathfrak{i}$ secuerit: $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{O}\mathfrak{P}'$ inter $\mathfrak{O}'$ et $\mathfrak{P}''$ cadet; eruntque triangula $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\mathfrak{i}$ similia, quia $\mathfrak{O}\mathfrak{O}' \parallel \mathfrak{P}''\mathfrak{P}'$, et anguli ad $\mathfrak{i}$ verticales sunt. Itaque

$$\mathfrak{O}\mathfrak{O}' : \mathfrak{P}''\mathfrak{P}' = \mathfrak{O}'\mathfrak{i} : \mathfrak{i}\mathfrak{P}'',$$

seu (si $\mathfrak{O}'\mathfrak{i}$ dicatur x, et $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ dicatur a) est

$$D : d = x : a - x;$$

Hosted by Google

atque hinc $Da - Dx = dx$, adeoque

$$x = \frac{Da}{D+d}.$$

Sed in triangulis $\mathfrak{O}'\mathfrak{D}\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{P}''\mathfrak{d}\mathfrak{q}$ est

$$D : d = \mathfrak{O}'\mathfrak{q} : \mathfrak{q}\mathfrak{P}''$$

seu (si $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}$ dicatur y) est $D : d = y : a - y$, adeoque

$$y = \frac{Da}{D+d} = x.$$

III. Imago ipsius $\mathfrak{P}$ omnino in rectam ex $\mathfrak{q}$ verticalem cadit, fiat id in $\mathfrak{p}'$; erunt triangula $\mathfrak{O}\mathfrak{q}\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{O}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}$ similia, quum plani verticalis $\mathfrak{O}\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ sectio cum tabula, verticalis $\parallel \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ sit; suntque et triangula $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'\mathfrak{q}$, $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\mathfrak{q}$, necnon triangula $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''\mathfrak{A}$ similia. Hinc

$$\mathfrak{O}\mathfrak{P}' : \mathfrak{O}\mathfrak{q} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}',$$

et

$$\mathfrak{O}\mathfrak{q} : \mathfrak{q}\mathfrak{P}' = \mathfrak{O}'\mathfrak{q} : \mathfrak{q}\mathfrak{P}''$$

adeoque

$$\mathfrak{O}\mathfrak{P}' : \mathfrak{O}\mathfrak{q} = \mathfrak{O}'\mathfrak{P}'' : \mathfrak{O}'\mathfrak{q},$$

et hinc

$$\mathfrak{O}'\mathfrak{P}'' : \mathfrak{O}'\mathfrak{q} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}'.$$

Estque e similitudine postrema

$$\mathfrak{O}'\mathfrak{P}'' : \mathfrak{O}'\mathfrak{q} = \mathfrak{A}\mathfrak{P}'' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}.$$

Consequenter

$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}' = \mathfrak{A}\mathfrak{P}'' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}.$$

Itaque quum $\mathfrak{P}\mathfrak{P}' = \mathfrak{A}\mathfrak{P}''$ sit, est etiam $\mathfrak{q}\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}\mathfrak{p}$.

Si vero $\mathfrak{P}$ infra planum fundamentale fuerit: erit altitudo (quasi negativa) in perpendicularem ex $\mathfrak{P}''$ infra lineam fundamentalem transferenda. Et quotvis punctorum obiecti numerabilium imagines reperiri poterunt: at si trianguli $\mathfrak{abc}$ imago quæratur, nonnisi punctorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ imagines quærere necesse erit: si enim punctorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ imagines $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ fuerint, rectæ $\mathfrak{ab}$ imago recta $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ erit; nam in plano $\mathfrak{Oab}$ rectæ $\mathfrak{Oa}$

Hosted by Google

circa $\mathfrak{O}$ usque in $\mathfrak{O}\mathfrak{b}$ mota, simul per $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ ab $\mathfrak{a}'$ usque in $\mathfrak{b}'$ movebitur, et cuivis puncto cuiusvis rectarum $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ punctum alterius respondebit.

§. 3.

Si vero data recta $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ tanquam obiecto, et data imagine $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ eius, *quaeratur situs oculi* $\mathfrak{O}$: ubi $\mathfrak{A}\tilde{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{P}''\tilde{\mathfrak{q}}$ se invicem secabunt, ibi erit $\mathfrak{O}'$; et $\mathfrak{D}$ erit, ubi $\mathfrak{d}\tilde{\mathfrak{q}}$ lineam per $\mathfrak{O}'$ horizontalem secabit; et perpendicularis ad tabulam ex $\mathfrak{O}'$ erectæ, ipsi $\mathfrak{O}'\mathfrak{D}$ æqualis, extremitas erit situs oculi $\mathfrak{O}$; nam pro dato hoc oculi et obiecti situ, imago (per præcedentia) $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ erit.

Si vero (Fig. 263.) recta $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, eiusque imago $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ data fuerint: situs oculi innotescit modo sequente. Fiant ex $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ ad planum fundamentale perpendiculares $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$, atque ex $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}'$ fiant ad lineam fundamentalem perpendiculares $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ et $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$, et altitudines $\mathfrak{P}''\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q}''\mathfrak{A}'$ punctorum $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$; ducanturque rectæ $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{A}'\mathfrak{q}$: ubi hæ se invicem secabunt, ibi erit $\mathfrak{O}'$; et in tabula per hoc punctum $\mathfrak{O}'$ linea horizontali ducta, et translata ex $\mathfrak{P}''$ distantia $d = \mathfrak{P}''\mathfrak{P}'$, secet $\mathfrak{d}\tilde{\mathfrak{p}}'$ lineam horizontalem per $\mathfrak{O}'$ ductam in $\mathfrak{D}$; erit perpendicularis ad tabulam ex $\mathfrak{O}'$ erectæ ipsi $\mathfrak{O}'\mathfrak{D}$ æqualis, extremitas locus $\mathfrak{O}$ oculi. Nempe posito hoc, ipsius $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ imago $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ erit; imago vero unica est.

§. 4.

Pro oculo $\mathfrak{O}$ et imagine $\mathfrak{p}$ autem locus puncti $\mathfrak{P}$ ubique esse in recta $\mathfrak{O}\tilde{\mathfrak{p}}$ potest; uti oculus $\mathfrak{O}$, pro puncto $\mathfrak{P}$ et imagine $\mathfrak{p}$ ubique in recta $\mathfrak{p}\widetilde{\mathfrak{O}}$ esse potest. At etiam qualevis obiectum A fuerit ultra tabulam, ductis ad omnia eius puncta rectis, et omnes rectas per tale α multiplicando, ut quævis rectarum per α multiplicata ultra tabulam terminetur (iuxta pag. 10); omnium hoc pacto generatorum similium imago eadem erit.

Potest imagini certæ obiectum in certa superficie pro dato oculi situ quæri: et hoc respectu potest *Gnomonica* considerari, si ut dictum

Hosted by Google

(pag. 308) est, sol oculi, axis terræ imaginis, et umbra in superficie data obiecti quæsiti vices subeant. Et brevitati consulendo, ceteris prætermissis, transitus fit ad Gnomonicam.

II. DE GNOMONICA.

Fundamento inservit id, quod (pag. 304) dictum est: et sensu ibidem exposito, sphæra pellucida axe adiaphano axi terræ parallelo, ubique horologii vicem subire potest; atque (per ibidem dicta) in plano etiam quovis, quod axi terræ parallelum non est, ad superficiem terræ quoque ubivis horologium construi potest.

Non aliud igitur quoad horologia in plano exstruenda restat, nisi referre:

1. quomodo in planis axi terræ parallelis horologia construi queant;
2. quomodo horologium idem diversis locis inservire queat,
3. quomodo horologium etiam locum solis in ecliptica tempusque ortus et occasus eius (quovis die sive certis dierum intervallis) indicare queat.

Planum verticale ubivis ad planum meridiani perpendiculare dicitur *meridionale* loci illius; et quum per lineam verticalem innumera plana verticalia dentur, dicitur planum *verticale primarium*. Planum æquatori parallelum ubivis ad terram dicitur *aequinoctiale*. Planum per axem terræ et cardines orientis occidentisque dicitur *polare*, planum verticale per polum autem dicitur *planum meridiani*, et huius sectio cum horizonte vocatur *meridiana horizontalis*, atque sectio eius cum quavis superficie *meridiana superficiei illius* dicitur. Horologia in iis describenda (*primaria* dicta) nomina a planis iis sortiuntur; et (præter horizontalia) dicuntur *aequinoctialia*, *polaria*, *meridionalia*, *meridiana*; sed postremum duplex est, prouti superficies orientem vel occidentem respicit, atque eatenus dicitur horologium *orientale* vel *occidentale*; ita *meridionale* duplex est, nempe *septemtrionale* et *australe*, prouti superficies septemtrioni vel austro obversa est; et *aequinoctiale* duplex est, *superius* versus boream, et *inferius* versus austrum; ita *polare* quoque,

Hosted by Google

superius et *inferius* est. Et præterea si planum horizontale circa meridianam, aut meridionale circa verticalem vertatur, vocatur horologium *declinans*, si æquinoctiale aut meridionale circa cardines orientis occidentisque vertatur, vocatur *inclinans*. Si vero declinans ex. gr. meridionale circa sectionem eius cum horizonte factam vertatur, *deinclinans* dicitur propter duplicem inclinationem ☿.

Patet autem planum polare ad æquatorem horizontale esse, nec non planum meridiani ad distantiam 90 graduum in æquatore esse horizontale; et æquinoctiale ad polum horizontale esse; axemque esse in hoc ad planum horologii perpendicularem; uti in horologiis, tam in plano polari, quam in meridiano, axem (seu stilum umbram monstrantem) plano horologii parallelum esse.

§. 1.

Superius (pag. 305) fuit

$$\text{tang.}\, B = \text{sin.}\, A\ \text{tang.}\, b,$$

ubi A altitudinem poli, b angulum horarium ad polum (a plano meridiani incipiendo), et B latus angulo b in triangulo sphærico rectangulo oppositum denotat; atque A altitudo poli et B angulus a meridiana incipiendo in plano dato, ad centrum terræ horarius, *catheti* sunt.

Si $A = 90^\circ$ fuerit, uti in plano æquinoctiali, fiet

$$\text{tang.}\, B = \text{sin.}\, A\ \text{tang.}\, b = 1\,.\ \text{tang.}\, b\,;$$

atque $B = b$; fietque nB ex B, dum nb fit ex b. Itaque in plano æquinoctiali circulus a meridiano incipiendo per 24 æqualiter dividitur.

Pro $A = 0$ autem, uti ad æquatorem pro plano horizonti æquatoris parallelo est, fit $\text{tang.}\, B = 0$, nam $\text{sin.}\, A = 0$; nec iuxta ibidem dicta pro hoc casu, nempe dum axis terræ in planum cadit, triangulum sphæricum dictum datur.

At quodcunque planum Q fuerit, in quod axis terræ incidit: bisecabit hoc æquatorem ex. gr. in $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$, et planum superficiem terræ in illo æquatoris puncto $\mathfrak{K}$ tangens, quod a $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ quadrante distat, ipsi Q parallelum erit; dicatur planum illud q.

Hosted by Google

Sit recta 𝔄𝔅 (Fig. 264.) æquatorem in puncto 𝔎 tangens: et dividatur æquator ex 𝔎 incipiendo in 24 partes æquales; atque ducantur ad tangentem dictam e 𝔣 centro æquatoris, per puncta divisionis, rectæ 𝔣𝔞, 𝔣𝔟, 𝔣𝔠, . . . 𝔣𝔞′, 𝔣𝔟′, 𝔣𝔠′, . . . Erunt 𝔎𝔞, 𝔎𝔟, 𝔎𝔠, . . . uti 𝔎𝔞′, 𝔎𝔟′, 𝔎𝔠′, . . . tangentes angulorum 15°, 30°, 45°, . . . pro radio 𝔣𝔎; nempe anguli ex 𝔣𝔎 incipiendo 15 gradibus crescunt, quia $\frac{360}{24} = 15$.

Sit 𝔭𝔭 axis terræ, cuius meditullium 𝔣 centrum terræ est, et planum æquatoris dicatur a, planum vero per axem 𝔭𝔣𝔭 et 𝔎 punctum æquatoris determinatum dicatur p; axis ad æquatorem perpendicularis est, adeoque et $p \perp a$; item 𝔣𝔎 ad q (nempe planum in 𝔎 tangens) perpendicularis est; adeoque quum 𝔣𝔎 in a sit, est $a \perp q$; itaque duo plana p et q fiunt ad tertium a perpendicularia, punctoque 𝔎 communi gaudent. Consequenter sectio eorum 𝔎𝔎′ est ad a perpendicularis, adeoque cum perpendiculari ad 𝔄𝔅 ex 𝔎 in q erecta coincidet.

Cadetque umbra axeos, sole in plano p supra planum q existente, in planum q proiecta in rectam 𝔎𝔎′. Si vero inde porro in æquatore ex. gr. arcum 15° describat ad lævam; erit umbra centri manifesto in 𝔞′, et in 𝔟′, si sol 2 . 15° descripserit ☉. At umbra axeos in q, erit semper perpendicularis in q e puncto rectæ 𝔄𝔅 illo erecta, in quod umbra centri cadit. Nam ex. gr. dum umbra centri in 𝔞′ est, axis et 𝔞′ determinant planum, in quod umbra axeos cadit; est nempe hæc sectio plani huius cum q (propter punctum 𝔞′ utrique commune) facta. Est autem recta 𝔞′𝔞″, in qua sectio ista fit, axi parallela; quia in eodem plano est, nec tamen secat axem, quia q parallelum axi cum hoc nil commune habet. Sed axis rectæ 𝔎𝔎′ parallelus est; itaque quum eidem rectæ tam 𝔎𝔎′ quam 𝔞′𝔞″ parallela sint, est quoque 𝔞′𝔞″ ∥ 𝔎𝔎′; consequenter et 𝔞′𝔞″ ad 𝔄𝔅 ex 𝔞′ perpendicularis est.

Manifesto autem, etsi sol non in æquatore sed in circulo ei parallelo versetur, in cuiusvis circuli horarii plano, nempe in quocunque planorum horariorum fuerit, umbra axeos in sectionem plani huius cum plano q factam cadet. Consequenter umbra in easdem perpendiculares ad 𝔄𝔅 ex 𝔞, 𝔟, 𝔠, . . . 𝔞′, 𝔟′, 𝔠′, . . . (utrinque continuatas) cadet.

Et (per superius dicta) si sphæra eiusmodi pellucida s (parva respectu

Hosted by Google

terræ) ad superficiem terræ ponatur, axe opaco axi terræ parallelo, simul cum plano q' ad q parallelo, sphæram s tangente in ſ puncto æquatoris ipsius s; et diviso hoc æquatore in 24 partes æquales, ducantur ex ſ′ centro ipsius s ad rectam, quæ æquatorem in ſ tangit, per divisionis puncta rectæ, atque e sectionibus tangentis erigantur ad tangentem perpendiculares: erunt hæ lineæ horariæ cursum solis ad horæ intervalla monstrantes.

Patetque stilum esse plano q' (nempe plano huius horologii) parallelum per centrum ſ′ sphæræ s ductum, et simul perpendiculari ex ſ ad tangentem æquatoris sphæræ s, in plano q' erectæ, parallele positum esse. Unde intelligitur, quomodo in horologio in plano q' constructo *stili situs* reperiatur: nempe ex ſ erecta ad planum q' perpendiculari recta ſſ′, ponatur per ſ′ recta axi terræ parallela ſ′ſ″; quomodo hoc practice fieri possit, inferius patebit.

Posito autem ſ′ſ″ stilo axi terræ parallelo: (Fig. 265.) demittantur ex ſ′ et ſ″ ad planum q' perpendiculares ſ′ℌ, ſ″ℌ′, et fiat in q' (plano horologii) perpendicularis $\overline{\mathfrak{JH}}$ ad ℌℌ′, et ex $\mathfrak{JH}$ planum K perpendiculare ad q'; atque fiat in plano K, centro ſ′ radio ſ′ℌ circulus, et hic dividatur ex ℌ incipiendo per 24, ducanturque per puncta divisionis rectæ, et ex illis punctis, ubi hæ rectam $\overline{\mathfrak{JH}}$ (quæ tangens circuli ad ℌ est) secabunt, ducantur ad $\mathfrak{JH}$ in plano q' perpendiculares.

Erunt hæ manifesto lineæ umbrarum horariarum in plano q', per stilum ſ′ſ″ proiectarum; et quidem dum umbra in ℌℌ′ cadet, erit in loco, cuius planum horizontale ipsi q' parallelum est, hora XII. Unde per differentiam meridianorum loci illius et loci, in quo q' est, innotescet, qualisnam numerus ad ℌ et quales ad sectiones tangentis ceteras scribendi sint.

Si vero differentia meridianorum non numerum horarum integrum efficiat, sed ex. gr. locus is, ubi q' planum horizonti parallelum est, a meridiano loci ℌ distet orientem versus $\frac{n}{m} \cdot \frac{360}{24}$ gradibus (pro n, m integris), et superficies horologii quoque orientem respiciat: accipiatur ad dextram huic e regione stantis, in circulo, ex ℌ incipiendo pars $\left(\frac{360^\circ}{24} : m\right)$ numero n, et inde accipiatur semper $\frac{360^\circ}{24}$ e quovis divisionis

puncto in eodem circulo porro eundo; adscribaturque ad dextram eo, ubi pars prius accepta terminatur, XII; ad finem sequentis ad dextram autem I, et tum II, et ita porro, ad lævam autem ad finem partis ante XII terminatæ scribatur XI, ante hoc X ♋. Ducanturque ex f′ (centro circuli) per extremitates partium dictarum rectæ; atque eo, ubi hæ tangentem $\overline{\mathfrak{JH}}$ secabunt, numeri iidem adscribantur: et manifesto rectæ e sectionibus his ad $\overline{\mathfrak{JH}}$ perpendiculares erunt lineæ horariæ in plano q'. Nempe dum sol umbram in HH′ proiicit, postea ad lævam moveri per $\frac{n}{m}$ horas debet, ut meridies in loco H sit; adeoque umbra dextrorsum ibit; antea vero per ascendentem solem umbra versus HH′ pariter dextrorsum ibit.

In superficie altera occidentem respiciente pariter lineæ horariæ eædem manebunt, et ibi quoque umbra (stili f′f″ circa HH′ ad duorum rectorum intervallum moti) ad dextram e regione stantis ibit sole descendente; adeoque a linea horaria, cui in priore superficie XII adscripta est, ad dextram I, II, . . . adscribi debent.

Si differentia meridianorum sex horas efficiat, *horologium meridianum* erit: et in superficie orientali quadrans Hq, qui ad dextram est, infrorsum erit, per cuius finem e centro f′ recta ducta omnino tangenti parallela erit; atque tempore meridiei in loco H umbra stili haud proiicietur in planum horologii, sed XI, X, . . . sursum determinabuntur, uti in superficie occidentali ipsi XI respondebit I, et II ipsi X et ita porro.

In *polari*, tempore meridiei umbra manifesto in HH′ erit, quum HH′ sectio plani polaris cum meridiano sit; et reliqua patent.

Scholion 1. (Fig. 266.) Tyronibus primo obtutu videretur, horologium pro quovis indice (etiam axi terræ non parallelo) construi posse, si umbræ eius iuxta diei alicuius horas notentur: at sit stilus is recta fQ, et f centrum terræ, atque axis sit fP; manifesto fQ nonnisi in unum planum horarium cadet; nam si in duo cadet, in sectione eorum erit, adeoque cum axe coincidet. Si fQ in aliquod planum horarium cadat, sole in illo versante horam rite monstrabit; in alio autem sit pro sole in puncto f plani horarii existente umbra puncti Q designata q; crescente vel decrescente solis declinatione, ascendet vel descendet sol in eodem circulo

Hosted by Google

horario C; veniat in $\mathfrak{f}'$; umbra puncti $\mathfrak{Q}$ non erit $\mathfrak{q}$, nam recta $\mathfrak{q}\mathfrak{Q}$ peripheriam C in $\mathfrak{f}$ secabit; sit umbra $\mathfrak{q}'$. Manifesto tam $\mathfrak{q}$ quam $\mathfrak{q}'$ adeoque et recta $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'$ in planum ipsius C cadunt; adeoque quum stili prior umbra fuerit $\mathfrak{f}\mathfrak{q}$, posterior $\mathfrak{f}\mathfrak{q}'$, essent (si umbra designata et nunc valeret) $\mathfrak{f}\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{f}\mathfrak{q}'$ in recta eadem, et quidem illa, in qua planum horologii per planum horarium C secatur; nam $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{q}$, et $\mathfrak{Q}$ in planum $\mathfrak{f}\mathfrak{q}\mathfrak{f}$, et $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{q}'$, et $\mathfrak{Q}$ in planum $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'\mathfrak{q}'$ cadunt; per $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{Q}$ vero planum determinatur, et quidem illud, quod per $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{q}'$ et $\mathfrak{Q}$ determinatur; itaque $\mathfrak{f}$, et $\mathfrak{f}'$ quoque in illud cadit simul cum centro $\mathfrak{f}$; est vero hoc planum horarium; adeoque $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}$ in hoc quoque planum horarium caderet (contra hypothesim).

Scholion 2. Axis autem non ipse solum, sed et punctum quodvis eius, index esse potest; si nempe stilus cuiusvis formæ (sive centro fixus, sive fulcris insistens, sive perpendicularis) in eo terminetur, atque nonnisi extremitas umbræ ad lineam horariam appellens spectetur. Ex. gr. si axis centro $\mathfrak{f}$ fixus sit $\mathfrak{f}\mathfrak{J}$, et ex $\mathfrak{J}$ demittatur ad planum horologii perpendicularis $\mathfrak{J}\mathfrak{i}$; dum umbra ipsius $\mathfrak{f}\mathfrak{J}$ lineam horariam teget, manifesto etsi nonnisi punctum opacum $\mathfrak{J}$ relinquatur, umbra huius quoque in eadem linea erit.

Atque hinc si nonnisi hoc punctum opacum $\mathfrak{J}$ cogitetur, disparente terra opaca: quemvis circulum parallelum C descripserit sol tempore 24 horarum; orientur coni ad apicem $\mathfrak{J}$ verticales, quorum superior circulo C insistet, latera radiis solis præbentibus, inferior autem fit per radiorum ad $\mathfrak{J}$ lucentium continuationem umbrosam. Si vero sol infra æquatorem in circulo ad eandem declinationem versetur: fiet conus superior umbrosus, et inferior luminosus. Itaque si per planum P horologii per centrum $\mathfrak{f}$ positum secetur conus umbrosus dictus: sectio conica erit; atque umbræ extremitas in sectione lineæ horariæ cum sectione conica dicta erit, pro hora lineæ horariæ respondente; nam umbra puncti in superficie coni est, adeoque quum pro illa hora etiam in linea horaria sit: erit ibi, ubi linea horaria conum secat; nempe quum linea in plano conum secante sit, erit in puncto sectionis coni cum linea horaria communi. Itaque quum pro quavis alia declinatione solis alius conus generetur: si saltem pro quavis declinatione solis, dum in signum aliquod eclipticæ

Hosted by Google

ingreditur, sectio coni dicta construatur, cuivis sectionum conicarum istarum adscribi signum illud poterit; indicabitque extremitas umbræ ad quampiam earum appellens solem in signo adscripto versari.

Erit vero sectio ista parabola vel ellipsis aut hyperbola, prouti n (angulus coni) æqualis, minor vel maior ipso m fuerit (pagg. 265 &).

Sit ex. gr. (Fig. 267.) $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}$ pars axeos, $\mathfrak{f}$ centrum terræ, et $\mathfrak{f}\mathfrak{q}$ meridiana in horologio horizontali, adeoque a altitudo poli, $\mathfrak{P}$ polus mundi, sitque $\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{b}$ meridianus, atque sol in $\mathfrak{A}$; erit $\mathfrak{A}\mathfrak{c}$ declinatio, quæ dicatur d; eritque angulus coni nempe $n = 2(R - d)$; nempe quoad immanem solis distantiam, apex coni sive in $\mathfrak{Q}$ sive in $\mathfrak{f}$ accipiatur, nullum quoad sensus discrimen est; in triangulo $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}\mathfrak{q}$ autem ex a altitudine poli et angulo $\frac{1}{2}n$ atque latere $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}$, innotescit $\mathfrak{Q}\mathfrak{q}$, quod (pagg. 266 &) c dicebatur; et pariter m innotescit, quum externus summæ internorum a et $\frac{1}{2}n$ æqualis sit; itaque sectio conica pro illa solis declinatione construi poterit; et pariter pro quavis declinatione alia. Patet vero angulum coni minimum pro maxima declinatione esse, atque redeunte sole ad æquatorem duobus rectis quam proxime ire, et conum ad æquatorem in planum huius mutari: atque numeris in calculum inductis facile patet, apud nos pro horologio horizontali, pro quavis declinatione solis (excepto dum ad æquatorem o fit) angulum $m < n$ esse, adeoque hyperbolam describi; itaque sole oriente ad dextram, et occidente ad sinistram, umbram quoad sensus ad asymptotos appellere, et tempus ortus occasusque tempore solis in illo signo versantis indicare.

Scholion 3. Si tamen nonnisi signa, in quibus sol versatur, ex umbra puncti $\mathfrak{Q}$ tempore meridiei cognoscere lubeat (quod *Analemma signiferum* dicitur): sit horologium horizontale, $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}$ sit stilus, et $\mathfrak{f}\mathfrak{m}$ sit meridiana (Fig. 268.); sitque sole (dum in certo signo est) in meridianum appellente umbra puncti $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{j}$, atque declinatio solis sit tum d; in triangulo $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}\mathfrak{j}$ latus $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}$ datum est, $\angle \mathfrak{j}\mathfrak{f}\mathfrak{Q}$ est altitudo poli, et alter angulus adiacens nempe $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}\mathfrak{j}$ est $= R - d$; namque angulus hic (ut in præcedentibus) insensibiliter differt ab eo, qui ad centrum $\mathfrak{f}$ est; huius autem quantitas est distantia solis a polo. Itaque $\mathfrak{f}\mathfrak{j}$ innotescit, sive per constructionem, sive per calculum. Ita pro quibusvis declinationibus solis

Hosted by Google

eiusmodi puncta determinari, atque signa, in quibus sol tunc versatur, adscribi possunt. Et idem ad alias lineas horarias quoque applicari potest.

Scholion 4. Quum sol in ecliptica in ellipsi moveri videatur, at præterea iam acceleretur iam retardetur; adeoque recta ascensio eius (via ad æquatorem reducta) inæquabiliter crescat, decrescatque; et tempus ab una meridie ad proximam iam maior iam minor sit; et nonnisi tempus ab una culminatione stellæ fixæ ad proximam sit, propter uniformem terræ motum circa axem, semper idem; sol vero ab ea fixa, cum qua simul in meridiano erat, contra motum diurnum orientem versus recedens, adhuc tempore indigeat, donec in meridianum appellat, adeoque dies solaris sidereo longior sit, sed nec dies solares veri inter se æquales sint: solem aliquem medium fingere visum est, qui recta ascensione æquabiliter crescente, tempore cuiusvis anni, uti verus sol ad æquatorem reductus, totum circulum percurrat. Vocatur *tempus* sole hoc fictitio duce determinatum, *medium*, quod ad *tempus solare verum*, imo et ad *tempus sidereum*, sive quodvis horum ad aliud, reduci potest. Horologia vero solem medium sequuntur; itaque si quis suum, ex. gr. tempore meridiei, horologio solari convenienter dirigere voluerit, nosse debet, quænam sit pro illa die differentia inter meridiem solis medii et veri, quæ sæpe etiam ad quadrantem exsurgit. Computata hæc pro annis quibus vis in Ephemeridibus exstant; quamvis adhucdum periodus nota haud sit, a cuius fine idem ordo incipiat; nec duæ imagines dictæ (nempe so fictus et verus ad æquatorem reductus) quater per annum congruentes, semper plane tempore meridiei loci certi sibi invicem occurrant.

§. 2.

Pro horologio meridionali construendo fit (Fig. 269.) triangulum sphæricum $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}\mathfrak{q}$ ad zenith $\mathfrak{Z}$ rectangulum ($\mathfrak{P}$ polum, $\mathfrak{k}$ centrum sphæræ, adeoque $\mathfrak{k}\mathfrak{Z}$ verticalem, in qua planum meridianum $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}$ et planum meridionale se mutuo secant, $\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ vero circulum horarium denotante). Eritque A complementum altitudinis poli, adeoque altitudini æquatoris æquale: itaque ex angulo horario b et catheto A reperitur cathetus B angulo b

Hosted by Google

oppositus, nempe angulus horarius in plano meridionali circulo horario $\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ respondens; eritque (pag. 294)

$$\text{tang.}\, B = \sin. A \,\text{tang.}\, b\,;$$

id est tangens arcus quæsiti erit sinus altitudinis æquatoris (seu cosinus altitudinis poli) per tangentem anguli horarii multiplicatus.

Si vero planum meridionale declinet, ex. gr. vertatur pars occidentalis versus austrum ad angulum d: fiet triangulum sphæricum pariter $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}\mathfrak{q}$, manente angulo horario b et latere A, sed angulus $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}\mathfrak{q}$ erit $= R + d$; unde e duobus angulis et latere, quibus adiacent datis, prodit B. Ad orientem quoque idem est, nam $\sin.(R+d) = \sin.(R-d)$; quia $R + d + R - d = 2R$.

Linea meridiana in plano meridionali autem est verticalis $\mathfrak{Z}\mathfrak{k}$, et stilus ultra $\mathfrak{k}$ continuatus fit index superficiei australis; ubi lineæ horariæ pariter prodeunt, suntque manifesto continuationes priorum. Patet autem, apud nos in huius horologii facie boreali nonnisi horas matutinas vespertinasque, atque in australi facie reliquas circa meridiem ostendi; neque in facie boreali meridiem monstrari, nisi distantia puncti zenith loci ab æquatore minor sit maxima solis declinatione, idque nonnisi eousque, donec declinatio distantiæ dictæ æqualis fiat.

§. 3.

Si horizontale declinet (Fig. 270.), ex. gr. pars occidentalis vertatur circa meridianam ad angulum d, fiet triangulum sphæricum $\mathfrak{P}\mathfrak{P}''\mathfrak{q}'$, in quo $\mathfrak{P}\mathfrak{P}''$ altitudo poli, $\angle \mathfrak{P}''\mathfrak{P}\mathfrak{q}' = b$ angulus horarius in sphæra, et $\mathfrak{P}''\mathfrak{q}'$ est arcus quantitatem anguli horarii in plano horologii exprimentis; itaque quum angulus $R + d$ sit, quem $\mathfrak{P}\mathfrak{P}''$ cum $\mathfrak{P}''\mathfrak{q}'$ facit, e duobus angulis b et $R + d$ cum latere adiacente datis prodit $\mathfrak{P}''\mathfrak{q}'$.

Manet vero et hic linea meridiana immota.

Si declinans etiam inclinet, nempe vertatur circa perpendicularem ad meridianam, versus austrum, quo in casu *reclinans* dicitur: sit angulus reclinationis d; moveatur prius planum horologii horizontale circa

Hosted by Google

perpendicularem ad meridianam, movebitur linea meridiana in plano meridiani; veniat $\mathfrak{P}''$ in $\mathfrak{P}'''$; et postea horologium hoc quasi horizontale pro altitudine poli $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'''$ constructum declinet (nempe circa sectionem plani meridiani cum plano horologii huius motum); prodibit (ut antea) angulus in plano horologii declinantis horarius quilibet posito *b* respondens.

Et pariter prodeunt lineæ horariæ in plano meridionali deinclinante; uti et in polari declinante aut deinclinante. In omnibus his autem meridiana horologii est sectio plani horologii per planum illud facta, in quod perpendiculares e duobus punctis stili ad planum horologii demissæ cadunt.

§. 4.

Methodus non solum generalis pro quovis plano exposita est (pag. 304), sed pro horizontali quoque (utpote quod per totam diem collustratum usui maxime idoneum est) formula simplex data est ibidem: attamen pro iis, qui tædium calculi fugiunt, et methodus constructionis exponenda est.

Fiat (Fig. 271.) $\triangle\, \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ad $\mathfrak{C}$ rectangulum, angulo *b* ad $\mathfrak{B}$ altitudini poli æquali; erit angulus *a* ad $\mathfrak{A}$ altitudo æquatoris. Fiatque (Fig. 272.) centro $\mathfrak{C}$ radio $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ circulus, et huius tangens ad $\mathfrak{A}$; atque dividatur quadrans $\mathfrak{A}\mathfrak{q}$ in sex partes æquales, et ductis e centro $\mathfrak{C}$ per puncta divisionis rectis, quinque puncta $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, in quibus tangens per rectas dictas secatur, notentur, atque ad distantiis punctorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, . . . ab $\mathfrak{A}$ distantias æquales, ab $\mathfrak{A}$ dextram lævamque in $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ perpendicularem transferantur (Fig. 272.), atque ducantur ex $\mathfrak{B}$ rectæ $\mathfrak{B}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$, . . . $\mathfrak{B}\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'$, . . .; erunt hæ lineæ horariæ, si $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ in meridiana fuerit, et $\triangle\, \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ elevetur ad planum horologii horizontale perpendiculariter. Erit nempe $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ axi terræ parallela, et reliqua præterquam quod (ex pag. 305) pateant, inde etiam perspiciuntur; quod si planum per $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ ponatur perpendiculariter ad planum $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ (quod ad planum horologii perpendiculariter erigatur), erit illud plano æquatoris parallelum; itaque producto axe $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ (ad planum hoc perpendiculari), erunt puncta $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, . . .,

Hosted by Google

$\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, . . . umbræ horariæ puncti $\mathfrak{C}$, adeoque rectæ, e centro ad puncta hæc ductæ, lineæ horariæ erunt.

Patet vero axem $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ita ponendum esse, ut $\mathfrak{C}$ septemtrionem respiciat; atque ad $\mathfrak{A}$ numerum XII, XI ad $\mathfrak{a}$, X ad $\mathfrak{b}$, . . ., I ad $\mathfrak{a}'$, II ad $\mathfrak{b}'$, . . . scribendum esse.

Scholion 1. Est autem hic a altitudo æquatoris; et producto axe $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ perpendiculari ad planum dictum ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ perpendiculariter impositum, fit in hoc plano horologium æquinoctiale, in quo anguli horarii omnes æquales sunt.

Atque si planum hoc circa $\mathfrak{B}$ pro quovis loco ad angulum a altitudini æquatoris æqualem elevetur: stilus ex $\mathfrak{C}$ ad planum hoc (tanquam planum æquatori parallelum) perpendicularis, erit axi terræ parallelus, et horas pro iisdem lineis horariis rite monstrabit. Si igitur plurium locorum altitudines æquatoris annotatæ fuerint, et ope arcus cuiuspiam elevatio ista plani horologii perfici, atque $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ ope acus magneticæ adnexæ (data declinatione eius), in meridianum locari queat: erit horologium quoad loca annotata *aequinoctiale universale.*

Et pariter quoad loca quotvis horologium horizontale universale construi potest. Nempe ut dictum (pag. 319) est, si e puncto quovis axeos ex. gr. ex $\mathfrak{p}$ demittatur perpendicularis $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ ad meridianam: stilus $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ index esse poterit, si nonnisi extremitas umbræ eius ad lineam horariam appellens spectetur. Si igitur pro variis altitudinibus poli, puncta horaria umbræ puncti $\mathfrak{p}$ construantur, et puncta quævis eidem horæ numero respondentia lineis connectantur, adscriptis ad extremitates lineæ numeris horariis, atque etiam quævis puncta omnium diei horarum eidem altitudini poli respondentium lineis combinentur, adscripta altitudine poli iis respondente; et simul index ita adaptatus fuerit, ut ad quamvis illarum poli altitudinum, pro quibus puncta dicta constructa sunt, elevari possit; e dictis patet, horas rite monstrari.

Imo horologium solare etiam splendente luna inservire potest, si ætas lunæ nota fuerit: nempe dum luna in coniunctione est, si pro sole exstincto luna splendere posset, index horas sine errore sensibili monstraret; quum vero luna quovis die orientem versus progrediens circiter

Hosted by Google

tribus horæ quadrantibus tardius in meridianum appellat, patet ætatem lunæ per hoc multiplicari debere; et tempus istud numero horæ per indicem splendente luna monstratæ addendum esse. Possunt hinc etiam lunaria horologia construi, quæ sine isto calculo horam ostendant; sed ætatem lunæ semper notam esse oportet.

Solent etiam annuli portatiles varii construi, in quibus non umbra puncti, sed lux per foraminulum inmissa monstrat horam: unum tantum commemorasse sufficiat, quum e dictis varia excogitare facile sit.

Sit Pp axis (Fig. 273.), et annulus Pap sit in meridiano, et aZP=90° (gradibus annotatis), atque annulus aqe ita sit comparatus, ut dum hora quæritur, perpendicularis ad priorem fieri possit; si totum ex Z suspendatur (quod ope cursoris rite instituti, ad quotumvis gradum ab a fieri potest): erit Zf in verticali, atque arcus aZ, distantia puncti zenith ab æquatore aqe, altitudini poli æqualis. Si iam sol in æquatore versetur, et ex. gr. in a sit, foramen per centrum f (in axe Pp circa extremitates P et p vertibilis) radium solis ad e transmittet; et annulo æquatorem repræsentante in viginti quatuor partes æquales (a puncto meridiei incipiendo) diviso, horæ rite monstrabuntur; si vero sol ex. gr. in S veniat, adeoque declinatio eius borealis fiat af, quærendum est illud axeos punctum i, ubi per foramen transmissus solis radius, in eodem circulo horario versantis, eodem ut prius, ex. gr. in e cadat. Hoc autem facile fit, nam propter solis distantiam, rectæ fS et eS ad sensum parallelæ sunt, adeoque ∧fei æqualis angulo declinationis solis est; atque hinc fi est tangens anguli declinationis solis pro radio fe, quia ∧efi = R est.

Ita puncta pro declinatione solis, cuivis signo, in quo versatur, respondente tale punctum reperiri, atque cuivis signa respondentia adscribi possunt; imo ope cursoris, in quo foramen est, in crena laminæ circa Pp ad solem vertibilis, potest foramen ad puncta prius dicta duci, ut tempore solis in respondente signo existentis, radius per foramen transmissus in punctum æquatoris e cadat; patetque pro sole in eodem circulo parallelo versante, adeoque declinatione plane eadem, æquatore in viginti quatuor partes æquales diviso, idem de reliquis horis valere;

Hosted by Google

nempe e meridiem monstraret, si tam PMp meridianum, quam aqe æquatorem repræsentans pellucidi essent.

Scholion 2. Quamvis ad qualevis planum, sive parallelum axi fuerit sive non, dictum sit, quomodo horologium construi queat: attamen haud supervacuum est modum referre, quo ad qualemvis superficiem practice horologium construi queat. Axem ante omnia necesse est, in aliquo horologio, ex. gr. horizontali, figere, atque horologio isto (debito situ) admoto, per prolongationem axeos, situm stili in horologio construendo procurare. Atque tum sufficit quocunque die, iuxta aliquod horologium solare rite factum, umbras quavis hora notare: nempe hic stilus axis terræ est (non ut pag. 318), atque lineæ horariæ, sectiones plani per axem eundem et solem determinati, cum superficie horologii sunt.

Et pariter patet, quod si horologium rite paratum horologio construendo admoveatur, et axeos continuatio secet ex. gr. in q planum horologii construendi, atque per lineas horarias prioris secetur hoc in a, b, . . . : fiant horologii exstruendi lineæ horariæ qa, qb, . . .

III. DE CHRONOLOGIA.

Tractat hæc *de modo subdivisionis temporis in vita civili.* Inserviunt autem præcipue duo luminaria: nempe *sol*, quo tanquam indice monstrat manus æterni in circulo cœlestis horologii duodecim mensium signa adscripta; et *luna* noctu huius vices gerens.

Accipiatur vero tempus absolutum in anni circulo (quasi æternitatis annulo) post revolutiones quotvis semper versus futurum progrediens. *Locus relativus* temporis, sub quo aliquid evenit, autem in isto fluentis temporis alveo est distantia temporis a *certo puncto fixo*, (Fig. 274.) stellula insignito, sub quo phænomenon aliquod in cœlis aut terris contigit, a quo quasi principio (ob certas rationes) fluxum temporis considerare libet. Et si nonnisi locus relativus in alveo dicto consideretur, atque tota peripheria P dicatur, et lineæ versus futurum positive, retrorsum autem negative accipiantur: (pro n integro) prodit idem, sive $nP+s$ sive $s-nP$, et sive $-s-nP$ sive $-s+nP$ fuerit.

Hosted by Google

Subdividitur autem *tempus in vita* civili in *annos solares*, quorum centum efficiunt *seculum*; annusque dividitur in *menses* et *hebdomadas*: hebdomadæ in dies naturales, qui nomina ab Astrologia (gentilium) sortiuntur, quæ Astronomiam tanquam soror adulterina haud pridem deseruit; dicunturque lingua ecclesiastica *dies Dominica*, *feria prima*, *feria secunda* &. Cuivis horæ nempe planetarum systematis Ptolemaici, uti se invicem in eo excipiunt, aliquam præsidere crediderunt; qui quum numero septem sint, per 24 horas ter decurrendo, horam diei sequentis primam quartus incipiebat; et totum diem ab hoc denominaverunt. *Ordo Ptolemaicus* vero hoc versu retinetur:

Post SIM SVM sequitur, pallida Luna subest;

nempe *SIM* denotat *Saturnum*, *Iovem* et *Martem*, *SVM* vero *Solem Venerem* et *Mercurium*. Idem ordo regit vulgi creduli annos. Notandum autem *feriam primam* magis *diem Dominicam* et *feriam septimam* diem *Sabbati* dici.

Dies dividuntur in horas, quæ vario modo a variis gentibus numerantur; imo et apud nos aliter in vita civili, et aliter ab Astronomis numerantur: nempe hi a meridie incipiendo viginti quatuor horas numerant usque ad meridiem proximam, et quidem ita ut prima duodecima primæ Ianuarii in vita civili sit Astronomis vicesima quarta tricesimæ primæ Decembris.

Dividuntur porro dies in *festos* et *communes*; festa item dividuntur in *fixa* seu *immobilia*, quæ semper in dies eorundem mensium eosdem (quoad numerum diei in mense) cadunt; uti ex. gr. *Festum Nativitatis Christi* vicesimæ quintæ Decembris, *Epiphania* sextæ Ianuarii & affixa manent. *Festa mobilia* autem omnia a *Paschate* dependent; *Pentecoste* a Paschatis prima die (inclusive) quinquagesima die incipit, adeoque quia (ut dicetur) Pascha semper die Solis incipit, et primus dies Pentecostes in diem Solis cadit; post septimanam Pentecostes sequentem *Dominicae Trinitatis* numerantur, usque ad quatuor Dominicas *Adventus* Festum Nativitatis Christi præcedentes. Pascha autem præceditur sex *Septimanis*

Hosted by Google

Ieiuniorum, et antea dies Mercurii proximus *dies Cinerum* est; atque inde usque ad *Epiphaniam* (nempe sextam Ianuarii) *Bacchanalia* durant.

Distinguuntur præterea dies anni per literas; nempe cuiusvis mensis dies *n*-tus (pro quovis *n*) litera certa semper eadem insignitur (Fig. 275.); cuiusvis anni dies prima, adeoque prima Ianuarii litera *A* gaudet, secundæ litera *B* datur, et septem literæ *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* in circulum positæ, uti se invicem in gyrum porro eundo excipiunt, diebus se invicem excipientibus tribuuntur, ea cum restrictione: quod in anno bissextili (de quo paulo inferius) vicesima tertia et vicesima quarta Februarii litera eadem gaudeant, quasi unus dies esset; ut *litera mensis cuiusvis, diei quotaevis maneat.* Litera vero, quæ in anno quopiam diei *Dominicae* respondet, *litera Dominicalis* audit. Atque hinc methodus prodibit cuiusvis anni mensis cuiusvis quotamvis diem, qualisnam septimanæ dies fuerit, atque literam Dominicalem anni cuiusvis, tam Iulianam quam Gregorianam, cyclosque earum reperiendi.

Quum vero in vita civili nec anni principium, nec alii termini iuxta calculum astronomicum per minuta secunda applicari possit, *regula* est: ut *fractiones ubique neglectae, dum integrum effecerint, tunc addantur*; atque hoc modo, aliisque artificiis adhibitis, *omnia ita compensentur, ut in alveo fluentis temporis* (pag. 326) *dicto, tam punctum fixum* *, *quam alia necessaria in perpetuum maneant, ita ut quam minimum oscillando omnia locum tueantur.*

Determinatum vero pro puncto hoc fixo tempus illud est, quo *Concilium primum* statim dicendum celebratum est.

Itaque:

1. De anni quantitate, atque modo, quo *principium anni in puncto* * *fixum maneat.*

2. De characteribus dierum chronologicis; quomodo nempe septimanæ dies literas mutent, et quibus cyclis idem redeat.

3. Quum omnia *Festa mobilia* a *Paschate* dependeant, modus, quo *Pascha* tam *Iulianum* quam *Gregorianum* supputari in secula possit, imo etiam *cyclus Paschatum* exponetur.

Fundamentum supputationis Paschatis est *Decretum Concilii primi*

Hosted by Google

Nicaeae anno Christi 325 celebrati, cuius (etsi non verbis iisdem) sensus sequens est: *Paschatis dies prima celebretur die Dominica prima, post plenilunium* aut *in diem aequinoctii* aut *post eum proxime cadens.* At æquinoctium vernale tunc vicesima prima Martii fuit, et huic affixum putabatur. Res itaque eo redit, ut *Pascha celebretur Dominica prima, post plenilunium post vicesimam Martii primum.*

De modo plenilunia computandi etiam statutum est: de quo inferius.

Ratio autem huius Decreti est duplex: prima ut a Christianis tardius celebretur Pascha, quam a Iudæis in ipso plenilunio vernali celebrantibus, secundo quod tamen et Christianis plenilunio paschali, quod et lugubri *magnaque die* simul cum Paschate Iudæorum imminebat, proxima die Dominica celebrare Pascha conveniat. Prætereaque dum hominum summus amator, ab iis cruci affixus, inter cruentorum vulnerum dolores, *Patrem* suum rogando, ut irridentibus ob inscitiam eorum ignosceret, in extremas umbras mergebatur, conticentibus angelorum choris, in æternitatis quasi interruptæ silentio, nonnisi inferni undarum murmur erat: et quum *Sanctissimus* in cruce expalluit, mœsta cœli oculum caligo obduxit, lacryma paterna quasi delapsa. Neque eclipsis hæc solis astronomica fuit, quum luna prope ad oppositionem cum sole erat: et huius quoque memoriam conservare libuit.

§. 1.

Annus Romuleus erat decem mensium solarium, a *Martio* incipiens, tot diebus post Decembrem additis (teste *Macrobio*) donec cœlum terraque ad statum priorem redierit. Numa duodecim mensibus lunaribus (de quibus inferius) dies intercalandos Sacerdotibus commisit; qui partim propter solutiones certis terminis præstandas a fœneratoribus corrupti, partim ex ignorantia, sexaginta septem dies neglexerant: quos *Iulius Caesar* (a quo *Calendarium Iulianum* nomen gerit), suadente *Sosigene* Astronomo, anno suæ reformationis addidit, nempe quadragesimo quinto ante Christum, qui e 445 diebus compositus *magnus annus confusionis* dictus est. Statuitque præterea Cæsar suasu *Sosigenis*, annum sola-

Hosted by Google

rem 365 dierum et sex horarum æstimantis, ut hæ sex horæ quovis quadriennio unum diem efficientes, (in tribus annis neglectæ), adderentur post vicesimam tertiam Februarii. Clarum est, quod posita illa anni solaris magnitudine, effluxo primo anno, sequentis prima Ianuarii sex horis citius dicatur, adeoque effluxis quatuor annis, quinti initium viginti quatuor horis maturius diceretur, nisi dies adhuc expectaretur. Potuisset quidem tum December triginta duos dies habere; sed ob sacra certa peragenda libuit diem hanc post vicesimam tertiam Februarii ponere, unde etiam *dies* hæc (e *Calendario Romano*) *bissextilis*, atque inde et *annus bissextilis* vocatur.

At quum *Sosigenes* annum undecim minutis (omissis secundis) iusto maiorem acceperit: quibusvis quatuor annis Iuliani 4.11 minutis iusto serius incipiunt annum, quod effluxis 131 annis circiter diem efficit; adeoque 131 anni toties decurrere possunt, ut Iuliani primam Ianuarii media æstate dicant, et demum prima Ianuarii Iuliana quoque ad punctum fixum * redeat.

Error iste ab anno 325 usque ad annum 1600 computatus a *Gregorio Pontifice* (suasu Astronomi *Aloysii Lilii*) ad decem dies (aliquot tantum horarum errore) exsurrexerat; adeoque tum prima Ianuarii, et etiam quarta Octobris (*dies reformationis Calendarii*) decem diebus iusto serius dicebatur; quapropter *Gregorius* quartam Octobris decimam quartam esse iussit, nempe ab anno 325 recte numerando, decima quarta fuisset; at iam æquinoctium vernale, quod anno 325 vicesima prima Martii erat, anno 1582 in undecimam cecidit.

Porro ne error iste rediret, cavit statuendo: ut post annum 1600, quibusvis quatuor seculis, anni priora tria secula terminantes, qui alioquin bissextiles essent, communes maneant, et nonnisi annus quartum seculum terminans bissextilis maneat, quosvis ceteros quartos annos bissextiles retinendo. Nimirum $400.11' = 3^d 1^h 20'$; et ex hoc tres dies, quibus posita anni Iuliani falsa quantitate nimis multum expectaretur ad incipiendum seculum quintum, omittuntur reformatione Gregoriana; una hora et viginti minuta vero, dum in diem excrescent, a posteris addentur.

Sunt autem hoc pacto 1700, 1800, 1900 communes, 2000 bissextilis:

Hosted by Google

atque quivis annus Christi n-tus Iulianus bissextilis est, si $\frac{n}{4}$ quotum integrum sine residuo det; nempe et reformatione Iuliana usque ad Christum (excluso reformationis anno) $44 = 4 . 11$ defluxerunt, adeoque et is, ad cuius finem Christus natus est, bissextilis fuit; iuxta reformationem Gregorianam quoque pariter annus n dictus, bissextilis sub eadem conditione est, si non sit seculum tale m-tum terminans, ut m per 4 exacte dividi nequeat, id est, ut si n seculum m-tum terminet, m quoque uti n per 4 exacte dividi queat.

Numerus dierum, quo Iuliani serius incipiunt annum, vocatur *aequatio solis*, quæ dicatur s; estque (pro N denotante numerum seculorum ab Anno nativitatis Christi effluxorum, omisso quod supra integrum seculorum numerum est), $s = 1 + \frac{3(N-3)}{4}$ sine residuo.

Nam decem dies, quibus annus 1600 nimis sero dictus fuisset, ita impertiri inter priora secula possunt, ut seculo tertio attribuatur primus, et quorumvis sequentium quatuor seculorum tribus posterioribus tres dies dentur, nempe cuivis trium unus; ut respondeant

seculis	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
dies falsi	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
uti postea seculis							17	18	19	20	21	22	23	24 . . .
dies falso additi							1	1	1	0	1	1	1	0 . . .

Si igitur numerus seculi sit N, erit summa dierum a Iulianis additorum 1 (seculo tertio competens), addito eo, quod seculis $N-3$ appertinet. Si $N-3$ per 4 exacte dividi queat, prodibit pro $N-3$ seculis $\frac{3(N-3)}{4}$; at si 1 maneat, prodit $\frac{3}{4}$ præter integrum, quod omittendum erit, quia tum seculum unum supra multiplum quatuor seculorum dictorum est, et huic inferius 0 adscriptum est, adeoque in hoc seculo s non augetur. Si 2 maneat, tum $\frac{3(N-3)}{4}$ dabit $\frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2}$, atque seculo postremo unus dies conveniet, fractione omissa. Si 3 manserit ex $\frac{N-3}{4}$, tum $\frac{3(N-3)}{4}$ $\left(\text{supra quotum integrum ex } \frac{N-3}{4}\right)$ dabit $\frac{9}{4}$,

Hosted by Google

atque usque ad seculum tertium post seculorum quaternarium præcedentem duo dies accedent, quod per $\frac{9}{4}$ $\left(\text{omisso } \frac{1}{4}\right)$ exhibetur.

§. 2.

Quaelibet dies mensis cuiusvis quovis anno, tam in Calendario Iuliano quam Gregoriano, litera eadem perpetua gaudet; nec anno bissextili hoc mutatur, quia tum vicesimæ tertiæ et vicesimæ quartæ Februarii (nempe diei additæ) litera eadem relicta est. Atque hinc, quum (pag. 328) prima Ianuarii literam A habeat, atque septem literæ A, B, C, D, E, F, G in gyrum eundo usque ad finem anni cuiusvis semet excipiant: cuiusvis mensis quotævis diei litera reperitur. Ex. gr. si quæratur tertiæ Martii litera: addantur Ianuarii dies 31, Februarii dies 28 (ob rationem plane dictam non 29, etsi annus bissextilis fuerit), demum Martii dies 3; atque dividatur summa per 7, et si residuum m sit, erit ab A antrorsum numerando m-ta litera quæsita; nempe $31+28+3=62$, et $\frac{62}{7}$ dat residuum 6, atque litera ab A antrorsum in circulo est F litera tertiæ Martii. Nempe quoties in numero dierum a prima Ianuarii (inclusive) continetur 7, toties decurrunt literæ ab A usque ad G (inclusive), et residui dies item ab A incipiendo literas nanciscuntur.

Si vero quæratur anno Christi n-to certa dies ex. gr. tertia Martii, qualisnam dies septimanæ fuerit: facile respondetur, si litera Dominicalis illius anni nota sit; nempe si ex. gr. hæc G fuerit, F dies *Sabbati* erit.

At quæritur *regula literam Dominicalem* anni cuiusvis n-ti *reperiendi.*

§. 3.

Annus communis constat e 365 diebus, adeoque 52 septimanis et uno die. Hinc quocunque diei nomine incipiat annus communis, eodem desinet; nempe septem nomina quinquagies et bis decurrent, atque item primum nomen redibit die annum terminante; ex. gr. si prima Ianuarii dies *Iovis* sit, annus idem, si communis sit, die *Iovis* terminabitur; at si

Hosted by Google

bissextilis fuerit, dies ultimus *Veneris* erit; nam tum annus ex $7.52+2$ diebus constat, atque die addito nonnisi literam præcedentis vicesimæ tertiæ Februarii retinente nomina dierum septimanæ nullo discrimine fluunt.

Hinc autem sequitur *literam Dominicalem post quemvis annum communem una litera recedere, post bissextilem autem duabus*. Nempe si *litera Dominicalis* in anno communi fuerit G, sit ex. gr. prima Ianuarii dies *Lunae*; hæc litera A gaudet, sequentis anni prima dies pariter A, sed dies *Martis* erit.

Si igitur duo circuli congruentes c et c' fuerint (Fig. 276.), et inferiori c adscribantur nomina dierum septimanæ, superiori c' vero literæ illis certo anno appertinentes, atque concipiatur inferior c moveri retrorsum sub superiore c': die *Lunae* uno regrediente, dies *Martis*, quæ sub B erat, veniet sub A, atque simul dies *Dominica* quoque in circulo sub literam retrorsum sequentem veniet.

Si vero annus bissextilis sit, terminabitur annus, si ex. gr. die *Lunae* inceperit, die *Martis*, et sequens die *Mercurii* incipiet: itaque circulo c retrorsum sub c' moto, dies *Mercurii*, qui sub C erat, veniet sub A, adeoque dies *Dominica* sub tertiam literam retrorsum movebitur, nempe duabus recedet.

Sed anno bissextili et post vicesimam tertiam Februarii litera retrorsum sequens fiet *Dominicalis*: nam vicesima tertia (et vicesima quarta quoque in anno bissextili) litera E gaudet; at si ex. gr. anno bissextili vicesima tertia Februarii fuerit dies *Veneris*, vicesima quarta pariter E, dies *Sabbati* erit; itaque pariter concipi circulus c retrorsum moveri potest, ut *Sabbatum* sub E veniat; adeoque *dies Dominica*, quæ ante vicesimam tertiam Februarii G erat, post vicesimam tertiam F fiet; competentque anno illi duæ Dominicales FG, quarum prior post vicesimam tertiam Februarii accipienda est.

Hosted by Google

§. 4.

Dies reformationis Gregorianae est anni 1582 quarta Octobris, quæ semper litera *D* gaudet; fuitque tum *litera Dominicalis G*; adeoque dies *Iovis* erat: at vero (ut dictum est) diem eandem decimam quartam Octobris esse iussit, atque ut quotavis mensis, cuiuscunque literam retineat, progrediendo a quarta ex *D* usque ad decimam quartam, quasi dies illi reipsa præteriissent, dies eadem literam *G* nacta est; uti hoc schema ostendit.

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
D	*E*	*F*	*G*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*

adeoque *litera Dominicalis* in *C* mutata est; nempe dies Iovis literam *G* acquisivit; sed præterea et annis secularibus Gregorio non bissextilibus quoque mutationem induci dicetur.

§. 5.

Cyclus Solis Iulianus dicitur numerus annorum, quibus effluxis, literæ diei solis eodem plane ordine sequuntur. Quid *cyclus solis Gregorianus* sit, pariter patet.

Cyclus solis Iulianus est 28 annorum; atque primus cyclus 9 annis ante Christum incipere ponitur, adeoque anno bissextili; attribuuntur vero huic literæ Dominicales *FG*. Unde e dictis liquet, quovis quadriennio quinque literas decurrere retrorsum in circulo, nempe anno illo fuit *FG*, postea *E*, tum *D*, dein *C*, et quinto ante Christum item bissextili fuit *AB* &c. Hinc autem septem quadriennis 7 . 5 literæ decurrent retrorsum; quod tantum est, ac si septem literæ quinquies decurrerent; sequetur itaque retrorsum plane ea quæ prius erat, nempe *G*, cui *F* addi debet, quia annus undetricesimus pariter bissextilis est, quum annus inter duodetriginta primus bissextilis fuerit et septem quadrienniis defluxis, cum anno undetricesimo quadriennium novum incipiat.

Hosted by Google

Cyclus solis Gregorianus autem est octo seculorum: namque anno reformationis 1582 facta est *C* litera Dominicalis, unde pro anno bissextili 1600 fit litera Dominicalis *BA*; atque hinc quovis quadriennio ab anno 1600 (inclusive) usque ad annum 2400 (exclusive) id est 2399 (inclusive), defluunt retrorsum eundo quinque literæ, exceptis quadrieniis ultimis seculorum 17, 18, 19, 21, 22, 23, ubi propter annum iuxta Gregorium haud bissextilem, annus seculi ultimus nonnisi una litera *Dominicali* gaudet: nempe per seculum 17 intelligendo tempus effluxum ab initio anni 1700 usque ad finem anni 1799 (inclusive), ita cetera intelligantur. Decurrent igitur ab anno 1600 (inclusive), usque ad annum 2399 (inclusive) 8.25 quadriennia, adeoque defluunt quinque literæ a *B* inclusive incipiendo; et semper retrorsum in circulo eundo, 8.25 vicibus, nonnisi sex literis propter sex secula dicta subtrahendis. Est vero

$$8.25.5-6=994=142.7,$$

itaque septem literæ 142-ies decurrent a *B* (inclusive) incipiendo, et retrorsum eundo in circulo; adeoque annus 2399 litera *C* gaudebit, et quidem sola, quum bissextilis non sit; itaque anni 2400 litera Dominicalis ante vicesimam tertiam Februarii *B* erit, postea vero quum hic annus bissextilis sit, litera Dominicalis *A* erit, itaque plane uti anno 1600. Et patet casum eundem redire, a 2400 (inclusive) usque ad 3200 (exclusive) et ita porro.

§. 6.

Litera Dominicalis Iuliana pro anno Christi *n*-to est

$$10-\text{res.}\ \frac{n+\frac{n}{4}\ \text{sine res.}}{7}$$

in circulo ab *A* antrorsum numerando: id est *n* per quatuor diviso, tantum pars quoti integra accipitur, at post divisionem per septem nonnisi residuum accipiendum est.

Hosted by Google

Nam cyclus solis incipit novem ante Christum natum annis, ita ut ab initio usque ad nativitatem Christi novem anni effluxerint; fuitque annus is in cyclo primus, bissextilis, literis *Dominicalibus FG* gaudens, adeoque et annus ultimus Veteris Testamenti bissextilis erat; et quadriennium novum cum nativitate Christi incepit, fuitque (Fig. 277.) anno Novi Testamenti primo *litera Dominicalis B*. Consideretur anno bissextili semper *litera Dominicalis* parti anni posteriori respondens (*quod et quoad formulam* tenendum est) et numeretur prius a B incipiendo (inclusive) in circulo retrorsum eundo (Fig. 278.) usque ad *literam Dominicalem* quæsitam (item inclusive), et si duæ fuerint in anno, posteriorem intelligendo. Erit anno postremo quadriennii primi a nativitate Christi incipiendo litera quæsita E, itaque $(1 . 4 + 1)$-ta a B retrorsum; atque si anno m-ti quadriennii postremo sit litera Dominicalis $(m . 4 + m)$-ta, erit quadriennii $(m+1)$-ti anno postremo *litera Dominicalis* item a B incipiendo retrorsum $(4m + m + 4 + 1)$-ta; id est $[(m+1)4 + m + 1]$-ta. Si igitur annus Christi $n = \mu . 4 + \nu$ (pro μ, ν integris, et $\nu < 4$), erit *litera Dominicalis* anno n respondens $(4\mu + \nu + \mu)$-ta. Est autem

$$4\mu + \nu + \mu = n + \frac{n}{4} \text{ sine residuo,}$$

nam

$$n = 4\mu + \nu, \quad \text{et} \quad \mu = \frac{n - \nu}{4}.$$

Est vero quævis litera q-ta (Fig. 279.) a B retrorsum, $(10 - q)$-ta ab A antrorsum; nam sit $q = q' . 7 + q''$; per quodvis multiplum ipsius 7 reditur ad literam C ante B, unde item a B incipiendo numeratis q'' literis, remanent adhuc $7 - q''$ literæ usque ad B (exclusive); itaque si ab A incipiendo antrorsum numeretur, erit litera, quæ a B incipiendo retrorsum q''-ta erat, nunc ab A incipiendo antrorsum $(7 - q'' + 3)$-ta, id est $10 - q'')$-ta, quia illis $7 - q''$ literis, quæ remanserant, nunc addi B et *litera Dominicalis* atque A debet. Sit ex. gr. *litera Dominicalis F*, erit hæc a B retrorsum quarta, manebunt literæ $7 - 4 = 3$, et eadem ab A antrorsum $(10 - 4)$-ta erit.

Quod vero divisione per septem facta, nonnisi residuum accipi de-

Hosted by Google

beat, inde patet, quod ab A incipiendo, quotiescunque defluant septem literæ, semper in G terminetur, atque item ex A porro antrorsum numeretur. Patet etiam hinc, formulam per

$$\text{res.}\,\frac{10 - \text{res.}\,\dfrac{n + \dfrac{n}{4}\ \text{sine res.}}{7}}{7}$$

exprimi posse, et si hoc residuum 0 sit, literam *Dominicalem* G esse.

Litera Dominicalis Gregoriana autem prodit ex Iuliana; est nempe

$$\text{res.}\,\frac{4 + \dfrac{3(N-3)}{4}\ \text{sine res.} - \text{res.}\,\dfrac{n + \dfrac{n}{4}\ \text{sine res.}}{7}}{7}$$

(denotante N seculi numerum omisso excessu, qui supra multiplum centenarii est). Namque anno 1582 *litera Dominicalis* ex G ad quartam nempe literam C (adeoque tribus) prosiliit; itaque nisi alia mutatio adveniret, a *litera Dominicali* Iuliana, semper tantum tres adhuc antrorsum numerari deberent. At vero quovis tali anno seculari, qui e bissextili communis fit, *litera Dominicalis* non duabus literis sed una tantum recedit; ex. gr. si BC esset, tantum C manebit, adeoque dum hoc primo evenit anno 1700, *litera Dominicalis Gregoriana* præterquam quod tribus literis prosilierat, adhuc una prosiliet, nempe *litera Dominicalis* partis anni posterioris non recedet in B, sed in C (adeoque una litera porro) manebit. Fietque hoc pro quovis tali anno; itaque ipsi

$$10 - \text{res.}\,\frac{n + \dfrac{n}{4}\ \text{sine res.}}{7},$$

addi debet 3, et præterea incrementum (pag. 331) ipsius s post annum 1600, nempe

$$1 + \frac{3(N-3)}{4}\ \text{sine res.} - 10$$

addendum erit. Est autem

Hosted by Google

$$10 - \text{res.}\,\frac{n + \frac{n}{4}\,\text{sine res.}}{7} + \left(1 + \frac{3(N-3)}{4}\,\text{sine res.} - 10\right) + 3$$

$$= 4 + \frac{3(N-3)}{4}\,\text{sine res.} - \text{res.}\,\frac{n + \frac{n}{4}\,\text{sine res.}}{7}.$$

§. 7.

Superius (pag. 329) dictum est etiam regulam, qua *plenilunium*, quod in Decreto *Concilii Nicaeni Pascha* determinat, adeoque *Paschale* dicitur, computandum sit, determinatam esse. Nimirum nec æquinoctium vernale, nec plenilunium, quod in hoc aut postea proxime cadit, astronomice computatur: sed singulari sagacitate est certus *computus ecclesiasticus* stabilitus, quo iuxta regulam superiorem (pag. 328) fractionibus, quæ in usu civili incommodæ essent, neglectis (donec in integrum excrescant), variis compensationibus, certisque oscillationibus, (quæ aliquando etiam duos dies efficere possunt), ad ingentem tamen annorum seriem, tam novilunia quam plenilunia *Paschalia* exhibeantur.

Fundamento quidem et in Calendario Gregoriano computus Iulianus inservit: attamen erroribus huius certo modo dicendo correctis. Computatoque novilunio tam in Calendario Iuliano, quam in Gregoriano, in illo prodeunt *novilunia Iuliana*, in hoc *Gregoriana* per totum annum; atque in utroque accipitur plenilunium decima quarta die a novilunio (id est dum ætas lunæ quatuor decim dierum est); in illo *plenilunium Iulianum*, in hoc *Gregorianum*.

Intelligitur autem per *novilunium* tempus coniunctionis lunæ cum sole, et tempus ab una coniunctione ad proximam vocatur *mensis Synodicus*; estque hoc numero medio 29 dierum 12 horarum 44 minutorum. *Mensis illuminationis* autem est ab apparitione novilunii ad proximam. Plures Gentes nocturnam istam lampadem sequendo annos numerabant. Excessus 12 mensium solarium, id est anni solaris, super 12 menses synodicos lunares (numero medio) est 10 dierum 21 horarum 11 minutorum. Si igitur in initio primæ Ianuarii novilunium fuerit, erit

Hosted by Google

ad finem anni lunæ ætas 10 dierum 21 horarum 11 minutorum. Dicitur ætas lunæ in anni cuiusdam initio *epacta anni* illius. Estque *epacta* 1. *astronomica*, eaque *vera* aut *media*, 2. *Iuliana* et *Gregoriana*; de quibus iam dicendum venit.

Si cursus lunæ numerum medium dictum sequeretur perpetuo, tum ex unico dato facile computarentur anni cuiusvis novilunia: at nullum corpus cœleste, quamvis vicinum exiguumque sit, Astronomos magis vexat: ratio huius est perturbatio virium attractivarum solis, planetarumque (maiorum, ex. gr. Iovis) propius venientium, adeo ut nullus adhucdum cyclus lunæ absolutus notus sit, nempe tempus, quo defluxo novilunia, plenilunia, eclipsesque, plane ita se invicem excipiant.

Cyclus 19 *annorum* quidem iam pridem adhibitus est: nam si ex. gr. prima Ianuarii novilunium fuerit, post 19 annos prima Ianuarii item novilunium erit, sed circiter $\frac{3}{2}$ horis maturius, si nimirum anni Iuliani accipiantur. Namque tempore 19 annorum eveniunt 235 lunationes; et si tempus dictum medium astronomicum mensis synodici per 235 multiplicetur, prodit 19 annis Iulianis minus.

Sunt tamen plures cycli maiores computati, quo maiores, eo exactiores.

Epacta Iuliana anni β est ætas lunæ in initio anni β. *Epacta Gregoriana* est ætas lunæ in principio anni Gregoriani.

Dicatur illa e (in sequentibus), hæc autem E.

Dantur præterea etiam *epactae menstruae*: nempe numerus dierum epactæ anni addendus, ut ætas lunæ in initio mensis M prodeat, dicitur *epacta mensis M*.

Si vero *epacta annua* (sive Iuliana sive Gregoriana) nomine generali $\mathfrak{E}$ dicatur; regula novilunii determinandi sequens posita est: ut si $\mathfrak{E}+m \doteq 30$ sit, novilunium primum in anno sit $(m+1)$-ta Ianuarii, et quidem Iulianum vel Gregorianum prouti $\mathfrak{E}$ est; abinde vero pro $e<28$, ita pro $E<25$, accipiantur 29 dies usque ad novilunium proximum, et postea quoque a novilunio ad novilunium usque ad finem anni semper hi numeri nempe 30 et 29 alternent, nempe errore circiter dimidii diei, dum pro una lunatione 30 dies accipiuntur, recompensato per id, quod

Hosted by Google

proxima lunatio uno minor accipiatur; pro aliis casibus autem (nempe dum $e = 28$, aut $e = 0$ adeoque non < 28, aut E non < 25, adeoque ipsorum 0, 29, 28, 27, 26, 25 alicui æqualis est) a primo anni novilunio, in utroque Calendario, numeri 30 et 29 alternent, sed a 30, non a 29 incipiendo. Accipitur autem in hoc computo dierum Februarii numerus 28, anno bissextili quoque.

At vero hoc pacto epactæ Gregorianæ 25 et 24, novilunium in aliquot mensibus ad eandem diem indicant: ex. gr. si $E = 25$ sit, cadet novilunium primum in $(30 - 25 + 1)$-tam Ianuarii, atque pro lunatione sequente 30 diebus acceptis, a sexta Ianuarii inclusive, sequens dies novilunii, quinta Februarii est; si vero $E = 24$, cadet novilunium primum in $(30 - 24 + 1)$-tam id est septimam Ianuarii, et inde inclusive iam 29 dies pro lunatione accipiendo, dies sequens novilunii pariter quinta Februarii erit. Patebit autem inferius *epactarum Gregorianarum cyclum* decemnovennalem numeris aureis respondentium, iuxta secula certa lege variari: atque evenire, ut in *cyclo seculari*, (nempe cyclus per totum seculum manet), tam epacta Gregoriana 24, quam 25 adsit; tum vero ne illa inconvenientia fiat, ut novilunium ante finem cycli decemnovennalis in eandem mensis diem (imo pluribus vicibus) cadat: statutum est, ut in hoc casu pro $E = 25$, accipiatur 26, adeoque novilunium uno die maturius ponatur, quasi epacta 26 esset; neque enim fieri potest, ut tum etiam 26 in cyclo eodem adsit; nam quovis seculo, pro quovis numero aureo prodit E, addendo ipsi e quantitatem constantem α eandem per totum seculum (inferius determinandam); itaque ut 24, 25, 26 prodeant, tres epactas Iulianas dari oporteret, quarum quævis a sequente, unitate differat; non dari autem tales, percursis epactis Iulianis statim exponendis patet.

§. 8.

Epactae Iulianae in cyclo decemnovennali modo sequente computatæ sunt: epactæ cuiusvis anni additur 11; et si summa < 30 fuerit, ipsa accipiatur pro epacta anni sequentis; si summa dicta sit > 30, tum id quo 30 exceditur, si vero summa $= 30$, tum 0 accipitur: subtrahitur

Hosted by Google

autem e summa dicta numerum 30 excedente 30, adeoque tempore lunationis maius, ideo, ut compensetur error propter 11 dies epactam mediam astronomicam superantes (pag. 339).

Numerus (propter insignem eius in determinatione *Paschatis* usum) *aureus* anni dictus est, qui indicat quotusnam cycli decemnovennalis sit annus is. Incipere ponitur cyclus decemnovennalis primo anno ante Christum natum, nempe regrediendo ab aliquo dato, eo deventum est; idem *de cyclo solis* anno ante Christum nono incipiendo notandum est (pag. 336).

Respondent autem iuxta regulam dictam

Numeris aureis	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Epactae Iulianae	8	19	0	11	22	3	14	25	6	17
Numeris aureis	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Epactae Iulianae	28	9	20	1	12	23	4	15	26	

Atque etiamsi epacta media astronomica, nempe 10 dies 21 horæ 11 minuta, per singulos annos huius cycli decemnovennalis, ab epacta primi incipiendo, semper porro addatur, et dum summa exæquat vel excedit tempus mensis synodici medium (nempe 29 dies 12 horas 44 minuta), residuum pro epacta accipiatur, quum interea una lunatio (calculo medio) defluat; atque hoc porro usque ad finem anni undevicesimi continuetur, ut in circulo progrediendo ad novum cyclum, epacta primi anni in cyclo sequente prodeat: fere idem prodibit, si ut in praxi in casibus analogis fieri solet, dum horarum numerus dimidium diem superat (saltem exæquat) pro integro accipiatur, et si dimidio die minor sit, eo anno negligatur, interea vero semper cuivis summæ, in quam epacta media astronomica excrevit, 10 dies 21 horæ 11 minuta addantur. Attamen quum cyclus hic decemnovennalis iam ad finem $312+\frac{1}{2}$ annorum die aberret, epactæ per Gregorium modo mox dicendo correctæ sunt.

Patet autem ex antea dictis, pro quovis numero aureo A post tertium, esse epactam Iulianam

$$e = \text{res.}\ \frac{(A-3)\,11}{30};$$

Hosted by Google

nam anno tertio est epacta 0, et postea quovis anno additur 11, et dum multiplum ipsius 11 numerum 30 superat, residuum accipitur; itaque si post tertium sit m-tus annus, et $m \,.\, 11$ sit $= \mu \,.\, 30 + \nu$, atque m-tus annus post tertium sit M-tus in cyclo: erit anni m-ti post tertium, id est $(M-3)$-ti in cyclo, epacta ν; namque sive simul eximatur multiplum ipsius 30 e multiplo ipsius 11, sive singillatim, residuum idem manet.

Pro numero aureo 3 quoque valet formula: nam tum

$$\text{res.}\ \frac{(A-3)\,11}{30} = 0,$$

nam $\frac{0}{30}$ dat quotum 0, et residuum 0. Pro numero aureo 1 autem fit

$$\text{res.}\ \frac{(A-3)\,11}{30} = \text{res.}\ \frac{-22}{30} = -22\,;$$

nam -22 per 30 divisum dat 0 pro quoto integro, et residuum -22; quod si ita intelligatur, ut novilunium 22 diebus intra anni initium cadat, hoc sensu epacta erit: atque ex eadem computari epacta sensu positivo quoque potest; si novilunium annum proxime præcedens, a priori 30 diebus distare ponatur, adeoque epacta positiva fiat $30 - 22 = 8$, uti in cyclo numero aureo 1 respondet epacta 8.

Idem de numero aureo 2 patet; nempe

$$\text{res.}\ \frac{(2-3)\,11}{30} \ \text{fit}\ -11,$$

adeoque novilunium primum intra anni initium 11 diebus distat; atque epacta positive accepta est $30 - 11 = 19$.

Est igitur epactas negativas quoque admittendo

$$e = \text{res.}\ \frac{(A-3)\,11}{30},$$

atque hoc pro anno Christo n-to est equale

$$\text{res.}\ \frac{11\left(\text{res.}\ \frac{n+1}{19} - 3\right)}{30}\,;$$

Hosted by Google

nam

$$A = \text{res.}\ \frac{n+1}{19}\ ;$$

quia cyclus incipit anno primo ante Christum; itaque, si $n+1$ multiplum ipsius 19 sit, annus Christi n-tus erit undevicesimus in cyclo; si residuum ex. gr. m det, post certum cyclorum numerum agetur annus novi cycli m-tus.

§. 9.

Epacta Gregoriana E autem ex Iuliana e prodit; nempe litera s *aequationem solis* (pag. 331), et litera l *aequationem lunae* statim dicendam denotante, est

$$E = e + \text{res.}\ \frac{l-s}{30} = \text{res.}\ \frac{(e+l-s)}{30}\ ,$$

si in expressione priore valor positivus ipsius e, in expressione posteriore vero sive positivus sive negativus accipiatur; at si valor ipsius E negative prodeat, addatur 30, et positiva fit; per residuum autem intelligatur id, quod manet supra quotum integrum. Formula ipsius s supra tradita est; l autem, si N sensu (pag. 331) sumatur, pro N non >18 est

$$\frac{8(N-6)}{25} \text{ sine residuo,}$$

ea cum restrictione, ut si residuum >13 fuerit, quoto integro addatur 1; si vero $N>18$, tum $l = 4 + \frac{8(N-18)}{25}$ sine residuo, addito 1 hic quoque si residuum >17. Ratio huius est sequens.

I.

Quum quovis cyclo 19 annorum elapso novilunium tanto maturius eveniat, ut elapsis $312 + \frac{1}{2}$ annis (numero medio) novilunium uno die maturius fiat, quam methodo Iuliana indicatur: error iste iuxta Gregorium ita corrigitur, ut tempus illud l, quo novilunium ante initium anni Iuliani per epactam datum reipsa maturius evenit, epactæ illius anni

Hosted by Google

Iuliani addatur, ut epacta Iuliana correcta prodeat, fiatque $e+l$ ex e. Hinc vero epacta Gregoriana E prodit sic: sit (Fig. 280.) $\mathfrak{G}$ initium anni Gregoriani, et $\mathfrak{J}$ initium anni Iuliani; si novilunium in $\mathfrak{N}$ fuerit, erit manifesto novilunium in $\mathfrak{N}$ ante $\mathfrak{G}$, et si $\mathfrak{N}\mathfrak{G}$ una lunatione fuerit minus, erit $\mathfrak{N}\mathfrak{G} = e+l-s$ epacta Gregoriana; si vero $\mathfrak{N}\mathfrak{G}$ una lunatione maius fuerit, dividitur $\mathfrak{N}\mathfrak{G}$ per 30, et residuum accipitur pro epacta; nempe in hoc computo etsi plures lunationes fierent interea, omnes 30 dierum accipiuntur, quamvis post immania tempora hoc quoque errorem inducat.

Si vero novilunium in $\mathfrak{N}'$ cadat (Fig. 281.), tum $\mathfrak{N}'\mathfrak{J}$ erit $e+l$, et $\mathfrak{N}'\mathfrak{J}-s$ negativum est, atque epacta Gregoriana negative prodit et erit $-\mathfrak{G}\mathfrak{N}'$, quod si <30 diebus fuerit (quod heic pro tempore unius lunationis sumitur), subtracto $\mathfrak{G}\mathfrak{N}'$ ex 30 diebus, manebit tempus, quo novilunium ante initium anni Gregoriani proximum evenit; sit ex. gr. $\mathfrak{G}\mathfrak{N}'+\mathfrak{G}\mathfrak{k}=30$ diebus, erit $\mathfrak{G}\mathfrak{k}$ epacta Gregoriana. Si vero sub $\mathfrak{G}\mathfrak{N}'$ plures lunationes evenerint, pariter dividendo per 30 dies, residuum accipietur, eritque hoc aut 0, aut negativum; in casu primo novilunium in $\mathfrak{G}$ cadet, eritque $E=0$, in postremo pariter novilunium ipsi $\mathfrak{G}$ proximum inter initia anni Gregoriani et Iuliani cadens indicabitur, et pariter ut prius, huic epactæ Gregorianæ negativæ adduntur 30 dies, ut epacta positiva prodeat.

II.

Formula superior ipsius l autem prodit sic. Anno 550 fuit $l=0$; si iam pro quibusvis $312+\frac{1}{2}$ annis l incrementum unius diei capiat, increscet l ad quatuor dies, elapsis $4\left(312+\frac{1}{2}\right)$ annis; quod efficit 1250 annos, quibus si addatur 550, prodit 1800; itaque usque ad annum Christi 1800 fiet $l=4$. Hoc autem ita distributum est, ut initio seculi octavi ponatur $l=1$, initio undecimi vero 2, et initio decimi quarti 3, atque initio duodevicesimi 4; adeoque prius quibusvis tribus seculis tribuatur unus dies, uti ultimo quatuor postremorum. Postea autem ab anno 1800 exclusive, quibusvis 25 seculis fit ipsius l incrementum æquale octo diebus; nempe

Hosted by Google

$$\left(312 + \frac{1}{2}\right) 8 = 2500.$$

Sunt autem octo hi dies ita distributi, ut quibusvis tribus seculis a duodevicesimo (exclusive) numerando dies unus tribuatur, usquequo quatuor postrema 25 seculorum veniant, et octavus dies seculo postremo attribuatur. Idemque continuatur.

Hinc autem si

$$N - 18 = \mu . 25 + (r < 25)$$

et μ integer sit, atque

$$r = m . 3 + (2 \text{ vel } 1 \text{ aut } 0):$$

$\mu . 25$ seculis conveniunt 8μ dies; $8(m . 3 + 1 \text{ vel } 2)$ vero est

$$= 24m + (8 \text{ vel } 16) = 25m - m + (8 \text{ vel } 16);$$

et hoc per 25 divisum dat quotum integrum m cum residuo $(8 \text{ vel } 16) - m$; atque si ipsi m substituantur valores a 0 usque ad 8 inclusive (nempe $m > 8$ esse nequit, quia $m . 3 > 25$ fieret, et si $m = 8$, tum præter $8 . 3$ neque 1 esse potest, nam tum $8 . 3 + 1 = 25$ esset), patebit regulam in quovis casu valere; ex. gr. pro 16, et $m = 7$, erit quoti pars concernens

$$7 + \frac{16 - 7}{25} = 7 + \frac{9}{25};$$

adeoque quum residuum 9 non sit > 17, per regulam ipsi 7 nihil additur. Ita pro ceteris valoribus ipsius m formulam regulæ convenire, et pariter de formula

$$\frac{8(N-6)}{25} \text{ sine res.}$$

patet.

III.

Quod autem (pro e sive positivo sive negativo), sive

$$e + \text{res.} \frac{l - s}{30}$$

sive

Hosted by Google

$$\text{res.}\,\frac{e+l-s}{30}$$

accipiatur, idem sit, patet sic: e præmissis apparet s celerius crescere quam l, quia s quibusvis quatuor seculis tres dies crescit, adeoque 24 seculis in octo dies excrescit, l autem 25 seculis crescit totidem (nempe 8) dies; et s iam seculo 7 fuit æquale quatuor, l vero (pagg. 331 et 344) nondum fuit unus; itaque si tam s quam l ad directionem sagittæ (uti omnia hic accipienda sunt) intelligantur, semper porro (ad instar pag. 14), etsi circulus quotiesvis decurratur: erit $l-s$ semper negativum. Sit

$$\text{res.}\,\frac{l-s}{30}=-r,$$

nempe

$$l-s=-m\,.\,30-r$$

(pro r, m positivis); erit (pro e sive positivo sive negativo)

$$e+\text{res.}\,\frac{l-s}{30}=e-r;$$

atque

$$\text{res.}\,\frac{e+l-s}{30}=\text{res.}\,\frac{e-m\,.\,30-r}{30}=e-r;$$

proditque in casu positivi e et $>r$, epacta Gregoriana $e-r$ positiva, in casu negativi e autem erit $e-r$ (propter $e<30$) aut $=-30$, aut erit $=-30-r'$ (pro r' positivo); si prius, tum utraque expressio epactam 0 dabit, si posterius, tum erit *epacta Gregoriana* negativa $-r'$, adeoque $30-r'$ erit epacta positiva in casu utroque.

§. 10.

Paschatis Iuliani pro anno Christi n-to formula est sequens: si a prima Martii (*stilo veteri* dicto) in anno Iuliano numeretur, ita ut per $(31+m)$-tam Martii intelligatur m-ta Aprilis; cadet Paschatis Iuliani dies prima (si e positive expressum sit) in

Hosted by Google

$$44 - e + \text{res.}\frac{\left(10 - \text{res.}\frac{n + \frac{n}{4}\text{ sine res.}}{7}\right)}{7} - \text{res.}\frac{\left(\text{res.}\frac{44 - e}{7} + 3\right)}{7}$$

-tam Martii (stilo veteri); tenendo:

1. quod si $e > 23$ fuerit, $44 + 30 = 74$ pro 44 accipi debeat;

2. quod si parentheseos posterioris residuum sit aut æquale residuo parentheseos prioris, aut eo maior, valori totius formulæ addi debeat 7;

3. quod si alterutrius parenthesium dictarum, aut utriusque seorsim residuum 0 sit, pro 0 semper 7 accipiatur.

Pro $e > 23$ nimirum $74 - e$, pro e non > 23 autem $44 - e$, exprimit *plenilunii Paschalis Iuliani diem*. Namque Ecclesia cavendo, ne Pascha cum illud in ipso plenilunio vernali celebrantibus (pag. 329) coincidat, ita computum instituere conabatur, ut hoc serius prodeat; quapropter statutum est:

1. ut plenilunium accipiatur die decima quarta a die novilunii inclusive; sed

2. ut dum $e > 23$, adeoque novilunium Martii primum in $(30 - e + 1)$-tam, plenilunium autem in $(30 - e + 14)$-tam Martii cadens, non sit Paschale, nam semper ante vicesimam primam Martii cadat, cui affixum æquinoctium positum erat; etsi sequens lunatio 29 requireret, pro ea 30 accipiantur; manifesto enim in hoc casu ad novilunium sequens progrediendum est: atque hinc fit, quod pro $30 + 14$ accipiantur $30 + 14 + 30 = 74$

Pro $e = 23$ fit $44 - e = 21$, quod plenilunium Paschale est (pag. 329), at si $e > 23$ fuerit, $44 - e$ fit < 21. Ut vero primum Martii novilunium prodeat, epacta annua ex 30 subtrahenda est; nam patet facile ex (pag. 339), *epactam menstruam* Martii esse 0, adeoque ætatem lunæ in initio Martii eandem esse, quæ incipiente anno fuit.

Parentheseos prioris residuum, nempe

$$\text{res.}\frac{\left(10 - \text{res.}\frac{n + \frac{n}{4}\text{ sine res.}}{7}\right)}{7}$$

Hosted by Google

indicat, quota sit *litera Dominicalis* ab A antrorsum in anno n (pag. 335); parenthesis posterior autem indicat, quota sit litera diei plenilunii Paschalis item ab A antrorsum numerando; unde etiam patet dum residuum post divisionem per 7 fit 0, literam septimam G denotari, et 7 pro 0 accipiendum esse. Nam prima Martii litera D gaudet (pag. 332), adeoque litera plenilunii Paschalis prodibit, si ab A inclusive numeretur ultra literam diei plenilunii tribus antrorsum, nam D post A tribus literis porro est; itaque ut prodeat litera plenilunii Paschalis, tribus literis ultra numerum diei, in quem cadit, est numerandum ab A incipiendo, et ad literarum ordinem in circulo progrediendo. Atque hinc patet, quod si a prima Martii usque ad diem *plenilunii Paschalis* (inclusive) 7 dies semel aut pluribus vicibus defluxerint, residuum ex $44-e$ per 7 diviso indicet literæ plenilunii numerum a D incipiendo; atque si 3 addatur, numerus literæ eiusdem ab A incipiendo prodeat.

Si iam numerus n' *literae Dominicalis* maior fuerit numero m' *literae Plenilunii*, sitque excessus m, erit tum $m<7$, quia n' non >7, eritque $(44-e+m)$-ta Martii *dies Dominica* prima post plenilunium Paschale. Si vero

$$n'=m',$$

tum plenilunium in *diem Dominicam* cadit, adeoque 7 dies addi debent, uti si

$$m'>n'$$

fuerit; nam tum plenilunium ultra *diem Dominicam* cadit $m'-n'$ diebus; atque ad sequentem *literam Dominicalem* plenilunio proximam usque, in circulo erunt

$$7-(m'-n')=7+n'-m'$$

literæ. Hoc item eodem redit, etsi toti valori addatur 7.

§. 11.

Paschatis Gregoriani, pro epacta E positiva, formula est sequens: cadet Paschatis Gregoriani dies prima anno Christi n, in

Hosted by Google

$$44 - E + \text{res.}\frac{\left(4 + \frac{3(N-3)}{4}\text{ sine res.} - \text{res.}\frac{n + \frac{n}{4}\text{ sine res.}}{7}\right)}{7} -$$
$$- \text{res.}\frac{\left(\text{res.}\frac{44-E}{7} + 3\right)}{7}$$

-tam Martii *stilo novo*; ea cum restrictione quod

1. si $E > 23$, pro 44 accipi hic quoque $30 + 44 = 74$ debet; quia ut (in præcedentibus) iam $44 - 23 = 21$ plenilunium Paschale (iuxta dicta) primæ Martii proximum dat;

2. quod (per ea, quæ pag. 340 dicta sunt) pro $E = 24$ semper 25 accipiatur, et dum in eodem cyclo seculari 24 et 25 adsunt, pro 25 accipiatur 26;

3. quod et hic si terminus tertius secundo æqualis aut eo maior fuerit, toti valori addendum 7 sit; atque dum residui parentheseos sive prioris sive posterioris valor 0 est, et hic, ut ibi 7 accipiatur pro 0.

Ratio e præcedentibus intelligitur: quia et hic terminus primus indicat, in quotam Martii *plenilunium Gregorianum* cadat in anno n (pag. 347); secundus terminus autem indicat, quotanam sit *litera Dominicalis Gregoriana* (pag. 338) ab A incipiendo; tertius autem indicat, quotanam litera ab A incipiendo sit litera plenilunii, semper antrorsum numerando. Unde, ut in præcedentibus, reliqua intelliguntur.

§. 12.

Formulae sunt pro utroque Paschate necessariae:

$$e = \text{res.}\frac{11\left(\text{res.}\frac{n+1}{19} - 3\right)}{30},$$

$$E = e + \text{res.}\frac{l-s}{30},$$

atque

$$l = \frac{8(N-6)}{25}\text{ sine res.} \quad \text{et} \quad 4 + \frac{8(N-18)}{25}\text{ sine residuo,}$$

Hosted by Google

observando, quod si residuum >13 (pro N non >18) vel >17 (pro $N>18$), tum quoto integro 1 addatur (pagg. 344—345). Est quoque (pag. 331)

$$s=1+\frac{3(N-3)}{4},$$

quod si addatur tempori Iuliano, *stilus vetus ad novum reducetur.* Quum vero ipsa e numero undeviginti sint, maneantque eadem, in quovis seculo, addendo $l-s$, computari cyclus Gregorianus secularis potest.

Pro seculo praesente (1800—1899) autem, in quo $l=4$ et $s=12$, adeoque $l-s=-8$, *dies prima Paschatis Gregoriani* fit

$$52-e+\text{res.}\frac{\left(15-\text{res.}\frac{n+\frac{n}{4}\text{ sine res.}}{7}\right)}{7}-\text{res.}\frac{\left(\text{res.}\frac{52-e}{7}+3\right)}{7}$$

-ta Martii (*stilo novo*); nempe formula superior, pro quovis seculo (computatis l et s) ad simpliciorem reduci potest. Notandum autem quoad formulam hanc seculi præsentis: quod si e sive 0 sive 1 sit, in formula pro 52 poni 22 debeat; ad valores infra 9 ipsius e, (pag. 349) applicando, uti pro $e>8$ adeoque $E<23$, manere secus 52 patet. In cyclo præsentis seculi 24 non adest, adeoque hoc respectu attentione non indiget. Pro quovis seculo autem cyclus decemnovennalis Gregorianus ex l et s facile computatur (pag. 343), ut videatur, num 24 imo simul etiam 25 adsit (pag. 349).

Exemplo etiam illustrare haud supervacuum est. Sit pro anno 1810 Pascha Iulianum computandum. *Litera Dominicalis Iuliana* prodit per formulam sic: addatur ipsius 1810 pars quarta sine residuo;

$$\begin{array}{r} 1810 \\ 452 \\ \hline 2262, \end{array}$$

quod divisum per 7 residuum 1 dat, et $10-1=9$, atque res. $\frac{9}{7}=2$, adeoque litera Iuliana est B, et *litera Gregoriana* est G.

Epacta Iuliana e prodit per formulam (pag. 342) sic; $1810+1$ per 19 divisum dat residuum 6, e quo subtracto 3, manet 3, et hoc per 11 multi-

Hosted by Google

plicatum et tum per 30 divisum dat residuum $3 = e$; et $44 - e = 41$, residuum parentheseos primæ in formula Iuliana erat 2, residuum parentheseos secundæ etiam est 2, quia res. $\frac{41}{7} = 6$, et $6 + 3 = 9$. Sed dictum est, si residuum posterius maius priore aut ei æquale sit, addendum 7 esse: fiet igitur *Pascha Iulianum* $(41 + 2 - 2 + 7) =$ quadragesima octava Martii adeoque decima septima Aprilis (*stilo veteri*) seu $(17 + 12) =$ undetricesima Aprilis (*stilo novo*).

Pascha Gregorianum autem prodit

$$52 - 3 + \text{res.}\,\frac{(15-1)}{7} - \text{res.}\,\frac{\text{res.}\,\frac{52-3}{7} + 3}{7} = 49 + 0 - 3;$$

et pro 0 ponendo 7 (per regulam), fit $49 + 7 - 3$; adeoque Pascha Gregorianum stilo novo erit quinquagesima tertia Martii, id est vicesima secunda Aprilis.

Potest formula superior ad quemvis cuiusvis seculi annum modo eodem applicari.

§. 13.

Quamquam *aequinoctium* dictum haud astronomicum sit, et hoc quoque per intercalationem dictum aliquando a vicesima prima Martii usque ad undevicesimam et vicesimam tertiam removeatur, imo et dum *Plenilunium astronomicum* evenit alicubi diei *Sabbati* hora ultima, et alibi dies *Dominica* esse, adeoque Paschata octiduo differe possent: posita tamen lege, *in rebus sacris* determinata, de *Cyclo Paschatum* dicere fas est.

Erat (pag. 344) anno 1800 æquatio lunæ nempe $l = 4$; quæ abinde quibusvis 25 seculis crescit, ut fiat $4 + 8$ anno 4300. Quibusvis 100 seculis æquatio solis nempe s crescit $3 . 25$ dies, quia 4 in 100 continetur vicies quinquies, et quibusvis 4 seculis se invicem excipientibus a qualivis incipiendo, tres dies accedunt ipsi s. Item quum ab anno 1800 (exclusive) quibusvis $25 . 100$ annis incrementum ipsius l sit 8 dierum, erit incrementum ipsius $l - s$ quibusvis 100 seculis elapsis $32 - 75 = -43$.

Hosted by Google

Itaque ut res. $\frac{l-s}{30}$ (quod quovis seculo epactis Iulianis addi, ut Gregorianæ prodeant, dictum pag. 343 est) fiat æquale 0, ad minimum tot secula effluere necesse est, ut $l-s=-30.43$ fiat; itaque 30.100 id est 3000 secula requiruntur; atque tum erit res. $\frac{l-s}{30}$ plane idem quod prius erat, quum incrementum eius 0 sit.

Incipiet igitur cyclus ab anno 1800 (ipso anno 1800 excluso, dum $l=4$ factum est), et quidem ita, ut primum seculum abinde in anno 1900, secundum in 2000 &c. . . atque ter millesimum in anno 301800 (nempe 1800 + 300000) terminetur; eritque novorum 3000 seculorum primum seculum in anno 301900 adeoque pariter in anno seculari ante bissextili terminatum, ut prius; quod qualivis multiplo ipsius 300000 addito ipsi 1800, redire patet.

Sed ut cyclus epactarum Gregorianarum prodeat, non sufficit res. $\frac{l-s}{30}$ eodem ordine defluere, namque $E=e+$ res. $\frac{l-s}{30}$. Itaque necesse est, ut etiam epactæ Iulianæ simul incipiendo eodem ordine fluant: at vero hoc quibusvis 19 annis eodem redeundo fluit in perpetuum. Si igitur cyclus prior per 19 multiplicetur, idem e redibit, eodemque ordine epactæ Iulianæ se invicem excipient. Erit igitur cyclus epactarum Gregorianarum 19. 3000 seculorum; quibus effluxis eodem ordine sequentur. Atque e dictis (pag. 349) patet etiam plenilunia Paschalia (Gregoriana) eodem ordine semet excipere: neque autem cyclus minor datur; quia 3000 seculorum numerus erat, nec 19 inter factores ipsius 3000 adest.

Interim hic tantum pleniluniorum (non Paschatum Gregorianorum) cyclus est: ut hoc fiat, oportet cyclum illum determinare, quo prima Ianuarii *Gregoriani* in seculo, eadem septimanæ die incipiat, seu quum prima Ianuarii semper *A* sit, *literae Dominicalis Gregorianae* cyclus quæritur. Est vero (pag. 335) hic 8 seculorum, quem igitur certies defluere oportet; nempe cyclum dictum 19.3000 seculorum per 8 multiplicare necesse esset; at quum 8 metiatur numerum 3000, manebunt pro *cyclo Paschatum Gregorianorum* (19.3000 = 57000) *secula*.

Cyclus Paschatum Iulianorum autem non quoad locum absolutum respectu puncti fixi in alveo fluentis temporis rotundo (pag. 326), sed tantum nominali valore, nonnisi ad initium anni Iuliani referendo: est

Hosted by Google

$28 . 19 = 532$ annorum. Nam epactarum cyclus est 19, et cyclus solis 28 annorum est.

Si vero cyclus ab anno 1800 quæratur, quo ambo Paschata simul quoad *punctum* (pag. 326) *pro certo loco fixum*, semper eodem ordine sequantur: necesse est etiam s idem redire. Est vero anno 1800 (usque ad finem 1899) $s = 12$, crescitque usque ad 1900 (inclusive) uno die, et quibusvis quatuor seculis se invicem excipientibus crescit tres dies: distantiaque ab initio anni Iuliani decurrenda in circulo, qui nunc sit æqualis quantitati 365 dierum anni communis, donec s iterum idem sit, tot secula requirit, ut $365 - 12 = 353$ dies efficiat s. Requiruntur autem eo ad minimum 471 secula; nam $353 = 3 . 117 + 2$; ad $3 . 117$ vero requiruntur $4 . 117 = 468$ secula, quod cum 18 efficit 486 secula: et quum 488 bissextile sit, ad duos dies adhuc tria secula requiruntur post 486; quia quaternarius seculorum cum 19 incipit.

Nempe seculum bissextile potest B dici, præcedens vero A, illud autem P quod post bissextile est, et illud M (quasi medium) quod inter post et ante bissextile est; atque si quaternarius seculorum in A incipiat, in M terminatur, si in B incipiat, in A terminatur; et si in P incipiat, in B terminatur, si in M incipiat, in P terminatur, cuius ratio habenda est: in casu allato post 1800 terminantur 468 secula (adeoque 48 600) in M; atque ut adhuc 2 dies accedant, A, B, P requiruntur, nam in B nihil accedit. Nempe series seculorum sequens est: *MABPMA BPMABPM* . . . Eritque annus quæsitus 48 900.

Itaque dum in certo puncto p (Fig. 282.) Gregorianis ultima *Decembris* 48 900 erit, Iulianis prima Ianuarii anni 48 900 iis bissextilis erit; atque post unum diem incipiet Gregorianis 48 901 (Gregorianis neuter bissextilis); itaque a p incipiendo post 366 dies terminabitur Gregorianis 48901, Iulianis vero annus 48 900.

Patet hinc cyclum desideratum prodire, si cyclus prior (nempe 57000 seculorum) per 471 multiplicetur; quum 471 non sit factor ipsius 57000.

Hosted by Google

§. 14.

Pascha Iulianum cum Gregoriano coincidere post tale seculum neutiquam potest (donec periodi statim referendæ adveniant), in quo s æquatio solis tanta est, ut et vicesima prima Martii Iuliani, si ad stilum novum reducatur, additis 7 ad summum ut proxima *Dominica* prodeat, ultra *Benedictum* (nempe vicesimam quintam Aprilis Gregoriani) cadat. Nimirum *Plenilunium Paschatis Iuliani* initio anni Gregoriani proximum in vicesimam primam Martii stilo veteri cadit, Pascha Gregorianum vero (iuxta regulam, quod *non praecedat Marcum*, in vicesimam primam Martii cadentem, *nec postcedat Benedictum*, nempe vicesimam quintam Aprilis) tunc distat ab anni initio maxime, dum $E = 24$, adeoque *plenilunium* Paschale $= 74 - 25$ (pag. 349) $= 49$, cui maximum est 7, quod additur. Quum igitur $s = 34$ fiet, nunquam amplius Paschata coincidere poterunt, usquequo periodi sequentes adveniant. Seculo præsente patet (per pag. 349) pro $e > 23$ coincidere non posse; quum formulæ Iulianæ addi $s = 12$ debeat, ut valor uterque æqualis sit, et pro $e > 23$ in formula Iuliana ex 44 fiat 74.

§. 15.

Si res. $\frac{l-s}{30} = 0$ fiat, et annus Iulianus cum Gregoriano simul incipiant, in illo seculo per formulas patet Paschata omnia coincidere; nam tum $E = e$, et prima Martii eadem utrique est. Quæstio exoritur, quandonam hoc fiat?

Fiet (in §. præcedente) $s = 0$, in quantum anni Gregoriani et Iuliani simul incipient, uti si abinde s crescat $q \cdot 365$ dies, atque pro $s = 0$, etiam res. $\frac{l}{30} = 0$, ut res. $\frac{l-s}{30} = 0$ esse queat. Itaque quum anno 1800 sit $l - s = -8$; erit (ipsius l incremento l' dicto)

$$\text{res.} \frac{l' - 8 - 353 - q \cdot 365}{30} = 0;$$

atque hinc

$$\text{res.} \frac{l' - 1 - q \cdot 5}{30} = 0.$$

Hosted by Google

Si prius $q = 0$ accipiatur, erit (e præcedentibus) pro 471 seculis, diebus 353 respondentibus, $l' = 151$ diebus; quia $471 = 18.25 + 21$, atque $8.18 = 144$, cui si addantur 8 dies, seculis 21 competentes prodit 151. Fit igitur pro hoc casu formula

$$\text{res.}\frac{151-1}{30} = 0;$$

atque tum coincident prima vice Paschata per totum seculum. Si vero post tempus istud, dictis 353 diebus respondens, accedat tempus $q.365$ diebus respondens, et respondens incrementum æquationis lunæ l'' dicatur: expressio prior fiet $\text{res.}\frac{l''-q.5}{30}$; et quæritur, quandonam hoc $= 0$ fiat.

Incipiet post primum $s = 0$, tempus T ad incrementum 365 dierum ipsius s requisitum in M, desinet in A; abinde secundum incipiet in B, et desinet in M, et abinde incipiens in A in P desinet, atque item in M incipiens in A desinet, idemque ordo porro erit: nempe incipient in $MBA\ MBA$, desinent in $AMP\ AMP$, requiretque primum 486, secundum et tertium 487; et item 486, 487, 487 sequuntur semper porro. Eritque quum quodvis T in seculo A vel M aut P, adeoque Gregorianis communi Iulianis bissextili desinat, $s = 0$. Itaque id tantum quæritur, quandonam $\text{res.}\frac{l''-q.5}{30} = 0$ fiat; tunc enim Paschata per totum seculum coincident.

Ad finem primi T, 486 dat $l'' = 155$ (excedentibus 2 seculis), itaque

$$\text{res.}\frac{l''-1.5}{30} = \text{res.}\frac{150}{30} = 0;$$

at pro $2T$, $486 + 487$ dabit $l'' = 311$ (excedentibus 2 seculis); itaque

$$\text{res.}\frac{l''-2.5}{30} = \text{res.}\frac{301}{30} = 1;$$

nec petito satisfiet.

Interim etsi nec æquatio lunæ, nec solis $= 0$; sed illa -29, hæc -1, aut illa -1 hæc $+1$ sit: coincident Paschata per totum seculum, (excepto uno casu in quovis cyclo decemnovenali). Nempe dum $e = 23$,

Hosted by Google

in casu priore fit $E = 23 - 29 = -6$, adeoque E positive accepta erit $30 - 6 = 24$. Erit igitur (pag. 349) plenilunium Paschale *Gregorianum* $74 - 25 = 49$, plenilunium *Iulianum* autem $44 - 23 = 21$, quod ad stilum novum reducetur addito $s = -1$, fietque $= 20$. In altero casu autem pro $e = 25$ fiet plenilunium *Iulianum* $74 - 25 = 49$, et E erit $= 25 - 1 = 24$, adeoque plenilunium *Gregorianum* erit pariter $74 - 25 = 49$, sed priori addi $s = 1$ debet, ut ad stilum novum reducatur; itaque fieri potest, ut Paschata haud coincidant. In omnibus aliis casibus autem coincident. Cogitetur enim pro casu priori addi 30 ipsi $e - 29$, ut prodeat E positive; erit $e - 29 + 30 = E = e + 1$; quo pacto cuivis e infra 23 addita unitate, in neutra plenilunii Paschalis expressione mutabitur 44 in 74; itaque fiet plenilunium *Iulianum* ad stilum novum reductum $44 - e - 1$, plenilunium *Gregorianum* autem $44 - (e + 1)$. Pariter si e supra 23 fuerit, in utroque erit 74 pro 44.

In altero casu autem, si e infra 25 fuerit, per subtractionem unitatis, in utroque manebit 44: nempe e infra 25 sequens est 23. Idem de minoribus epactis Iulianis valet; et pariter si $e > 25$ fuerit, $74 - e + 1$ erit plenilunium *Iulianum* ad stilum novum reductum, et $74 - (e - 1)$ erit plenilunium *Gregorianum*, quia E erit $= e - 1$, et tum $e - 1 > 23$.

Potest autem facile computari, quantumnam fieri q oporteat, ut res. $\frac{l - s}{30} = 0$ sit. Seculorum nempe numeri 486, 487, 487 se invicem perpetuo excipiunt (positis iis, quæ dicta sunt), et numeri quibus multiplum ipsius 25 excedunt, sunt numeri 11, 12, 12 perpetuo; et nonnisi valores ipsius q tales quærendi sunt, ut incrementum ipsius l ex his excessibus exsurgens multiplum ipsius 30 sit, adeoque $l - s$ per 30 divisum residuum 0 det.

Seculo præsente (1800—1899) *Paschata* pro *numero aureo* 3, 8, 11, 14, 19 non coincidunt; nec quod pro 13 anno 1817 coinciderint, ad 1836 concluditur. *Marci* dies (pag. 354) includi videtur, sed *tabulis* excluditur; facile vero regula adaptaretur. Quæri conversim pro dictis et annus potest.

Hosted by Google

RECENSIO PER AUCTOREM IPSUM FACTA.

Horatii versus inverti posse videtur; nempe *Ubi pauca nitent, pluribus offendar maculis*: at quum has hucusque nonnisi auctor ostenderit, ius obtrectandi quoque adhucdum ei soli competit, in posterum cuique manens, qui novas detexerit. Itaque etsi, sententia mere, dictatoria reprobantes, ruinis altiores utcunque despexerint; conscia mens recti, non nitere sed tyronum evidentiam desiderantium vim tempusque ad ea quæ niteant servare studens, haud probrose erubescat, imo quacunque macula, quam detergere licebit, nova luce gaudeat: recensens novas monstraturus, facere non potest, quin indignetur, auctoremque reprehendat.

1. Cur tam diu versaverit, quid valeant humeri; donec quod iam pridem valuissent, demum ferre recusarint.

2. Cur unicam vitam brevem fere per omnem musarum numerum (quasi polygamia) diviserit.

3. Cur si defuerit otium, languens iam variisque tamen distractus, adversis omnibus quæ tale opus desiderat, ita ediderit: ut sæpe quasi per raptus, non amnis constantis naves ferentis, sed rivi, nunc falci viridem præbentis fundum, mox de cœlo exundantis instar, latus esse videatur.

Multa, donec virens vitæ arbor resonat, spes musarum floret: sed fructus aut nullos relinquit, aut boreas carpit immaturos, ni terra cœlumque faverint, desinenteque philomela in oliva cava vigilet ales Palladi sacra. Cum vero silvæ calvæ mutæque frigorum crysatillis efflorescunt, atque album in desertis sopitæ naturæ tegmen agitantes venti planctum incipiunt: non aliud restat, quam brevi post tinnitum cedere scena, campanisque comitantibus domum redire.

Hosted by Google

Denique tamen eo quæstio redit: num ita etiam uti est, edidisse, aut prorsus omisisse præstiterit? Recensens (ni fallatur) rem approbat: sed forma haud contentus, postulat, ut idem (præsertim in T. I.) per capita (iuxta radicem, truncum coronamque, pag. 1. T. I.* subdivisionibus etiam clare) distinctum, eaque de quibus postea agendum est, locis reservando propriis, correctius prodeat; quod iam utcunque edito hoc, ingenium conveniens otioque gaudens facilius præstare poterit; multa rigorem claritatemque sectans, ex his quoque amplexurus, etsi insuetorum signorum uti Tom. II.* in expl. sign. auctor ipse monet, non omnia retinuerit.

* Ed. I.

Hosted by Google

APPENDIX.

SCIENTIAM SPATII *absolute veram* exhibens:

a veritate aut falsitate Axiomatis XI *Euclidei* (*a priori haud unquam decidenda*) *independentem*; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.

Auctore JOHANNE BOLYAI de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.

Hosted by Google

Hosted by Google

EXPLICATIO SIGNORUM.

$\widetilde{ab}$	denotet	complexum *omnium* punctorum cum punctis a, b in recta sitorum.
$a\tilde{b}$	«	rectæ $\widetilde{ab}$ in a bifariam sectæ dimidium illud, quod punctum b complectitur.
$\widetilde{abc}$	«	complexum *omnium* punctorum, quæ cum punctis a, b, c (non in eadem recta sitis) in eodem plano sunt.
$ab\tilde{c}$	«	plani $\widetilde{abc}$ per $\widetilde{ab}$ bifariam secti dimidium, punctum c complectens.
abc	«	portionum, in quas $\widetilde{abc}$ per complexum rectarum $b\tilde{a}$, $b\tilde{c}$ dividitur, *minorem*; sive *angulum*, cuius $b\tilde{a}$, $b\tilde{c}$ crura sunt.
abcd	«	(si d in abc sit et $\widetilde{ba}$, $\widetilde{cd}$ se invicem non secent) portionem ipsius abc inter $b\tilde{a}$, bc, $c\tilde{d}$ comprehensam; bacd vero portionem plani $\widetilde{abc}$ inter $\widetilde{ab}$, $\widetilde{cd}$ sitam.
R	«	angulum rectum.
$ab \triangleq cd$	«	$cab = acd$.
$\equiv$	«	congruens.*
$x \frown a$	«	x tendere ad limitem a.
$\bigcirc r$	«	peripheriam circuli radii r.
$\odot r$	«	aream circuli radii r.

* Sit fas, signo hocce, quo summus Geometra *GAUSS numeros congruos* insignivit, congruentiam geometricam quoque denotare: nulla ambiguitate exinde metuenda.

Hosted by Google

Hosted by Google

§. 1.

Si rectam $\mathfrak{am}$ non secet plani eiusdem recta $\mathfrak{bn}$, at secet quævis $\mathfrak{bp}$ (in $\mathfrak{abn}$): designetur hoc per Fig. 1.

$$\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}.$$

Dari talem $\mathfrak{bn}$, et quidem *unicam*, e quovis puncto $\mathfrak{b}$ (extra $\overline{\mathfrak{am}}$), atque

$$\mathfrak{bam} + \mathfrak{abn} \text{ non } > 2R$$

esse patet; nam $\mathfrak{bc}$ circa $\mathfrak{b}$ mota, donec

$$\mathfrak{bam} + \mathfrak{abc} = 2R$$

fiat, $\mathfrak{bc}$ aliquando *primo* non secat $\mathfrak{am}$, estque tunc $\mathfrak{bc} \parallel \mathfrak{am}$.

Nec non patet esse $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{em}$, ubivis sit $\mathfrak{e}$ in $\overline{\mathfrak{am}}$ (supponendo in omnibus talibus casibus esse $\mathfrak{am} > \mathfrak{ae}$).

Et si, puncto $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{am}$ abeunte in infinitum, semper sit $\mathfrak{cd} = \mathfrak{cb}$: erit semper

$$\mathfrak{cdb} = (\mathfrak{cbd} < \mathfrak{nbc});$$

ast $\mathfrak{nbc} \backsim 0$; adeoque et $\mathfrak{adb} \backsim 0$.

§. 2.

Si $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}$; *est quoque* $\mathfrak{cn} \parallel \mathfrak{am}$. Fig. 2.

Nam sit $\mathfrak{d}$ ubicunque in $\mathfrak{macn}$. Si $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{bn}$ sit; $\mathfrak{bd}$ secat $\mathfrak{am}$ (propter $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}$), adeoque et $\mathfrak{cd}$ secat $\mathfrak{am}$; si vero $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{bp}$ fuerit; sit $\mathfrak{bq} \parallel \mathfrak{cd}$: cadit $\mathfrak{bq}$ in $\mathfrak{abn}$ (§. 1.) secatque $\mathfrak{am}$, adeoque et $\mathfrak{cd}$ secat $\mathfrak{am}$. Quævis $\mathfrak{cd}$ igitur (in $\mathfrak{acn}$) secat in utroque casu $\mathfrak{am}$ absque eo, ut $\mathfrak{cn}$ ipsam $\mathfrak{am}$ secet. Est ergo semper $\mathfrak{cn} \parallel \mathfrak{am}$.

Hosted by Google

§. 3.

Fig. 2. *Si tam* br *quam* cs *sit* ||| am, *et* c *non sit in* $\widetilde{br}$; *tum* $\widetilde{br}$, $\widetilde{cs}$ *se invicem haud secant.*

Si enim $\widetilde{br}$, $\widetilde{cs}$ punctum d commune haberent; (per §. 2.) essent dr et ds simul ||| am, caderetque (§. 1.) $\widetilde{ds}$ in $\widetilde{dr}$ et c in $\widetilde{br}$ (contra hyp.).

§. 4.

Fig. 3. *Si* man > mab; *pro quovis puncto* b *ipsius* $\widetilde{ab}$ *datur tale* c *in* $\widetilde{am}$, *ut sit* bcm = nam.

Nam datur (per §. 1.) bdm > nam, adeoque mdp = man, caditque b in nadp. Si igitur nam iuxta am feratur, usquequo $\widetilde{an}$ in $\widetilde{dp}$ veniat; aliquando $\widetilde{an}$ per b transiisse, et aliquod bcm = nam esse oportet.

§. 5.

Fig. 1. *Si* bn ||| am, *datur tale punctum* f *in* $\widetilde{am}$, *ut sit* fm ≏ bn.

Nam (per §. 1.) datur bcm > cbn; et si ce = cb, adeoque ec ≏ bc; patet esse bem < ebn. Feratur p per ec, angulo bpm semper *u*, et angulo pbn semper *v* dicto; patet *u* esse prius ei simultaneo *v* minus, posterius vero esse maius. Crescit vero *u* a bem usque bcm *continuo*; cum (per §. 4.) *nullus* angulus > bem et < bcm detur, cui *u* aliquando = non fiat; pariter decrescit *v* ab ebn usque cbn continuo: datur itaque in ec tale f, ut bfm = fbn sit.

§. 6.

Si bn ||| am, *atque ubivis sit* e *in* $\widetilde{am}$ *et* g *in* $\widetilde{bn}$: *tum* gn ||| em *et* em ||| gn.

Nam (per §. 1.) est bn ||| em, et hinc (per §. 2.) gn ||| em.

Si porro fm ≏ bn (§. 5.); tum mfbn = nbfm, adeoque (cum bn ||| fm sit) etiam fm ||| bn, et (per præc.) em ||| gn.

Hosted by Google

§. 7.

Si tam bn *quam* cp *sit* ∥ am, *et* c *non sit in* $\overline{bn}$: *est etiam* bn ∥ cp. Fig. 4.

Nam $b\tilde{n}$, $c\tilde{p}$ se invicem non secant (§. 3.); sunt vero am, bn, cp aut in plano, aut non; atque in casu primo am aut in bncp est, aut non.

Si am, bn, cp in plano sint, et am in bncp cadat; tum quævis $b\tilde{q}$ (in nbc) secat $\overline{am}$ in aliquo puncto d (quia bn ∥ am); porro cum dm ∥ cp sit (§. 6.), patet $d\tilde{q}$ secare $c\tilde{p}$, adeoque esse bn ∥ cp.

Si vero bn, cp in eadem plaga ipsius am sint; tum aliqua earum ex. gr. cp *intra* duas reliquas $\overline{bn}$, $\overline{am}$ cadit; quævis $b\tilde{q}$ (in nba) autem secat $a\tilde{n}$, adeoque et ipsam $\overline{cp}$. Est itaque bn ∥ cp.

Si mab, mac *angulum* efficiant: tum cbn cum abn nonnisi $b\tilde{n}$, $a\tilde{n}$ vero (in abn) cum $b\tilde{n}$, adeoque nbc quoque cum $a\tilde{n}$, nihil commune habent. Per quamvis $b\tilde{d}$ (in nba) autem positum $bc\tilde{d}$ secat $a\tilde{n}$, quia (propter bn ∥ am) $b\tilde{d}$ secat $a\tilde{n}$. Moto itaque $bc\tilde{d}$ circa bc, donec ipsam $a\tilde{n}$ *prima vice* deserat, postremo cadet $bc\tilde{d}$ in $bc\tilde{n}$. Eadem ratione cadet idem in $bc\tilde{p}$; cadit igitur bn in bcp. Porro si br ∥ cp; tum (quia etiam am ∥ cp) pari ratione cadit br in bam; nec non (propter br ∥ cp) in bcp. Itaque $b\tilde{r}$ ipsis mab, pcb commune, nempe ipsum $b\tilde{n}$ est, atque hinc bn ∥ cp.

Si igitur cp ∥ am, et b extra $\overline{cam}$ sit: tum sectio ipsorum bam, bcp, nempe $b\tilde{n}$ est ∥ tam ad am, quam ad cp.*

§. 8.

Si bn ∥ et ≏ cp (vel brevius bn ∥ ≏ cp), *atque* am (*in* nbcp) *rectam* bc *perpendiculariter bisecet*; *tum* bn ∥ am. Fig. 5.

Si enim $b\tilde{n}$ secaret $\overline{am}$, etiam $c\tilde{p}$ secaret $\overline{am}$ in eodem puncto (cum mabn = macp), quod et ipsis $b\tilde{n}$, $c\tilde{p}$ commune esset, quamvis bn ∥ cp sit. Quævis $b\tilde{q}$ (in cbn) vero secat $c\tilde{p}$; adeoque secat $b\tilde{q}$ etiam $a\tilde{n}$. Consequenter bn ∥ am.

* Casu tertio *praemisso* duo priores, adinstar casus secundi §. 10. brevius ac elegantius simul absolvi possunt. (Ed. I. Tom. I. Errata Appendicis).

Hosted by Google

§. 9.

Fig. 6 *Si* bn ∥ am, map ⊥ mab, *atque angulus, quem* nbd cum nba (in ea plaga ipsius mabn, ubi map est) *facit, sit* $< R$: *tum* map et nbd *se invicem secant.*

Nam sit

$$\mathfrak{bam} = R, \ \mathfrak{ac} \perp \mathfrak{bn}$$

(sive in b cadat c, sive non), et

$$\mathfrak{ce} \perp \mathfrak{bn} \ (\text{in } \mathfrak{nb\tilde{d}});$$

erit (per hyp.) $\mathfrak{ace} < R$, et af (⊥ ce) in ace cadet. Sit $\mathfrak{a\tilde{p}}$ sectio (punctum a commune habentium) $\mathfrak{ab\tilde{f}}$ et $\mathfrak{am\tilde{p}}$; erit

$$\mathfrak{bap} = \mathfrak{bam} = R$$

(cum sit bam ⊥ map). Si denique $\mathfrak{ab\tilde{f}}$ in $\mathfrak{ab\tilde{m}}$ ponatur (a et b manentibus); cadet $\mathfrak{a\tilde{p}}$ in $\mathfrak{a\tilde{m}}$; atque cum

$$\mathfrak{ac} \perp \mathfrak{bn} \quad \text{et} \quad \mathfrak{af} < \mathfrak{ac}$$

sit, patet af *intra* $\mathfrak{b\tilde{n}}$ terminari, adeoque bf in abn cadere. Secat autem $\mathfrak{b\tilde{f}}$ ipsam $\mathfrak{a\tilde{p}}$ in *hoc* situ (quia bn ∥ am), adeoque etiam in situ *primo* $\mathfrak{a\tilde{p}}$ et $\mathfrak{b\tilde{f}}$ se invicem secant; estque punctum sectionis ipsis $\mathfrak{ma\tilde{p}}$ et $\mathfrak{nb\tilde{d}}$ commune: secant itaque $\mathfrak{ma\tilde{p}}$ et $\mathfrak{nb\tilde{d}}$ se invicem.

Facile exhinc sequitur $\mathfrak{ma\tilde{p}}$ et $\mathfrak{nb\tilde{d}}$ se mutuo secare, si summa internorum, quos cum mabn efficiunt, $< 2R$ sit.

§. 10.

Fig. 7. *Si tam* bn *quam* cp *sit* ∥ ≏ am; *est etiam* bn ∥ ≏ cp.

Nam mab et mac aut *angulum* efficiunt, aut in plano sunt.

Si prius; bisecet $\overline{\mathfrak{qdf}}$ rectam ab perpendiculariter; erit dq ⊥ ab, adeoque dq ∥ am (§. 8.); pariter si $\overline{\mathfrak{ers}}$ bisecet rectam ac perpendiculariter, est er ∥ am; unde dq ∥ er (§. 7.). Facile hinc (per §. 9.) consequitur, $\overline{\mathfrak{qdf}}$

Hosted by Google

et $\widehat{\mathfrak{ers}}$ se mutuo secare, et sectionem $\widetilde{\mathfrak{fs}}$ esse $\parallel\!\mathfrak{dq}$ (§. 7.), atque (propter $\mathfrak{bn} \parallel\!\mathfrak{dq}$) esse etiam

$$\mathfrak{fs} \parallel\!\mathfrak{bn}.$$

Est porro (pro quovis puncto ipsius $\widetilde{\mathfrak{fs}}$)

$$\mathfrak{fb} = \mathfrak{fa} = \mathfrak{fc},$$

caditque $\widetilde{\mathfrak{fs}}$ in planum $\widehat{\mathfrak{tgf}}$, rectam $\mathfrak{bc}$ perpendiculariter bisecans. Est vero (per §. 7.) (cum sit $\mathfrak{fs} \parallel\!\mathfrak{bn}$) etiam

$$\mathfrak{gt} \parallel\!\mathfrak{bn}.$$

Pari modo demonstratur $\mathfrak{gt} \parallel\!\mathfrak{cp}$ esse. Interim $\mathfrak{gt}$ bisecat rectam $\mathfrak{bc}$ perpendiculariter; adeoque $\mathfrak{tgbn} \equiv \mathfrak{tgcp}$ (§. 1.) et

$$\mathfrak{bn} \parallel\!\triangleq \mathfrak{cp}.$$

Si $\mathfrak{bn}$, $\mathfrak{am}$, $\mathfrak{cp}$ in plano sint; sit (*extra* hoc planum cadens) $\mathfrak{fs} \parallel\!\triangleq \mathfrak{am}$; tum (per præc.) $\mathfrak{fs} \parallel\!\triangleq$ tam ad $\mathfrak{bn}$ quam ad $\mathfrak{cp}$, adeoque et $\mathfrak{bn} \parallel\!\triangleq \mathfrak{cp}$.

§. 11.

Complexus puncti $\mathfrak{a}$, atque *omnium* punctorum, quorum quodvis $\mathfrak{b}$ tale est, ut si $\mathfrak{bn} \parallel\!\mathfrak{am}$ sit, sit etiam $\mathfrak{bn} \triangleq \mathfrak{am}$; dicatur F: sectio vero ipsius F cum quovis plano rectam $\mathfrak{am}$ complectente nominetur L.

In quavis recta, quæ $\parallel\!\mathfrak{am}$ est, F gaudet puncto, et nonnisi uno; atque patet L per $\mathfrak{am}$ dividi in duas partes congruentes; dicatur $\mathfrak{am}$ *axis* ipsius L; patet etiam, in quovis plano rectam $\mathfrak{am}$ complectente, pro *axe* $\mathfrak{am}$ unicum L dari. Quodvis eiusmodi L, dicatur L *ipsius* $\mathfrak{am}$ (in plano, de quo agitur, intelligendo). Patet per L circa $\mathfrak{am}$ revolutum, F describi, cuius $\mathfrak{am}$ *axis* vocetur, et vicissim F *axi* $\mathfrak{am}$ *attribuatur.*

§. 12.

Si $\mathfrak{b}$ *ubivis in* L *ipsius* $\mathfrak{am}$ *fuerit, et* $\mathfrak{bn} \parallel\!\triangleq \mathfrak{am}$ (§. 11.); *tum* L *ipsius* $\mathfrak{am}$ *et* L *ipsius* $\mathfrak{bn}$ *coincidunt.*

Hosted by Google

Nam dicatur L ipsius $\mathfrak{bn}$ distinctionis ergo l; sitque $\mathfrak{c}$ ubivis in l, et $\mathfrak{cp} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{bn}$ (§. 11.); erit (cum et $\mathfrak{bn} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{am}$ sit) $\mathfrak{cp} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{am}$ (§. 10.), adeoque $\mathfrak{c}$ etiam in L cadet. Et si $\mathfrak{c}$ ubivis in L sit, et $\mathfrak{cp} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{am}$; tum $\mathfrak{cp} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{bn}$ (§. 10.); caditque $\mathfrak{c}$ etiam in l (§. 11.). Itaque L et l sunt eadem; ac quævis $\mathfrak{bn}$ est etiam axis ipsius L, et inter omnes axes ipsius L, $\triangleq$ est.

Idem de F eodem modo patet.

§. 13.

3. *Si* $\mathfrak{bn} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{am}$, $\mathfrak{cp} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{dq}$, *et* $\mathfrak{bam}+\mathfrak{abn}=2R$ *sit*; *tum etiam* $\mathfrak{dcp}+\mathfrak{cdq}=2R$.

Sit enim $\mathfrak{ea}=\mathfrak{eb}$ et $\mathfrak{efm}=\mathfrak{dcp}$ (§. 4.); erit (cum

$$\mathfrak{bam}+\mathfrak{abn}=2R=\mathfrak{abn}+\mathfrak{abg}$$

sit)

$$\mathfrak{ebg}=\mathfrak{eaf};$$

adeoque si etiam $\mathfrak{bg}=\mathfrak{af}$ sit,

$$\triangle\,\mathfrak{ebg}=\triangle\,\mathfrak{eaf},\quad \mathfrak{beg}=\mathfrak{aef},$$

cadetque $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{fe}$. Est porro $\mathfrak{gfm}+\mathfrak{fgn}=2R$ (quia $\mathfrak{egb}=\mathfrak{efa}$). Est etiam $\mathfrak{gn} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{fm}$ (§. 6.); itaque si $\mathfrak{mfrs}=\mathfrak{pcdq}$, tum $\mathfrak{rs} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{gn}$ (§. 7.), et $\mathfrak{r}$ in vel extra $\mathfrak{fg}$ cadit (si $\mathfrak{cd}$ non $=\mathfrak{fg}$, ubi res iam patet).

I. In casu primo est $\mathfrak{frs}$ non $>(2R-\mathfrak{rfm}=\mathfrak{fgn})$, quia $\mathfrak{rs} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{fm}$; ast cum $\mathfrak{rs} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{gn}$ sit, est etiam $\mathfrak{frs}$ non $<\mathfrak{fgn}$; adeoque $\mathfrak{frs}=\mathfrak{fgn}$, et

$$\mathfrak{rfm}+\mathfrak{frs}=\mathfrak{gfm}+\mathfrak{fgn}=2R.$$

Itaque et $\mathfrak{dcp}+\mathfrak{cdq}=2R$.

II. Si $\mathfrak{r}$ extra $\mathfrak{fg}$ cadat; tunc $\mathfrak{ngr}=\mathfrak{mfr}$, sitque $\mathfrak{mfgn}=\mathfrak{nghl}=\mathfrak{lhko}$ et ita porro, usquequo $\mathfrak{fk}=$ vel prima vice $>\mathfrak{fr}$ fiat. Est heic $\mathfrak{ko} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{hl} \parallel\!\!\!\parallel \mathfrak{fm}$ (§. 7.). Si $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{r}$ cadat; tum $\mathfrak{ko}$ in $\mathfrak{rs}$ cadit (§. 1.); adeoque

$$\mathfrak{rfm}+\mathfrak{frs}=\mathfrak{kfm}+\mathfrak{fko}=\mathfrak{kfm}+\mathfrak{fgn}=2R;$$

si vero $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{hk}$ cadat, tum (per I.) est

$$\mathfrak{rhl}+\mathfrak{hrs}=2R=\mathfrak{rfm}+\mathfrak{frs}=\mathfrak{dcp}+\mathfrak{cdq}.$$

Hosted by Google

§. 14.

Si $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}$, $\mathfrak{cp} \parallel \mathfrak{dq}$, *et* $\mathfrak{bam}+\mathfrak{abn}<2R$ *sit*; *tum etiam* $\mathfrak{dcp}+\mathfrak{cdq}<2R$.

Si enim $\mathfrak{dcp}+\mathfrak{cdq}$ non esset $<$, adeoque (per §. 1.) esset $=2R$; tum (per §. 13.) etiam $\mathfrak{bam}+\mathfrak{abn}=2R$ esset (contra hyp.).

§. 15.

Perpensis §§. 13. et 14. *Systema Geometriae hypothesi veritatis Axiomatis Euclidei XI. insistens dicatur* Σ; *et hypothesi contrariae superstructum sit S. Omnia, quae expresse non dicentur, in* Σ *vel in S esse*; *absolute enuntiari*, i. e. *illa, sive* Σ *sive S reipsa sit, vera asseri intelligatur.*

§. 16.

Si $\mathfrak{am}$ *sit axis alicuius* L; *tum* L *in* Σ *recta* $\perp \mathfrak{am}$ *est.* Fig. 5.

Nam sit e quovis puncto $\mathfrak{b}$ ipsius L axis $\mathfrak{bn}$; erit in Σ

$$\mathfrak{bam}+\mathfrak{abn}=2\mathfrak{bam}=2R,$$

adeoque $\mathfrak{bam}=R$. Et si $\mathfrak{c}$ quodvis punctum in $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ sit, atque $\mathfrak{cp} \parallel \mathfrak{am}$; est (per §. 13.) $\mathfrak{cp} \doteq \mathfrak{am}$, adeoque $\mathfrak{c}$ in L (§. 11.).

In S vero nulla 3 *puncta* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *ipsius* L *vel* F *in recta sunt.*

Nam aliquis axium $\mathfrak{am}$, $\mathfrak{bn}$, $\mathfrak{cp}$ (ex. gr. $\mathfrak{am}$) intra duos reliquos cadit; et tunc (per §. 14.) tam $\mathfrak{bam}$ quam $\mathfrak{cam}<R$.

§. 17.

L est etiam in S linea, et F superficies. Fig. 7.

Nam (per §. 11.) quodvis planum ad axem $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$ (per punctum aliquod ipsius F) perpendiculare secat ipsum F in peripheria circuli, cuius planum (per §. 14.) ad nullum alium axem $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{n}}$ perpendiculare est. Revolvatur F circa $\mathfrak{bn}$; manebit (per §. 12.) quodvis punctum ipsius F in F, et sectio ipsius F cum plano ad $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{n}}$ non perpendiculari describet super-

Hosted by Google

ficiem: atqui F (per §. 12.), quæcunque puncta a, b fuerint in eo, ita *sibi* congruere poterit, ut a in b cadat; est igitur F *superficies uniformis.*

Patet hinc (per §§. 11. et 12.) L esse *lineam uniformem.**

§. 18.

Fig. 7. *Cuiusvis plani, per punctum* a *ipsius* F *ad axem* am *oblique positi, sectio cum* F *in* S *peripheria circuli est.*

Nam sint a, b, c 3 puncta huius sectionis, et bn, cp axes; facient ambn, amcp angulum; nam secus planum (ex §. 16.) per a, b, c determinatum ipsam am complecteretur (contra hyp.). Plana igitur, rectas ab, ac perpendiculariter bisecantia se mutuo secant (§. 10.) in aliquo axe fs (ipsius F), atque fb = fa = fc. Sit ah ⊥ fs, et revolvatur fah circa fs; describet a peripheriam radii ha, per b et c euntem, et *simul* in F et $\widehat{abc}$ sitam; nec F et $\widehat{abc}$ præter ○ ha quidquam commune habent (§. 16.).

Patet etiam extremitate portionis fa lineæ L (tanquam radio) in F circa f mota ipsam ○ ha describi.

§. 19.

Fig. 5. *Perpendicularis* bt *ad axem* bn *ipsius* L (in planum ipsius L cadens) *est in* S *tangens ipsius* L.

Nam L in bt praeter b nullo puncto gaudet (§. 14.), si vero bq in tbn cadat, tum centrum sectionis plani per bq ad tbn perpendicularis cum F ipsius bn (§. 18.) manifesto in bq locatur, et si bq diameter sit, patet bq lineam L ipsius bn in q secare.

§. 20.

Per quaevis duo puncta in F *linea* L *determinatur* (§§. 11. et 18.); atque (cum ex §§. 16. et 19. L perpendicularis ad omnes suos axes sit)

* Demonstrationem ad S restringere haud necesse est; quum facile ita proponatur, ut absolute (pro S et Σ) valeat. (Ed. I. Tom. I. Errata Appendicis).

Hosted by Google

quivis angulus Llineus in F angulo planorum ad F per crura perpendicularium aequalis est.

§. 21.

Duae lineae Lformes $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{d}}$ *in eodem F, cum tertia Lformi* $\mathfrak{ab}$ *summam internorum* $< 2R$ *efficientes, se mutuo secant* (per $\widetilde{\mathfrak{ap}}$ in F intelligendo L per $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$ ductum, per $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{p}}$ vero dimidium illud eius ex $\mathfrak{a}$ incipiens, in quod $\mathfrak{p}$ cadit). Fig. 6.

Nam si $\mathfrak{am}$, $\mathfrak{bn}$ axes ipsius F sint; tum $\mathfrak{am}\tilde{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{bn}\tilde{\mathfrak{d}}$ secant se invicem (§. 9.); atque F secat eorundem sectionem (per §§. 7. et 11.); adeoque et $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{d}}$ se mutuo secant.

Patet exhinc Axioma XI. et omnia, quæ in Geometria Trigonometriaque (plana) asseruntur, *absolute* constare in F, rectarum vices lineis L subeuntibus: idcirco functiones trigonometricæ abhinc eodem sensu accipientur, quo in Σ veniunt; et peripheria circuli, cuius radius Lformis $= r$ in F, est $= 2\pi r$, et pariter $\odot r$ (in F) $= \pi r^2$ (per π intelligendo $\frac{1}{2} \bigcirc 1$ in F, sive notum $3{\cdot}1415926\ldots$).

§. 22.

Si $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ *fuerit L ipsius* $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$, *et* $\mathfrak{c}$ *in* $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$; *atque angulus* $\mathfrak{cab}$ (e recta $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$ et Lformi linea $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}}$ compositus) *feratur prius iuxta* $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}}$, *tum iuxta* $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{a}}$ *semper porro in infinitum: erit via* $\widetilde{\mathfrak{cd}}$ *ipsius* $\mathfrak{c}$ *linea L ipsius* $\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{m}}$. Fig. 9.

Nam (posteriore l dicta) sit punctum quodvis $\mathfrak{d}$ in $\widetilde{\mathfrak{cd}}$, $\mathfrak{dn} \parallel\!\!\parallel \mathfrak{cm}$, et $\mathfrak{b}$ punctum ipsius L in $\widetilde{\mathfrak{dn}}$ cadens; erit $\mathfrak{bn} \triangleq \mathfrak{am}$, et $\mathfrak{ac} = \mathfrak{bd}$, adeoque $\mathfrak{dn} \triangleq \mathfrak{cm}$, consequ. $\mathfrak{d}$ in l. Si vero $\mathfrak{d}$ in l et $\mathfrak{dn} \parallel\!\!\parallel \mathfrak{cm}$, atque $\mathfrak{b}$ punctum ipsius L ipsi $\widetilde{\mathfrak{dn}}$ commune sit; erit $\mathfrak{am} \triangleq \mathfrak{bn}$ et $\mathfrak{cm} \triangleq \mathfrak{dn}$, unde manifesto $\mathfrak{bd} = \mathfrak{ac}$, cadetque $\mathfrak{d}$ in viam puncti $\mathfrak{c}$, et sunt l et $\widetilde{\mathfrak{cd}}$ eadem. Designetur tale l per $l \parallel L$.

§. 23.

Si linea Lformis $\mathfrak{cdf} \parallel \mathfrak{abe}$ (§. 22.), et $\mathfrak{ab} = \mathfrak{be}$, atque $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{e}\tilde{\mathfrak{p}}$ sint axes; erit manifesto $\mathfrak{cd} = \mathfrak{df}$; et si quælibet 3 puncta $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$ fuerint ipsius Fig. 9.

Hosted by Google

$\widetilde{\mathfrak{ab}}$, ac $\mathfrak{ab} = n \,.\, \mathfrak{cd}$: erit quoque $\mathfrak{ae} = n \,.\, \mathfrak{cf}$; adeoque (manifesto etiam pro $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ae}$, $\mathfrak{dc}$ incommensurabilibus)

$$\mathfrak{ab} : \mathfrak{cd} = \mathfrak{ae} : \mathfrak{cf},$$

estque $\mathfrak{ab} : \mathfrak{cd}$ ab $\mathfrak{ab}$ *independens* et per $\mathfrak{ac}$ *prorsus determinatum*. Denotetur quotus iste, nempe $\mathfrak{ab} : \mathfrak{cd}$ litera maiore eiusdem nominis (puta per X), quo $\mathfrak{ac}$ litera minuscula (ex. gr. x) insignitur.

§. 24.

Quaecunque x et y fuerint; est $Y = X^{\frac{y}{x}}$ (§. 23.).

Nam aut erit alterum (ipsorum x, y) multiplum alterius (ex. gr. y ipsius x), aut non.

Si $y = nx$; sit $x = \mathfrak{ac} = \mathfrak{cg} = \mathfrak{gh}$ &, usquequo $\mathfrak{ah} = y$ fiat; sit porro $\mathfrak{cd} \parallel \mathfrak{gk} \parallel \mathfrak{hl}$; erit (§. 23.)

$$X = \mathfrak{ab} : \mathfrak{cd} = \mathfrak{cd} : \mathfrak{gk} = \mathfrak{gk} : \mathfrak{hl};$$

adeoque

$$\frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{hl}} = \left(\frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{cd}}\right)^n,$$

sive

$$Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}.$$

Si x, y mulipla ipsius i sint, puta

$$x = mi \quad \text{et} \quad y = ni;$$

est (per præc.)

$$X = I^m, \; Y = I^n,$$

consequ.

$$Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}.$$

Idem ad casum incommensurabilitais ipsorum x, y facile extenditur. Si vero fuerit $q = y - x$; erit manifesto $Q = Y : X$.

Nec non manifestum est, in Σ pro quovis x esse $X = 1$, in S vero $X > 1$ esse, atque pro *quibusvis* $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{abe}$ dari tale $\mathfrak{cdf} \parallel \mathfrak{abe}$, ut sit $\mathfrak{cdf} = \mathfrak{ab}$,

Hosted by Google

unde $\mathfrak{ambn} = \mathfrak{amep}$ erit, etsi hoc illius qualevis multiplum sit; quod singulare quidem est, sed absurditatem ipsius S evidenter non probat.

§. 25.

In quovis rectilineo triangulo sunt peripheriae radiorum lateribus aequalium, uti sinus angulorum oppositorum. Fig. 10.

Sit enim $\mathfrak{abc} = R$, et $\mathfrak{am} \perp \mathfrak{bac}$, atque sint $\mathfrak{bn}$, $\mathfrak{cp} \parallel \mathfrak{am}$; erit $\mathfrak{cab} \perp \mathfrak{ambn}$, adeoque (cum $\mathfrak{cb} \perp \mathfrak{ba}$ sit) $\mathfrak{cb} \perp \mathfrak{ambn}$, consequ. $\mathfrak{cpbn} \perp \mathfrak{ambn}$. Secet F *ipsius* $\mathfrak{cp}$ rectas $\widetilde{\mathfrak{bn}}$, $\widetilde{\mathfrak{am}}$ (respective) in $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, et fascias $\mathfrak{cpbn}$, $\mathfrak{cpam}$, $\mathfrak{bnam}$ in lineis Lformibus $\mathfrak{cd}$, $\mathfrak{ce}$, $\mathfrak{de}$; erit (§. 20.) $\mathfrak{cde}$ = angulo ipsorum $\mathfrak{ndc}$, $\mathfrak{nde}$, adeoque $= R$; atque pari ratione est $\mathfrak{ced} = \mathfrak{cab}$.

Est autem (per §. 21.) in Llineo triangulo $\mathfrak{ced}$ (heic radio semper $=1$ posito)

$$\mathfrak{ec} : \mathfrak{dc} = 1 : \sin.\mathfrak{dec} = 1 : \sin.\mathfrak{cab}.$$

Est quoque (per §. 21.)

$$\begin{aligned} \mathfrak{ec} : \mathfrak{dc} &= \bigcirc \mathfrak{ec} : \bigcirc \mathfrak{dc} \text{ (in } F) \\ &= \bigcirc \mathfrak{ac} : \bigcirc \mathfrak{bc} \text{ (§. 18.)}; \end{aligned}$$

adeoque est etiam

$$\bigcirc \mathfrak{ac} : \bigcirc \mathfrak{bc} = 1 : \sin.\mathfrak{cab};$$

unde assertum pro quovis triangulo liquet.

§. 26.

In quovis sphaerico triangulo sunt sinus laterum, uti sinus angulorum iisdem oppositorum. Fig. 11.

Nam sit $\mathfrak{abc} = R$, et $\mathfrak{ced}$ perpendiculare ad sphæræ radium $\mathfrak{oa}$; erit $\mathfrak{ced} \perp \mathfrak{aob}$, et (cum etiam $\mathfrak{boc} \perp \mathfrak{boa}$ sit) $\mathfrak{cd} \perp \mathfrak{ob}$. In triangulis $\mathfrak{ceo}$, $\mathfrak{cdo}$ vero est (per §. 25.)

$$\begin{aligned} \bigcirc \mathfrak{ec} : \bigcirc \mathfrak{oc} : \bigcirc \mathfrak{dc} &= \sin.\mathfrak{coe} : 1 : \sin.\mathfrak{cod} \\ &= \sin.\mathfrak{ac} : 1 : \sin.\mathfrak{bc}; \end{aligned}$$

interim (§. 25.) etiam

Hosted by Google

$$\bigcirc ec : \bigcirc dc = \sin. cde : \sin. ced;$$

itaque

$$\sin. ac : \sin. bc = \sin. cde : \sin. ced;$$

est vero $cde = R = cba$, atque $ced = cab$. Consequenter

$$\sin. ac : \sin. bc = 1 : \sin. a.$$

E quo promanans Trigonometria sphaerica ab Axiomate XI. independenter stabilita est.

§. 27.

Fig. 12. *Si* ac, bd *sint* $\perp ab$, *et feratur* cab *iuxta* $\widetilde{ab}$; *erit* (*via puncti* c *dicta heic* cd)

$$cd : ab = \sin. u : \sin. v.$$

Nam sit $de \perp ca$; est in triangulis ade, adb (per §. 25.)

$$\bigcirc ed : \bigcirc ad : \bigcirc ab = \sin. u : 1 : \sin. v.$$

Revoluto $bacd$ circa ac, describetur $\bigcirc ab$ per b, $\bigcirc ed$ per d; et via dictæ cd denotetur heic per $\odot cd$. Sit porro polygonum quodvis $bfg \ldots$ ipsi $\odot ab$ inscriptum; nascetur per plana ex omnibus lateribus bf, fg &, ad $\odot ab$ perpendicularia, in $\odot cd$ quoque figura polygonalis totidem laterum; et demonstrari (ad instar §. 23.) potest, esse

$$cd : ab = dh : bf = hk : fg = \cdots,$$

adeoque

$$dh + hk + \cdots : bf + fg + \cdots = cd : ab$$

Quovis laterum bf, fg, ... ad limitem o tendente, manifesto

$$bf + fg + \cdots \backsim \bigcirc ab \quad \text{et} \quad dh + hk + \cdots \backsim \bigcirc ed.$$

Itaque etiam

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = cd : ab.$$

Erat vero

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = \sin. u : \sin. v.$$

Consequ.

$$cd : ab = \sin. u : \sin. v.$$

Hosted by Google

Remoto ac a bd in infinitum, manet

$$cd : ab$$

adeoque etiam

$$\sin. u : \sin. v$$

constans; u vero $\frown R$ (§. 1.), et si dm ||| bn sit, $v \frown z$; unde fit

$$cd : ab = 1 : \sin. z.$$

Via dicta cd denotabitur per cd || ab.

§. 28.

Si bn ||| ≏ am, *et* c *in* am̃, *atque* $ac = x$ *sit*: *erit* X (§. 23.) Fig. 13.

$$= \sin. u : \sin. v.$$

Nam si cd et ae sint ⊥ bn et bf ⊥ am; erit (ad instar §. 27.)

$$\bigcirc bf : \bigcirc cd = \sin. u : \sin. v.$$

Est autem evidenter $bf = ae$: quamobrem

$$\bigcirc ea : \bigcirc dc = \sin. u : \sin. v.$$

In superficiebus vero F formibus ipsorum am et cm (ipsum ambn in ab et cg secantibus) est (per §. 21.)

$$\bigcirc ea : \bigcirc dc = ab : cg = X.$$

Est itaque etiam

$$X = \sin. u : \sin. v.$$

§. 29.

Si $bam = R$, $ab = y$, *et* bn ||| am *sit*; *erit in* S Fig. 14.

$$Y = \cot. \frac{1}{2} u.$$

Hosted by Google

Nam si fuerit $ab = ac$, et $cp \parallel am$ (adeoque $bn \parallel \triangleq cp$), atque $pcd = qcd$; datur (§. 19.) $ds \perp c\tilde{d}$, ut $ds \parallel cp$, adeoque (§. 1.) $dt \parallel cq$ sit. Si porro $be \perp d\tilde{s}$; erit (§. 7.) $ds \parallel bn$, adeoque (§. 6.) $bn \parallel es$, et (cum $dt \parallel cq$ sit) $bq \parallel et$; consequ. (§. 1.) $ebn = ebq$.

Repræsententur, bcf ex L ipsius bn, et fg, dh, ck et el ex L formibus lineis ipsorum ft, dt, cq et et; erit evidenter (§. 22.)

$$hg = df = dk = hc;$$

itaque

$$cg = 2ch = 2v.$$

Pariter patet

$$bg = 2bl = 2z$$

esse. Est vero

$$bc = bg - cg;$$

quapropter

$$y = z - v,$$

adeoque (§. 24.)

$$Y = Z : V.$$

Est demum (§. 28.)

$$Z = 1 : \sin. \frac{1}{2} u \quad \text{et} \quad V = 1 : \sin. \left(R - \frac{1}{2} u\right),$$

consequ.

$$Y = \cot. \frac{1}{2} u.$$

§. 30.

Fig. 15. Verumtamen facile (ex §. 25.) patet, resolutionem problematis *Trigonometriae planae* in S, peripheriæ per radium expressæ indigere; hoc vero rectificatione ipsius L obtineri potest.

Sint ab, cm, $c'm' \perp a\tilde{c}$, atque b ubivis in $a\tilde{b}$; erit (§. 25.)

$$\sin. u : \sin. v = \bigcirc p : \bigcirc y$$

et

$$\sin. u' : \sin. v' = \bigcirc p : \bigcirc y';$$

adeoque

$$\frac{\sin. u}{\sin. v} \bigcirc = \frac{\sin. u'}{\sin. v'} \bigcirc y'.$$

Est vero (per §. 27.)

Hosted by Google

$$\sin. v : \sin. v' = \cos. u : \cos. u';$$

consequ.

$$\frac{\sin. u}{\cos. u} \bigcirc y = \frac{\sin. u'}{\cos. u'} \bigcirc y',$$

seu

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = \text{tang}. u' : \text{tang}. u = \text{tang}. w : \text{tang}. w'.$$

Sint porro $\mathfrak{cn} \parallel \mathfrak{ab}$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{n}' \parallel \mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{cd}$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ lineæ Lformes ad $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ perpendiculares; erit (§. 21.) etiam

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = r : r',$$

adeoque

$$r : r' = \text{tang}. w : \text{tang}. w'.$$

Crescat iam p ab $\mathfrak{a}$ incipiendo in infinitum; tum $w \backsim z$ et $w' \backsim z'$; quapropter etiam

$$r : r' = \text{tang}. z : \text{tang}. z'.$$

Constans $r : \text{tang}. z$ (ab r *independens*) dicatur i; dum $y \backsim 0$, est

$$\left(\frac{r}{y} = \frac{i \,\text{tang}. z}{y}\right) \backsim 1,$$

adeoque

$$\frac{y}{\text{tang}. z} \backsim i.$$

Ex §. 29. fit

$$\text{tang}. z = \frac{1}{2}(Y - Y^{-1});$$

itaque

$$\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \backsim i,$$

seu (§. 24.)

$$\frac{2yI^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}} - 1} \backsim i.$$

Notum autem est, expressionis istius (dum $y \backsim 0$) limitem esse $\frac{i}{\text{log. nat.} I}$; est ergo

$$\frac{i}{\text{log. nat.} I} = i \quad \text{et} \quad I = e = 2{\cdot}7182818\ldots,$$

Hosted by Google

quæ quantitas insignis hic quoque elucet. Si nempe abhinc i illam rectam denotet, cuius $I = e$ sit, erit $r = i \operatorname{tang.} z$. Erat autem (§. 21.) $\bigcirc y = 2\pi r$; est igitur

$$\bigcirc y = 2\pi i \operatorname{tang.} z = \pi i (Y - Y^{-1}) =$$
$$= \pi i (e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}) = \frac{\pi y}{\text{log. nat. } Y} (Y - Y^{-1})$$

(per §. 24.).

§. 31.

Fig. 16. Ad resolutionem omnium triangulorum rectangulorum rectilineorum trigonometricam (e qua omnium triangulorum resolutio in promtu est) in S 3 æquationes sufficiunt: nempe (a, b cathetos, c hypotenusam, et α, β angulos cathetis oppositos denotantibus) æquatio relationem exprimens *primo* inter a, c, α, *secundo* inter a, α, β, *tertio* inter a, b, c; nimirum ex his *reliquae* 3 per eliminationem prodeunt.

I. Ex §§. 25. et 30. est

$$1 : \sin. \alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = (e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}) : (e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}});$$

(æquatio pro α, c, a).

II. Ex §. 27. sequitur (si $\beta\mathfrak{m} \parallel \gamma\mathfrak{n}$ sit)

$$\cos. \alpha : \sin. \beta = 1 : \sin. u;$$

ex §. 29. autem fit

$$1 : \sin. u = \frac{1}{2}(A + A^{-1});$$

itaque

$$\cos. \alpha : \sin. \beta = \frac{1}{2}(A + A^{-1}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}});$$

(æquatio pro α, β, a).

III. Si $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$, atque $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ fuerint $\parallel \alpha\alpha'$, (§. 27.), atque $\beta'\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$; erit manifesto (uti in §. 27.)

$$\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\sin. u} = \frac{1}{2}(A + A^{-1}),$$
$$\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

Hosted by Google

ac

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}(C + C^{-1});$$

consequ.

$$\frac{1}{2}(C + C^{-1}) = \frac{1}{2}(A + A^{-1})\frac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

sive

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)\left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right);$$

(æquatio pro a, b, c).

Si $\gamma\alpha\delta = R$, et $\beta\delta \perp \alpha\delta$ sit; erit

$$\bigcirc c : \bigcirc a = 1 : \sin.\alpha,$$

et

$$\bigcirc c : \bigcirc (d = \beta\delta) = 1 : \cos.\alpha,$$

adeoque ($\bigcirc x^2$ pro quovis x factum $\bigcirc x . \bigcirc x$ denotante) manifesto

$$\bigcirc a^2 + \bigcirc d^2 = \bigcirc c^2.$$

Est vero (per §. 27. et II.)

$$\bigcirc d = \bigcirc b . \frac{1}{2}(A + A^{-1}),$$

consequ.

$$\left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)^2\left(e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}}\right)^2 + \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right)^2;$$

alia æquatio pro a, b, c (cuius membrum *secundum* facile ad formam *symmetricam* seu *invariabilem* reducitur).

Denique ex

$$\frac{\cos.\alpha}{\sin.\beta} = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$$

atque

$$\frac{\cos.\beta}{\sin.\alpha} = \frac{1}{2}(B + B^{-1})$$

fit (per III.)

$$\cot.\alpha \cot.\beta = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}}\right);$$

(æquatio pro α, β, c).

Hosted by Google

§. 32.

Restat adhuc modum *problemata* in S resolvendi breviter ostendere, quo (per exempla magis obvia) peracto, demum quid theoria hæcce præstet, candide dicetur.

Fig. 17. I. Sit $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ linea in plano, et $y=f(x)$ æquatio eius (pro coordinatis perpendicularibus), et quodvis incrementum ipsius z dicatur dz, atque incrementa ipsorum x, y, et areæ u, eidem dz respondentia, respective per dx, dy, du denotentur; sitque $\mathfrak{bh} \parallel \mathfrak{cf}$, et exprimatur (ex §§. 31. et 27.) $\frac{\mathfrak{bh}}{dx}$ per y, ac quæratur ipsius $\frac{dy}{dx}$ *limes* tendente dx ad limitem 0, (quod, ubi eiusmodi limes quæritur, subintelligatur): innotescet exinde etiam limes ipsius $\frac{dy}{\mathfrak{bh}}$, adeoque tg. $\mathfrak{hbg}$; eritque, (cum $\mathfrak{hbc}$ manifesto nec $>$ nec $<$ adeoque $=R$ sit), *tangens* in $\mathfrak{b}$ ipsius $\mathfrak{bg}$ per y determinata.

II. Demonstrari potest, esse

$$\frac{dz^2}{dy^2+\mathfrak{bh}^2} \sim 1.$$

Hinc *limes* ipsius $\frac{dz}{dx}$, et inde z integratione (per x expressum) reperitur.

Et potest lineæ cuiusvis *in concreto datae* æquatio in S inveniri, ex. gr. ipsius L

Si enim $\mathfrak{am}$ axis ipsius L sit; tum quævis $\mathfrak{cb}$ ex $\mathfrak{am}$ secat L (cum per §. 19 quævis recta ex $\mathfrak{a}$ præter $\mathfrak{am}$ ipsum L secet); est vero (si $\mathfrak{bn}$ axis sit)

$$X = 1 : \sin.\, \mathfrak{cbn} \quad (\S.\ 28.),$$

atque

$$Y = \cot.\, \frac{1}{2}\, \mathfrak{cbn} \quad (\S.\ 29.),$$

unde fit

$$Y = X + \sqrt{X^2 - 1}$$

seu

$$e^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{x}{i}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{i}} - 1}$$

Hosted by Google

æquatio quæsita. Erit hinc

$$\frac{dy}{dx} \backsim X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

atqui

$$\frac{\mathfrak{bh}}{dx} = 1 : \sin.\mathfrak{cbn} = X;$$

adeoque

$$\frac{dy}{\mathfrak{bh}} \backsim (X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

$$1 + \frac{dy^2}{\mathfrak{bh}^2} \backsim X^2(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz^2}{\mathfrak{bh}^2} \backsim X^2(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz}{\mathfrak{bh}} \backsim X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

atque

$$\frac{dz}{dx} \backsim X^2(X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

unde per integrationem invenitur

$$z = i(X^2-1)^{\frac{1}{2}} = i\cot.\mathfrak{cbn}$$

(uti §. 30.).

III. Manifesto

$$\frac{du}{dx} \backsim \frac{\mathfrak{hfcbh}}{dx},$$

quod (nonnisi ab y dependens) iam primum per y exprimendum est; unde u integrando prodit.

Si $\mathfrak{ab} = p$, $\mathfrak{ac} = q$, et $\mathfrak{cd} = r$, atque $\mathfrak{cabdc} = s$ sit; poterit (uti in II.) ostendi esse Fig. 12.

$$\frac{ds}{dq} \backsim r,$$

quod

$$= \frac{1}{2}\, p\,(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}),$$

atque integrando

$$s = \frac{1}{2}\, pi\,(e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}}).$$

Hosted by Google

Potest hoc absque integratione quoque deduci.

Aequatione e. g. circuli (ex §. 31, III.), rectæ (ex §. 31, II.), sectionis coni (per præc.) expressis; poterunt areæ quoque his lineis clausæ exprimi.

Palam est, superficiem t ad figuram planam p (in distantia q) || lam esse ad p in ratione potentiarum secundarum linearum homologarum, sive uti

$$\frac{1}{4}\left(e^{\frac{q}{i}}+e^{-\frac{q}{i}}\right)^2 : 1.$$

Porro computum soliditatis pari modo tractatum, facile patet duas integrationes requirere (cum et differentiale ipsum hic nonnisi per integrationem determinetur); et ante omnia solidum a p et t ac complexu omnium rectarum ad p perpendicularium, fines ipsorum p, t connectentium, clausum quærendum esse. Reperitur solidum istud (tam per integrationem quam sine ea)

$$=\frac{1}{8}pi\left(e^{\frac{2q}{i}}-e^{-\frac{2q}{i}}\right)+\frac{1}{2}pq.$$

Superficies quoque corporum is S determinari possunt, nec non *curvaturae*, *evolutae*, *evolventesque* linearum qualiumvis &. Quod curvaturam attinet; ea in S aut ipsius L est, aut per radium circuli, aut *distantiam* curvæ ad rectam || læ ab hac recta, determinatur; cum e præcedentibus facile ostendi possit, præter L, lineas circulares, ac rectæ || las, nullas in plano alias lineas uniformes dari.

IV. Pro circulo est (uti in III.)

$$\frac{d \odot x}{dx} \backsim \bigcirc x,$$

unde (per §. 30.) integrando fit

$$\odot x = \pi i^2\left(e^{\frac{x}{i}}-2+e^{-\frac{x}{i}}\right).$$

Fig. 9. V. Pro area $\mathfrak{cabdc}=u$ (linea L formi $\mathfrak{ab}=r$, huic || la $\mathfrak{cd}=y$, ac rectis $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bd}=x$ clausa) est

Hosted by Google

$$\frac{du}{dx} \backsim y,$$

atque (§. 24.)

$$y = re^{-\frac{x}{i}};$$

adeoque (integrando)

$$u = ri(1 - e^{-\frac{x}{i}}).$$

Crescente x in infinitum, fiet in S $e^{-\frac{x}{i}} \backsim 0$, adeoque $u \backsim ri$. Per *quantitatem* ipsius mabn in posterum limes iste intelligetur.

Simili modo invenitur, quod si p sit figura in F; spatium a b et complexu axium e terminis ipsius p ductorum clausum $= \frac{1}{2} pi$ sit.

VI. Si angulus ad centrum segmenti z sphæræ sit $2u$, peripheria circuli maximi sit p, et arcus fc (anguli u) $= x$; erit (§. 25.)

$$1 : \sin. u = p : \bigcirc \mathfrak{bc},$$

et hinc

$$\bigcirc \mathfrak{bc} = p \sin. u.$$

Interim est

$$x = \frac{pu}{2\pi}, \quad \text{ac} \quad dx = \frac{pdu}{2\pi}.$$

Est porro

$$\frac{dz}{dx} \backsim \bigcirc \mathfrak{bc},$$

et hinc

$$\frac{dz}{du} \backsim \frac{p^2}{2\pi} \sin. u,$$

unde (integrando)

$$z = \frac{\sin. \text{vers.}\ u}{2\pi} p^2.$$

Cogitetur F in quod p (per meditullium f segmenti transiens) cadit; planis $\widetilde{\mathfrak{fem}}$, $\widetilde{\mathfrak{cem}}$ per af, ac ad F perpendiculariter positis, ipsumque in feg, ce secantibus; et considerentur L formis cd (ex c ad feg perpendicularis) nec non L formis cf; erit (§. 20.)

$$\mathfrak{cef} = u,$$

et (§. 21.)

$$\frac{\mathfrak{fd}}{p} = \frac{\sin. \text{vers.}\ u}{2\pi},$$

Hosted by Google

adeoque

$$z = \mathfrak{fd} \,.\, p.$$

Ast (§. 21.)

$$p = \pi \,.\, \mathfrak{fdg},$$

itaque

$$z = \pi \,.\, \mathfrak{fd} \,.\, \mathfrak{fdg}.$$

Est autem (§. 21.)

$$\mathfrak{fd} \,.\, \mathfrak{fdg} = \mathfrak{fc} \,.\, \mathfrak{fc};$$

consequ.

$$z = \pi \,.\, \mathfrak{fc} \,.\, \mathfrak{fc} = \odot\, \mathfrak{fc} \text{ in } F.$$

Fig. 14. Sit iam $\mathfrak{bj} = \mathfrak{cj} = r$; erit (§. 30.)

$$2r = i\,(Y - Y^{-1}),$$

adeoque (§. 21.)

$$\odot\, 2r \text{ (in } F) = \pi i^2\,(Y - Y^{-1})^2.$$

Est quoque (IV.)

$$\odot\, 2y = \pi i^2\,(Y^2 - 2 + Y^{-2});$$

igitur $\odot\, 2r$ (in F) $= \odot\, 2y$, adeoque *et superficies z segmenti sphaerici aequatur circulo, chorda* $\mathfrak{fc}$ *tanquam radio descripto.*

Hinc tota sphæræ superficies

$$= \odot\, \mathfrak{fg} = \mathfrak{fdg} \,.\, p = \frac{p^2}{\pi},$$

suntque superficies sphaerarum, uti secundae potentiae peripheriarum earundem maximarum.

VII. Soliditas sphæræ radii x in S reperitur simili modo

$$= \frac{1}{2}\,\pi i^3\,(X^2 - X^{-2}) - 2\pi i^2 x;$$

Fig. 12. superficies per revolutionem lineæ $\mathfrak{cd}$ circa $\mathfrak{ab}$ orta

$$= \frac{1}{2}\,\pi i p\,(Q^2 - Q^{-2}),$$

et corpus per $\mathfrak{cabdc}$ descriptum

$$= \frac{1}{4}\,\pi i^2 p\,(Q - Q^{-1})^2.$$

Hosted by Google

Quomodo vero omnia a (IV.) hucusque tractata etiam absque integratione perfici possint, brevitatis studio supprimitur.

Demonstrari potest, *omnis expressionis literam i continentis* (adeoque *hypothesi*, quod *detur i*, innixæ) *limitem*, *crescente i in infinitum*, *exprimere quantitatem plane pro* Σ (adeoque pro hypothesi *nullius i*), *siquidem non eveniant aequationes identicae.* Cave vero intelligas putari, *systema ipsum variari* posse (quod omnino *in se et per se determinatum* est) sed tantum *hypothesin*, quod *successive* fieri potest, donec non ad absurdum perducti fuerimus. *Posito* igitur, quod in *tali* expressione litera i pro casu, si S esset reipsa, *illam* quantitatem unicam designet, cuius $I = e$ sit; si vero *revera* Σ fuerit, *limes dictus* loco expressionis accipi *cogitetur*: manifesto *omnes* expressiones ex *hypothesi realitatis* ipsius S oriundæ (hoc sensu) *absolute valent*, etsi *prorsus ignotum sit*, *num* Σ *sit*, *aut non sit.*

Ita e. g. ex expressione in §. 30. obtenta facile (et quidem *tam* differentiationis auxilio, quam *absque* eo) valor notus pro Σ prodit

$$\bigcirc x = 2\pi x;$$

ex I. (§. 31.) rite tractato, sequitur

$$1 : \sin.\alpha = c : a;$$

ex II. vero

$$\frac{\cos.\alpha}{\sin.\beta} = 1, \quad \text{adeoque} \quad \alpha + \beta = R;$$

æquatio *prima* in III. fit identica, adeoque *valet* pro Σ, quamvis nihil in eo *determinet*; ex *secunda* autem fluit

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Aequationes notae fundamentales trigonometriae planae in Σ.

Porro inveniuntur (ex §. 32.) pro Σ area et corpus in III., utrumque

$$= pq;$$

ex IV.

$$\odot x = \pi x^2;$$

Hosted by Google

ex VII. sphæra radii x

$$= \frac{4}{3} \pi x^3$$

&c.

Sunt quoque theoremata ad finem (VI.) enuntiata manifesto *inconditionate vera.*

§. 33.

Superest adhuc, quid theoria ista sibi velit, (in §. 32. promissum) exponere.

I. Num Σ aut S aliquod *reipsa* sit, indecisum manet.

II. Omnia ex hypothesi *falsitatis* Ax. XI. deducta (semper *sensu* §. 32. intelligendo) *absolute* valent, adeoque *hoc sensu nulli hypothesi innituntur*. Habetur idcirco *trigonometria plana a priori*, in qua *solum* systema *verum ignotum* adeoque solummodo *absolutae* magnitudines expressionum incognitæ manent, per *unicum* vero casum notum, manifesto totum systema figeretur. Trigonometria sphærica autem in §. 26. absolute stabilitur. (Habeturque Geometria, Geometriæ planæ in Σ prorsus analoga in F).

III. Si *constaret* Σ esse, nihil hoc respectu amplius incognitum esset; si vero *constaret non esse* Σ, tunc (§. 31.) (e. g.) e lateribus x, y et angulo rectilineo ab iis intercepto, in *concreto datis* manifesto in se et per se impossibile esset triangulum absolute resolvere (i. e.) a priori determinare angulos ceteros et *rationem lateris tertii* ad duo data; nisi X, Y determinentur, ad quod *in concreto* haberi aliquod a oporteret, cuius A notum esset; atque tum i *unitas naturalis longitudinum* esset, (sicuti e est basis logarithmorum naturalium). Si existentia huius i constiterit; quomodo ad usum saltem quam exactissime construi possit, ostendetur.

IV. Sensu in I. et II. exposito patet, omnia in spatio methodo recentiorum Analytica (intra iustos fines valde laudanda) absolvi posse.

V. Denique lectoribus benevolis haud ingratum futurum est; pro casu illo, quodsi non Σ sed S reipsa esset, circulo æquale rectilineum construi.

Hosted by Google

§. 34.

Ex d *ducitur* dm ||| an *modo sequente.* Fig. 12.

Fiat ex d

$$db \perp an;$$

erigatur e puncto quovis aliquo a rectæ $\widetilde{ab}$

$$ac \perp an \text{ (in } dba),$$

et demittatur

$$de \perp ac;$$

erit (§. 27.)

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = 1 : \sin. z,$$

siquidem *fuerit* dm ||| bn.

Est vero $\sin. z$ non > 1, adeoque ab non $>$ de. Descriptus igitur quadrans radio ipsi de æquali ex a in bac, gaudebit puncto aliquo b vel o cum $\widetilde{bd}$ communi. Priore in casu manifesto $z = R$; in posteriore vero erit (§. 25.)

$$(\bigcirc ao = \bigcirc ed) : \bigcirc ab = 1 : \sin. aob,$$

adeoque

$$z = aob.$$

Si itaque fiat $z = aob$, erit dm ||| bn.

§. 35.

Si fuerit *S* reipsa; *ducetur recta ad anguli acuti crus unum perpendicularis, quae ad alterum* ||| *sit, hoc modo.* Fig. 18.

Sit am $\perp$ bc, et accipiatur ab = ac tam parvum (per §. 19.), ut si ducatur bn ||| am (§. 34.), sit abn $>$ angulo dato. Ducatur porro cp ||| am (§. 34.), fiantque nbq, pcd utrumque æquale angulo dato; et $\widetilde{bq}$, $\widetilde{cd}$ se mutuo secabunt. Secet enim $\widetilde{bq}$, (quod *per constr.* in nbc cadit) ipsam $\widetilde{cp}$ in e; erit (propter bn $\triangleq$ cp) ebc $<$ ecb, adeoque ec $<$ eb. Sint

$$ef = ec, \quad efr = ecd, \quad \text{et} \quad fs \parallel\!\!\mid ep;$$

cadet fs in bfr. Nam cum bn ||| cp, adeoque bn ||| ep, atque bn ||| fs sit;

Hosted by Google

erit (§. 14.)

$$\mathfrak{fbn} + \mathfrak{bfs} < 2R = \mathfrak{fbn} + \mathfrak{bfr};$$

itaque $\mathfrak{bfs} < \mathfrak{bfr}$. Quamobrem $\mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{r}}$ secat $\mathfrak{e}\tilde{\mathfrak{p}}$, adeoque $\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{d}}$ quoque ipsam $\mathfrak{e}\tilde{\mathfrak{q}}$ in puncto aliquo $\mathfrak{d}$.

Sit iam $\mathfrak{dg} = \mathfrak{dc}$, atque $\mathfrak{dgt} = \mathfrak{dcp} = \mathfrak{gbn}$; erit (cum $\mathfrak{cd} \triangleq \mathfrak{gd}$ sit)

$$\mathfrak{bn} \triangleq \mathfrak{gt} \triangleq \mathfrak{cp}.$$

Si fuerit lineæ L formis ipsius $\mathfrak{bn}$, punctum in $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{q}}$ cadens $\mathfrak{k}$ (§. 19.), et axis $\mathfrak{kl}$; erit

$$\mathfrak{bn} \triangleq \mathfrak{kl},$$

adeoque

$$\mathfrak{bkl} = \mathfrak{bgt} = \mathfrak{dcp};$$

sed etiam

$$\mathfrak{kl} \triangleq \mathfrak{cp}:$$

cadit ergo $\mathfrak{k}$ manifesto in $\mathfrak{g}$, estque $\mathfrak{gt} \parallel\!| \mathfrak{bn}$. Si vero $\mathfrak{ho}$ ipsum $\mathfrak{bg}$ perpendiculariter bisecet; erit $\mathfrak{ho} \parallel\!| \mathfrak{bn}$ constructum.

§. 36.

Fig. 10. Si fuerint data recta $\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{p}}$ et planum $\overline{\mathfrak{mab}}$, atque fiat $\mathfrak{cb} \perp \overline{\mathfrak{mab}}$, (in $\overline{\mathfrak{bcp}}$) $\mathfrak{bn} \perp \mathfrak{bc}$, et $\mathfrak{cq} \parallel\!| \mathfrak{bn}$ (§. 34.); *sectio ipsius* $\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{p}}$ (si hæc in $\mathfrak{bcq}$ cadat) *cum* $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{n}}$ (in $\overline{\mathfrak{cbn}}$), adeoque *cum* $\overline{\mathfrak{mab}}$ reperitur. Et si fuerint data duo plana $\overline{\mathfrak{pcq}}$, $\overline{\mathfrak{mab}}$, et sit $\mathfrak{cb} \perp \overline{\mathfrak{mab}}$, $\mathfrak{cr} \perp \overline{\mathfrak{pcq}}$, atque (in $\overline{\mathfrak{bcr}}$) $\mathfrak{bn} \perp \mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cs} \perp \mathfrak{cr}$; cadent $\mathfrak{bn}$ in $\overline{\mathfrak{mab}}$, et $\mathfrak{cs}$ in $\overline{\mathfrak{pcq}}$; et sectione ipsarum $\overline{\mathfrak{bn}}$, $\overline{\mathfrak{cs}}$ (si detur) reperta, erit perpendicularis in $\mathfrak{pcq}$ per eandem ad $\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{s}}$ ducta manifesto *sectio ipsorum* $\overline{\mathfrak{mab}}$, $\overline{\mathfrak{pcq}}$.

§. 37.

Fig. 7. *In* $\overline{\mathfrak{am}} \parallel\!| \mathfrak{bn}$ reperitur *tale* $\mathfrak{a}$, *ut sit* $\mathfrak{am} \triangleq \mathfrak{bn}$; si (per §. 34.) construatur extra $\overline{\mathfrak{nbm}}$ $\mathfrak{gt} \parallel \mathfrak{bn}$, et fiant $\mathfrak{bg} \perp \mathfrak{gt}$, $\mathfrak{gc} = \mathfrak{gb}$, atque $\mathfrak{cp} \parallel\!| \mathfrak{gt}$; ponaturque $\mathfrak{tg}\tilde{\mathfrak{d}}$ ita, ut efficiat cum $\mathfrak{tg}\tilde{\mathfrak{b}}$ angulum illi æqualem, quem $\mathfrak{pc}\tilde{\mathfrak{a}}$ cum $\mathfrak{pc}\tilde{\mathfrak{b}}$ facit; atque quæratur (per §. 36.) sectio $\overline{\mathfrak{dq}}$ ipsorum $\mathfrak{tg}\tilde{\mathfrak{d}}$, $\mathfrak{nb}\tilde{\mathfrak{a}}$; fiatque

Hosted by Google

ba ⊥ dq. Erit enimvero ob triangulorum L lineorum in F ipsius bn exortorum similitudinem (§. 21.) manifesto db = da, et am ≏ bn.

Facile hinc patet (L lineis per *solos terminos* datis) reperiri posse etiam *terminos* proportionis quartum ac medium, atque omnes constructiones geometricas, quæ in Σ in plano fiunt, hoc modo in F *absque XI. Axiomate* perfici posse. Ita e. g. $4R$ in quotvis partes æquales geometrice dividi potest, si sectionem istam in Σ perficere licet.

§. 38.

Si construatur (per §. 37.) e. g. nbq $= \frac{1}{3} R$, et fiat (per §. 35.) in S ad bq̄ perpendicularis am ||| bn, atque determinetur (per §. 37.) jm ≏ bn; erit, si ja $= x$ sit, (§. 28.)

$$X = 1 : \sin. \frac{1}{3} R = 2,$$

atque x *geometrice* constructum.

Et potest nbq ita computari, ut ja ab i quovis dato minus discrepet, cum nonnisi sin. nbq $= \frac{1}{e}$ esse debeat.

§. 39.

Si fuerint (in plano) pq et st, || rectæ mn (§. 27.), et ab, cd sint perpendiculares ad mn æquales; manifesto est

$$\triangle \text{dec} \equiv \triangle \text{bea},$$

adeoque anguli (forsan mixtilinei) ecp, eat congruent, atque

$$\text{ec} = \text{ea}.$$

Si porro cf = ag, erit

$$\triangle \text{acf} \equiv \triangle \text{cag},$$

et utrumque *quadrilateri* fagc dimidium est. Si fagc, hagk duo eiusmodi quadrilatera fuerint ad ag, inter pq et st; æqualitas eorum (uti apud EUCLIDEM), nec non triangulorum agc, agh eidem ag insistentium,

Hosted by Google

verticesque in $\overline{pq}$ habentium, æqualitas patet. Est porro

$$acf = cag, \quad gcq = cga,$$

atque

$$acf + acg + gcq = 2R$$

(§. 32.), adeoque etiam

$$cag + acg + cga = 2R;$$

itaque in quovis eiusmodi triangulo acg summa trium angulorum $= 2R$.

Sive in ag (quæ $\parallel$ mn) ceciderit autem *recta* ag, sive non; triangulorum *rectilineorum* agc, agh *tam ipsorum, quam summarum angulorum ipsorumdem, aequalitas* in aperto est.

§. 40.

Aequalia triangula abc, abd *(abhinc rectilinea) uno latere aequali gaudentia, summas angulorum aequales habent.*

Nam dividat mn bifariam tam ac quam bc, et sit pq (per c) $\parallel$ mn; cadet d in $\overline{pq}$. Nam si $\overline{bd}$ ipsum $\overline{mn}$ in puncto e, adeoque (§. 39.) ipsum $\overline{pq}$ ad distantiam $ef = eb$ secet; erit

$$\triangle abc = \triangle abf,$$

adeoque et

$$\triangle abd = \triangle abf,$$

unde d in f cadit: si vero $\overline{bd}$ ipsum $\overline{mn}$ non secuerit, sit c punctum, ubi perpendicularis rectam ab bisecans ipsum $\overline{pq}$ secat, atque $gs = ht$ ita, ut $\overline{st}$ *productam* $\overline{bd}$ in puncto aliquo k secet (quod fieri posse modo simili patet, ut §. 4.); sint porro $sl = sa$, $lo \parallel st$, atque o sectio ipsorum $\overline{bk}$ et $\overline{lo}$; esset tum (§. 39.)

$$\triangle abl = \triangle abo,$$

adeoque

$$\triangle abc > \triangle abd$$

(contra hyp.).

Hosted by Google

§. 41.

Aequalia triangula abc, def *aequalibus angulorum summis gaudent.* Fig. 21.

Nam secet mn tam ac quam bc, ita pq tam df quam fe bifariam, et sit rs || mn, atque to || pq; erit perpendicularis ag ad rs aut æqualis perpendiculari dh ad to, aut altera e. g. dh erit maior: in quovis casu ○ df e centro a cum gs punctum aliquod k commune habet, eritque (§. 39.)

$$\triangle abk = \triangle abc = \triangle def.$$

Est vero △ akb (per §. 40.) triangulo dfe, ac (per §. 39.) triangulo abc *aequiangulum*. Sunt igitur etiam triangula abc, def æquiangula.

In *S converti* quoque theorema potest. Sint enim triangula abc, def reciproce æquiangula, atque △ bal = △ def; erit (per præc.) alterum alteri, adeoque etiam △ abc triangulo abl æquiangulum, et hinc manifesto

$$bcl + blc + cbl = 2R.$$

Atqui (ex §. 31.) cuiusvis trianguli angulorum summa in S est $< 2R$: cadit igitur l in c.

§. 42.

Si fuerit complementum summae angulorum trianguli abc *ad* $2R$ Fig. 22.

$$u,$$

trianguli def *vero*

$$v;$$

est

$$\triangle abc : \triangle def = u : v.$$

Nam si quodvis triangulorum acg, gch, hcb, dfk, kfe sit $= p$, atque

$$\triangle abc = mp, \quad \triangle def = np;$$

sitque s summa angulorum cuiusvis trianguli, quod $= p$ est: erit manifesto

Hosted by Google

$$2R - u = ms - (m-1)2R = 2R - m(2R - s),$$

et

$$u = m(2R - s),$$

et pariter

$$v = n(2R - s).$$

Est igitur

$$\triangle \mathfrak{abc} : \triangle \mathfrak{def} = m : n = u : v.$$

Ad casum incommensurabilitatis triangulorum $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{def}$ quoque extendi facile patet.

Eodem modo demonstratur triangula in superficie sphærica esse uti *excessus* summarum angulorum eorundem supra $2R$. Si duo anguli trianguli sphærici recti fuerint, tertius z erit excessus dictus; est autem triangulum istud (peripheria maxima p dicta) manifesto

$$= \frac{z}{2\pi} \frac{p^2}{2\pi} \quad (\S.\ 32.\ \text{VI.});$$

consequenter quodvis triangulum, cuius angulorum excessus $= z$, est

$$= \frac{zp^2}{4\pi^2}.$$

§. 43.

Iam *area* trianguli rectilinei in S per summam angulorum exprimetur.

Si $\mathfrak{ab}$ crescat in infinitum; erit (§. 42.)

$$\triangle \mathfrak{abc} : (R - u - v)$$

constans. Est vero

$$\triangle \mathfrak{abc} \backsim \mathfrak{bacn} \quad (\S.\ 32.\ \text{V.})$$

et

$$R - u - v \backsim z \quad (\S.\ 1.);$$

adeoque

$$\mathfrak{bacn} : z = \triangle \mathfrak{abc} : (R - u - v) = \mathfrak{bac'n'} : z'.$$

Est porro manifesto

$$\mathfrak{bdcn} : \mathfrak{bd'c'n'} = r : r' = \text{tang.}\, z : \text{tang.}\, z' \quad (\S.\ 30.).$$

Hosted by Google

Pro $y' \backsim 0$ autem est

$$\frac{\mathfrak{bd}'\mathfrak{c}'\mathfrak{n}'}{\mathfrak{bac}'\mathfrak{n}'} \backsim 1,$$

nec non

$$\frac{\text{tang.}\, z'}{z'} \backsim 1;$$

consequ.

$$\mathfrak{bdcn} : \mathfrak{bacn} = \text{tang.}\, z : z.$$

Erat vero (§. 32.)

$$\mathfrak{bdcn} = ri = i^2 \text{tang.}\, z;$$

est igitur

$$\mathfrak{bacn} = zi^2.$$

Quovis triangulo, cuius angulorum summæ complementum ad $2R$ z est, in posterum breviter $\triangle$ dicto, erit idcirco

$$\triangle = zi^2.$$

Facile hinc liquet, quod si Fi

$$\mathfrak{or} \parallel \mathfrak{am} \quad \text{et} \quad \mathfrak{ro} \parallel \mathfrak{ab}$$

fuerint; *area* inter $\widetilde{\mathfrak{or}}$, $\widetilde{\mathfrak{st}}$, $\widetilde{\mathfrak{bc}}$ comprehensa (quæ manifesto limes absolutus est areæ triangulorum rectilineorum sine fine crescentium, seu ipsius $\triangle$ pro $z \backsim 2R$), sit

$$= \pi i^2 = \odot i \text{ in } F.$$

Limite isto per $\square$ denotato, erit porro (per §. 30.) Fi

$$\pi r^2 = \text{tang.}\, z^2 \square = \odot r \text{ in } F \text{ (§. 21.)}$$
$$= \odot s \text{ (per §. 32. VI.)},$$

si chorda $\mathfrak{dc}$ s dicatur. Si iam radio dato s, circuli in plano (sive radio L formi circuli in F) perpendiculariter bisecto, construatur (per §. 34.) $\mathfrak{db} \parallel \triangleq \mathfrak{cn}$; demissa perpendiculari $\mathfrak{ca}$ ad $\mathfrak{db}$, et erecta perpendiculari $\mathfrak{cm}$ ad $\mathfrak{ca}$; habebitur z; unde (per §. 37.) tang. z^2, radio L formi ad lubitum pro unitate assumto, *geometrice determinari potest per duas lineas uniformes eiusdem curvaturae* (quæ solis terminis datis, constructis axibus, manifesto tanquam rectæ commensurari, atque hoc respectu rectis æquivalentes spectari possunt).

Hosted by Google

Fig. 23. Porro construitur quadrilaterum ex. gr. regulare $=\square$, ut sequitur. Sit

$$\mathfrak{abc}=R,\ \mathfrak{bac}=\frac{1}{2}R,\ \mathfrak{acb}=\frac{1}{4}R,\ \text{et}\ \mathfrak{bc}=x;$$

poterit X (ex §. 31. II.) per meras radices quadraticas exprimi, et (per §. 37.) construi: habitoque X, (per §. 38., sive etiam 29. et 35.) x ipsum determinari potest. Estque octuplum $\triangle\,\mathfrak{abc}$ manifesto $=\square$, atque *per hoc, circulus planus radii s, per figuram rectilineam, et lineas uniformes eiusdem generis (rectis, quoad comparationem inter se, aequivalentes) geometrice quadratus*; *circulus F formis vero eodem modo complanatus*: *habeturque aut Axioma XI. Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica*; etsi hucusque indecisum manserit, quodnam ex his duobus revera locum habeat. Quoties tang. z^2 *vel* numerus integer *vel* fractio rationalis fuerit, cuius (ad simplicissimam formam reductæ) denominator *aut* numerus primus formæ 2^m+1 (cuius est etiam $2=2^0+1$) *aut* productum fuerit e quotcunque primis huius formæ, quorum (ipsum 2, qui solus quotvis vicibus occurrere potest, excipiendo) quivis *semel* ut factor occurrit: per theoriam polygonorum ill. *GAUSS* (præclarum nostri imo omnis ævi inventum), etiam ipsi tang. $z^2\square=\odot s$ (et nonnisi pro talibus valoribus ipsius z) figuram rectilineam æqualem constituere licet. Nam *divisio* ipsius $\square$ (theoremate §. 42. facile ad quælibet polygona extenso) manifesto *sectionem* ipsius $2R$ requirit, quam (ut ostendi potest) unice sub dicta conditione geometrice perficere licet. In omnibus autem talibus casibus præcedentia facile ad scopum perducent. Et potest quævis figura rectilinea in polygonum regulare n laterum geometrice converti, siquidem n sub formam *GAUSSianam* cadat.

Superesset denique, (ut res omni numero absolvatur), impossibilitatem (absque suppositione aliqua) decidendi, num Σ aut aliquod (et quodnam) S sit, demonstrare: quod tamen occasioni magis idoneæ reservatur.

Hosted by Google

WOLFGANGI BOLYAI
ADDITAMENTUM AD APPENDICEM.

Denique *aliquid Auctori Appendicis proprium*, *coronidis instar*, addere fas sit: qui tamen ignoscat, si quid non acu eius tetigerim.

Res breviter in eo consistit: *formulae trigonometriae sphaericae*, in Appendice dicta ab axiomate XI. Eucl. independenter demonstratæ, *cum formulis trigonometriae planae conveniunt, si* (modo statim dicendo) *latera trianguli sphaerici realia*, *rectilinei vero imaginaria accipiantur*; adeo ut quoad formulas trigonometricas planum ut sphæra imaginaria considerari possit, si pro reali illa accipiatur, in qua sin. $R=1$.

Pro casu, si axioma Eucl. verum non fuerit, demonstratur (Appendix §. 30.) dari certum i, pro quo ibidem dictum I est $=e$ (basi logarithmorum naturalium), atque pro hoc casu formulæ trigonometriæ planæ quoque demonstrantur (ibidem §. 31.); et quidem ita, ut (iuxta §. 32., post VII., ibidem) formulæ et pro casu veritatis axiomatis dicti valeant; nempe si supponendo, quod $i \backsim \infty$, limites valorum accipiantur; nimirum systema Euclideum est quasi limes systematis antieuclidei (pro $i \backsim \infty$). Ponatur, pro casu existentis i, unitas $=i$, atque conceptus *sinus cosinusque* extendatur et ad arcus imaginarios; ita ut arcum sive realem sive imaginarium denotet p, dicatur

$$\frac{1}{2}\left(e^{p\sqrt{-1}}+e^{-p\sqrt{-1}}\right)$$

cosinus ipsius p, et

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{p\sqrt{-1}}-e^{-p\sqrt{-1}}\right)$$

dicatur sinus ipsius p.

Hosted by Google

Erit hinc pro q reali

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^q - e^{-q}) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{-q\sqrt{-1}\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}\sqrt{-1}}) =$$

$$= \sin.(-q\sqrt{-1}) = -\sin. q\sqrt{-1}$$

Ita

$$\frac{1}{2}(e^q + e^{-q}) = \frac{1}{2}(e^{-q\sqrt{-1}\sqrt{-1}} + e^{q\sqrt{-1}\sqrt{-1}}) =$$

$$= \cos.(-q\sqrt{-1}) = \cos. q\sqrt{-1};$$

si nempe et in circulo imaginario sinus negativi arcus sinui arcus positivi alioquin priori æqualis sit, præterquam quod negativus sit, atque cosinus arcus positivi et negativi (si alioquin æquales fuerint), sit idem.

In Appendice dicta §. 25. demonstratur absolute, id est ab axiomate dicto independenter; quod in quovis triangulo rectilineo *sinus angulorum sint, uti peripheriae radiorum lateribus oppositis aequalium;* demonstraturque porro, pro casu existentis i, peripheriam radii y esse

$$= \pi i(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}),$$

quod pro $i = 1$ fit

$$\pi(e^y - e^{-y}).$$

Itaque (§. 31. ibidem) pro triangulo rectilineo rectangulo, cuius catheti sunt a et b, hypotenusa c, et anguli lateribus a, b, c oppositi sunt α, β, π; est (pro $(i = 1)$

in I.

$$1 : \sin. \alpha = \pi(e^c - e^{-c}) : \pi(e^a - e^{-a});$$

adeoque

$$1 : \sin. \alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^c - e^{-c}) : \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^a - e^{-a}).$$

Unde

$$1 : \sin. \alpha = -\sin. c\sqrt{-1} : -\sin. a\sqrt{-1}.$$

Et hinc

$$1 : \sin. \alpha = \sin. c\sqrt{-1} : \sin. a\sqrt{-1}.$$

Hosted by Google

In II. fit

$$\cos.\alpha : \sin.\beta = \cos.a\sqrt{-1} : 1.$$

In III. fit

$$\cos.c\sqrt{-1} = \cos.a\sqrt{-1}\cos.b\sqrt{-1}.$$

Quæ prouti omnes exinde promanantes formulæ trigonometriæ planæ, cum formulis trigonometriæ sphæricæ prorsus conveniunt; nisi quod si ex. gr. trianguli sphærici rectanguli quoque catheti angulique iis oppositi, hypotenusaque nomina eadem sortiantur, latera trianguli rectilinei per $\sqrt{-1}$ dividenda sint, ut formulæ pro sphæricis prodeant.

Nempe ex I. fiet

$$1 : \sin.\alpha = \sin.c : \sin.a,$$

ex II. fiet

$$1 : \cos.a = \sin.\beta : \cos.\alpha,$$

ex III. fiet

$$\cos.c = \cos.a\cos.b.$$

Quum ceteris supersedere liceat, et lectorem deduction (App. §. 32. post VII.) omissa offendi impedirique expertus sim: haud abs re erit ostendere, quomodo ex. gr. ex

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)\left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right)$$

sequatur

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(theorema Pythagoreum pro systemate Euclideo); verosimiliter Auctor quoque ita deduxit, et ceteræ quoque eodem modo sequuntur.

Est nempe potentiis ipsius e per series expressis

$$e^{\frac{k}{i}} = 1 + \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} + \frac{k^3}{2.3i^3} + \frac{k^4}{2.3.4i^4} + \cdots$$

$$e^{-\frac{k}{i}} = 1 - \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} - \frac{k^3}{2.3i^3} + \frac{k^4}{2.3.4i^4} - \cdots;$$

adeoque

$$e^{\frac{k}{i}} + e^{-\frac{k}{i}} = 2 + \frac{k^2}{i^2} + \frac{k^4}{3.4i^4} + \cdots$$

$$= 2 + \frac{k^2 + u}{i^2},$$

Hosted by Google

(si omnium terminorum post $\frac{k^2}{i^2}$ summa $\frac{u}{i^2}$ dicatur); estque $u \backsim 0$, dum $i \backsim \infty$. Nam multiplicentur omnes termini post $\frac{k^2}{i^2}$ per i^2; erit terminus primus $\frac{k^4}{3 \cdot 4 i^2}$, et quivis exponens $< \frac{k^2}{i^2}$; essetque etsi exponens ubique hic maneret, summa

$$\frac{k^4}{3 \cdot 4 i^2} : \left(1 - \frac{k^2}{i^2}\right) = \frac{k^4}{3 \cdot 4 (i^2 - k^2)},$$

quod manifesto $\backsim 0$, dum $i \backsim \infty$.

Atque ex

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a+b}{i}} + e^{-\frac{a+b}{i}} + e^{\frac{a-b}{i}} + e^{-\frac{a-b}{i}}\right)$$

sequitur (pro ω, v, λ adinstar u acceptis)

$$2 + \frac{c^2 + \omega}{i^2} = 1 + \frac{(a+b)^2 + v}{2i^2} + 1 + \frac{(a-b)^2 + \lambda}{2i^2}.$$

Atque hinc

$$c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 + v + \lambda - 2\omega),$$

quod

$$\backsim a^2 + b^2.$$

Scholion. Sphæræ illius, in qua sinus totus est $1 = i$, radius est ordinata y lineæ L formis ipsi $i = 1$ æqualis, ad axem per unam extremitatem ex altera perpendiculariter missa. Nempe *in superficie* (App. §. 21.) *F dicta, tota Geometria Euclidea valet, lineis L vicem rectarum subeuntibus*: atque pro radio L formi $= 1$, qui sinus totus in F erit, peripheriæ eiusdem radius in plano erit plane dictum y; quod ad sphæram imaginariam, ad quam planum (in systemate antieuclideo) revocatur, facile applicatur.

Hosted by Google

EGY KIS TOLDALÉK

ÉS

JELENTÉS.

Hosted by Google

Hosted by Google

EGY KIS TOLDALÉK A' DÉÁK ELSŐ KÖTETHEZ.

(ADDITAMENTA QUAEDAM AD TOMUM I. LATINUM.) *

A' kik ezen két darabból álló Déák munkára előre fizettek, 2. Rhf. 30 xrt. ezüstben; neveik itt következnek: a' tsak felirtak közűl is azok, nem különben mások is, a' kik netalám ezután fizetni fognak, a' második darabba fognak ki nyomtattatni.

*

T.	T. Antal János Professor és Gen. Notarius	1	példány
T.	Artz Károly Professor Szebenben	1	«
M.	Angustinovits Pál Gub. Cons.	1	«
	Áts Sándor N. Enyedi Tog.	1	«
M.	Balási Jó'sef K. Tábla Biró	1	«
T.	Barabás Miklós Képiró	1	«
M.	Barcsai János Gub. Cons.	1	«
	Bárdi István Theol. Candidat.	1	«
	Bartha Dániel N. Enyedi Tog.	1	«
T.	Benedek István Nevelő	1	«
T.	Benkő Ferencz Ügyvéd	1	«
G.	Bethlen Ádám	16	«
G.	Bethlen Ferentz	3	«
	Birthler Friedrik	1	«
G.	Bethlen Gergely	2	«
G.	Bethlen László R. T. Cancell.	1	«
G.	Bethlen János	1	«
G.	Bethlen János R. T. Cancell.	1	«
T.	Bod Péter Jurium Insp.	1	«
	Borsos Márton Med. Candidat.	1	«
	Borsos Márton N. Enyedi Tog.	1	«
T.	Brassai Sámuel Nevelő	1	«
	Bugyul Elek N. Enyedi Tog.	1	«
G.	Degenfeld Pál	1	«
	Dobai Pál N. Enyedi Tog	1	«

* De hac re vide pagg. 436—437.

Hosted by Google

M. Filep Jó'sef Vice Director	1	példány
Fülöp Elek N. Enyedi Tog.	1	«
M. Gál László Ország Directora	1	«
T. Gyergyai Ferentz	1	«
T. Gazda János Inspector	1	«
M. Katona Miklós	1	«
B. Kemény Domokos Fő Biró	1	«
B. Kemény Pál Kollégyom Curátora	3	«
G. Kemény Sámuel	1	«
G. Kornis Mihály Thes. Cons.	1	«
Mihályi Károly N. Enyedi Tog.	1	«
T. Moos István Ügyvéd	1	«
T. Nagy János Ügyvéd	1	«
M. Pávai Elek K. Tábla Biró	1	«
T. Pávai Jó'sef Inspector	1	«
T. Pető Jó'sef R. T. Cancell.	1	«
T. T. Pétzeli Jó'sef Professor Debretzenben	1	«
Posoni Gergely N. Enyedi Tog.	1	«
T. Raff Mihály Ügyvéd	1	«
G. Rhédei Ádám Fő Ispány és Koll. Fő Curátora	1	«
T. Salánki Lajos Prédikátor	1	«
T. Siko István K. Tábla Archivariussa	1	«
T. Szász Károly Professor N. Enyeden	1	«
N. M. Székely Mihály K. Tábla Præsesse	2	«
Szentpáli 'Sigmond N. Enyedi Tog.	1	«
T. Szabó György R. T. Cancell.	1	«
T. Szilágyi Jó'sef Ügyvéd	3	«
T. Szonnyi Pál Debretzenben	1	«
T. Szöts Mihály	1	«
T. Szöllösi Pál Gub. Cancell.	1	«
G. Teleki Domokos	26	«
G. Teleki Imre	1	«
T. Tétsi Ferentz Nevelő	1	«
G. Toldalagi Ferentz	1	«
G. Toldalagi 'Sigmond Koll. Fő Curatora	2	«
Toth Ferentz N. Enyedi Tog.	1	«
T. Török Pál Debretzenben	1	«
M. Zeyk Dániel Gub. Cons. és Koll. Fő Curátora	10	«
M. Zeyk János	1	«
M. Zeyk Jó'sef	1	«
M. Zeyk Miklos	1	«

Hosted by Google

T. Zoványi Sámuel R. Tab. Cancell. ... 1 példány
T. Jakab György ... 1 «
T. Vállyi Károly Posta Mester ... 1 «
T. Vajda Dániel Nevelő ... 1 «

*

Ezeken kivűl fő inditója és segitője ezen munka kiadásának elfelejthetlen kedves barátta lett tanítványom *Med. D. Bögözi Jakab Lajos* vólt; ki is jobb kezemet kérve előre, hogy kérését telyesítem, öt száz Váltó Rhftot adott által, azt mondván, hogy a' *Hazának adja*. Mekkora kár az ő elvesztése, azok tudják, a' kik őt' esmerték: az emberiségért buzgó szíve, elméjének tsendes tiszta világa, könnyű felfogása, 's alapos mély nézése, 's minden fitogatástól 's füsttől idegen egyszerű szép lelke, igazmondó egyenességgel, 's szava' pontosságával — megannyi vonásai az igaz tálentomnak; mellyel minden itt tanittatott tudományokban, 's azok között különösen a' *Mathesisiekben* kitündökölvén, a' mind ezekkel külföldön 6 év alatt szerzett kints, a' hazai partoknál süllyedett el — miképpen az ellenség a' vezérre tör, a' halál is azokat számítván, kiket ő egy hosszu élet alatt tartott vólna meg, egynek személyében mind ezeket is ejtette el.

Nem hallgathatom még el több kedves hív Tanítványim közűl Ilentzfalvi *Szász Pált*; ki midőn az oskolai pálya' végéről a' földi élet' viszontagságokkal telyes útjára lépett vólna, annak sárján 's napfényét szünetlen szaggató borulatjain fölűl emeltetett, az örökkévalóság további pályája folytatására. — Egy ártatlan romlatlan ifjuban, egy emberséges ember, és maga helyén egy pontos természetvizsgáló, 's tsillagász veszett el. Az új mathesisi jegyekből, a' mi jó, neki köszönöm: ő kapta ki a' nyomtató mühelyben fél század óta hevert betű-öntő-szer használását, 's jóllehet soha se mettzett az előtt, ő mettzette a' jól kijött jegyeket, 's öntötte, 's mutatta ki öntéseket. — Ez is többet tsinált, mint szollott, 's kevesebbet mutatott mint vólt; holott minden kitsi messzire szokott kiáltani.

Egyátaljában (kevés különös kivétellel) azon köz panasz ellen vagyok; hogy *Shakespeare*ként a' tanitványok hasonlók a' tsemetékhez, melyek zöld leveleikkel kizárják az őket eléhozott napot; — sőt vissza mosolyognak. — A' kit meghüt az, valamint egyáltaljában a' ki háládatosságra számit; nem méltó reá, szintúgy mint a' háládatlan a' nemes lelkek sorába.

Tulajdonképpen nem is olly' rosszak az emberek, mint a' köz panasz kiáltja: egy nap se lehet kimenni az útszára is, hogy sokat ne lásson az ember, a' kinek ne köszönhessen valamit; legalább azt, hogy vagy éppen nem, vagy erősebben nem bántotta meg — vagy idejét nem vette el, legalább többet nem vett el abból, a' minek betse nálunk oly' tsekély, hogy tsak a' napszámosnál van árra, 's különben nem tsak egymástól büntelen ragadozzuk el, sőt ezen pillantatnyi örökségnek számtalan fattyú osztozót keresünk, az igazi örökösök' kárára.

Hosted by Google

KÖTELESSÉGEM MÉG A' TISZTELT KÖZÖNSÉGNEK, JELENTENI:

1-ben. Elpirulok ezen munkátskának oly késő kijőtén, hogy könnyen eszibe juthat valakinek, *Mons parturiebat* . . . de nálunk minden efféle, ha kitsi is, nehéz; — sok ideig kelle várnom, míg tsak ennyi előfizetés is gyűlt, úgy hogy a' lemondásról kezdek vala gondolkodni; a' midőn végre ott láttam magamat, a' honnan már vissza nem, 's elé is tsak romlás' veszedelmével léphettem — azután is pedig sok fátumok 's betegség mellett, hol egy hol más hibázott; a' jegyekkel, figurákkal 's több effélékkel is sok késleltető baj vólt, 's egyetlen sajtó, kevés tsak most szaporodott betükkel, sok egyéb munkákkal vólt elfoglalva — 's még most is a' mintegy fél esztendőtől fogva kijött első darab, a' figurákra vár.

2-szor. A' 2-dik darabot magyarul akartam kiadni; egyfelől azért, mivel az első darab (az *Arithmetika' Elejiben* vallott káromma l együtt) szinte minden költséget el nyelvén, nem láttam más módját a' 2-diknak, hanem hogy megrövidítve oltsobb papirosra tsak 300-at nyomtattassak (nem 500-at mint az elsőből), mathesisből ennyi is felesleg lévén nálunk; — másfelől igy Hazámnak egy közhasznú könyvet adni reménylettem, melyhez az első darabot is ugyan magyarúl hozzá alkalmaztam vólna: de az előfizetők közűl többen, a' kiknek tanátsokat meg nem vethettem, azt kivánták, hogy ha az első déák, a' második is úgy légyen.

3-szor. A' tiszta Mathesisi műszókra nézve is, mellyeknek egy részével az *Arithmetika' Elejiben M. Vásárhelyt* 1830 éltem, 's a' többit az említett 2-dik darabban mutattam vólna ki; következőket jelenteni hazafiui kötelességem.

I. Azoknak formálásában ezen három fő régulám vólt:

a) hogy a' mennyiben lehet rövidek, a' nyelv' természetéből folyók, legalább azzal nem ellenkezők, könnyen megszokhatók, 's tudványba való igaz bélátással a' dolog természetére mutatók legyenek.

b) hogy azonegy szó ne tegyen külömbözőket; 's hogy egyebet jelentsen, egy kis helyes változtatás engedtessék meg.

c) hogy a' mellyeket okvetlen szükséges megkülömböztetni, azoknak külön (ha lehet más atyafiasból formált) név adattassék.

A' mi az elsőt illeti: világos, hogy a' kezdő annál nehezebben érti a' dolgot meg, minél külömbözőbb a' szónak tulajdon értelme a' tudványitól, 's annál könnyebben érti meg, minél inkább magára a' dologra mutat. A' kurtitás pedig túl mehet a' határon, de azon belől könnyit; hogy lenne képes egy felsőbb mathesisi dolog' eléadása azon nemzetnél, mely a' 3-at *Polertarirorunkurák*nak nevezte? 's az Analysisi rövid 's okos jegyek melly igen megkönnnyítik a' különben áthatlan dolgokat — melly rövid 's mathesisi lehet a' felső lények nyelve!

Azért tsak móddal legyen, sok a' szokatlanság miatt elébb visszataszító, azután megértve szokottá lesz — mennyi példa nints erre az újabb időkben: melly szokatlan

Hosted by Google

vala elébb *át*, *gyönyör* . ., *kellemes* kellemetes hellyett, *közvetlen* közvetetlen hellyett 's a' t. Igy jövény, nyugalom, türelem, győzelem, veszelem etc.: az efféle ujitás könnyü lévén, mihelyt szabad, omlik mindenfelől — kár, hogy *Erbschaft* nem bár örökmény, 's *örökség Ewigkeit* helyett oly hosszú szóval élünk, mintha azzal akarnok kifejezni. —

A' 2-dikra nézve, bajt tsinálván a' *szeg* Nagel, melly szint is teszen, mivel szeglet, zugoly (Winkel) igen hosszak az összetételben: maradna *Dugonits* szerint Winkel *szögnek*, 's mikor *szeg* szint teszen, hagyatnék el az *s*; vagy *szög* tenné a' szint, 's *zeg* vagy *zög* lenne Winkel; még *mons* és apex is lehetne *hegy* és *högy*.

A' 2-dikra 's 3-dikra nézve, legyen szabad példáúl hozni elé: *Id* Zeit, *idő* Wetter, *Vil* (az honnan villám) Licht, *Világ* Welt; *han* (mintegy ha! n!) Schall, *hang* tonus vagy megfordítva; Nap Sonne, viradtól estig *Napp* (lehetne *Vily*); dies soláris *napi kétdélköz* (röviden az illy dies *délköz*). Densitas *töm*, *tömeg* (Fogarasi szerint) massa.

Az 1-sőre 's 2-dikra nézve, legyen szabad a' hol *egyenlőt* mondani hosszas vólna, *eggyel* jelenteni ki, 2 *gy*vel, hogy *egy*től unum megkülömböztessék (p. o.) *eggyoldalú háromszög* nem 1 oldalú, hanem *egyenlő oldalú háromszöget* tegyen.

II. A' *Dugonits* 's *Pete* műszavain kívűl másokat nem láttam; 's egyátaljában még a' kezdeten vagyunk: — de ha egyfelől elpirulunk, midőn a' Mathesisben más nemzeteknek tanitói éppen nem, tanítvánnyi is (annyira a' mennyire is) kevesen vagyunk; másfelől hogy valaha tanitói is lehessünk, *éljünk legalább most mig ideje vagyon*, *éppen ezen elmaradásunkból származott* óllyan *jussunkal*, a mellyet más nemzetek már elvesztettek; a' midőn már régen a' Mathesis' böltsői nyelvét fordítván le, sok ollyan szók gyökereztek a' századokba, mellyek a' tanuló' elméjét a' tudványi értelemtől félre vonják. Befolyása van ennek a' nemzeti kimivelődésre. —

III. Engedtessék azért meg, Hazánk 's Nemzetünk nevében! az a' kérés: hogy a' mathesisi műszók adásában, egyik fő tzél légyen, hogy azok a' mennyire lehet tudványi bélátással, a' kifejezendő dolgokra mutassanak.

Bátorkodom a' föbbekre nézve következő probát ide tenni; minden jobbnak elfogadására való készséggel.

Az említett *Arithmetika (Id-mennyiség tudvány) Elejiben*, a' többek közt következő nevek adattak, az holott is a' kivánt okok is (valamint ezen első déák darabban is) megtaláltatnak.

Spatium *Ür*, az honnan üres, az az a' miben (oda értve *csak*) ür van. Tempus *id*, tempestas *idő*, quidditas *miség*, quantitas (*midség* mintegy azon kérdésre eredve *mi id*?), ugyantsak maradhat *mennyiség*, qualitas *millység*; pars *rész*, portio *darab*, continuum *szakadatlan*, *tekinteti* (darabi) *egyenlőség*, *tekinteti mennyiség*; *positiv*, *negativ* (mathesisi értelemben) ⊢⊣ (*kereszt*), ⊢⊣ (*vonás*) *mennyiség*; azaz a' midség bizonyos millységgel (melly ⊢⊣, ⊢⊣ jeggyel jelentetik ki, hogy az eszet egyébre ne vigye), szüli ezt, (pag. 22)*; vagy amaz, bizonyos ⊢⊣ *határozatu*, ez *ellenes határozatu*; — *a*, *vontja a*-nak, vagy *ellenesse* (oppositum).

* Ed. II. Tom. I. pag. 28.

Hosted by Google

Summa meghagyatik; ugyantsak lehetne *öszvet* is.

Addere *summázni*; subtrahere *pótlékazni (pótlotársazni)*; subtrahendus *pótlandó*, minuendus *tett summa*, differentia *pótlék* (vagy *pótlótárs*), differentia ipsius P ab S, *P-nek pótléka S-re*, $a - b + c$, a 's *vontja* b-nek *meg* c.

Series *sor*, (arithm. *eggypótléki*, geom. *eggyméreti*); mensurare B quoad A, *mérni* B-t A-val, mensura *mérték*, B *mértje a' mértéknek*, fractio *méret*, Unitas *főmérték*, numerus integer *egész szám*, fractio vera *tört egy*, proportio geom. *eggyméret*; A ita est ad B, uti a ad b, A *annyidja* B-nek mint a b-nek. Multiplicare a per B, *eggymértezni* a-t B-vel (röviden *mértezni*), az-az olyan mértet adni a nak, a' *millyen mért* B (azaz *a' millyen mértje* B a' főmértéknek), multiplicator B *főmért* (vagy *mértező*), a multiplicandus *tett mérték* (vagy *mértezendő*), factum *eggymért*, factores *mérők*.

Ugyantsak ha *szerzeni* helyett egyszer se mondattatnék *szerezni*, még ezzel is inkább lehetne a' rosszul nevezett *sokszorozás* helyett élni; factum *szerezet* lenne 's a' t.

Dividere b per a, b-re *párazni* (vagy mérőtársazni, röviden *mértársazni*) a-t: dividendus *tett eggymért*, divisor *főmérő* (vagy *párazandó*), quotus *mérőtárs* (röviden *mértárs*); b divisum per a, b-re *párja* a-nak. Kár hogy $2 . 3 = 24 : 4$ helyett nem más jegyeket vettek, (p. o.) $2 \cdot 3 = 24 \diagdown 4$, (az irásbeli 1 's 2 pontra nézve).

Elevare a ad potentiam exponentis q, *eggymérőzni* a-t q *ranggal* (röviden q-val); 's ha B ezen potentia, B az a-nak q *rangu eggymérőzetje*, 's B-nek a, q *rangu alapmérője*, radix exponentis q ipsius B; *alapmérőzni* B-t q ranggal (röviden q-val), radicem exponentis q extrahere ex B.

Logarithmus *rangjel*, basis communis *közalapmérő*, vagy *köztalp*.

Vagy következő nevek is lehetnek: a-t q-val *rangozni*, a-nak q *rangja* B, B-nek a, q *alrangja*, B-t *lerangozni* q-val.

Vagy: a-t q-ra *emelni*, B a-nak q rangu *emeletje*, a B-nek q *rangu emeltje*, B-t q *ranggal* (röviden q-val) *emeltezni*. Radix quadrata *félrang* 's a' t.

Quantitas imaginaria *vonás eggyi midség*, (Tom. I. pag. 105.)*

Proportionalis geom. media, *eggyméreti közép*. Terminus *iz*, polynomium *több-izet*, binomium *két-izet*, terminus seriei *sor-iz*, terminus generalis *iz-kép*, coefficiens *iz-főmért*.

Functio *köz kép*, series incrementorum *növet-sor*, differentiale *növet-sor-iz kép* (röviden *növet-izkép*), coefficiens differentialis *növet-iz főmért*, integrale *summázat*. Calculus variationum *közképes közkép vi'sgálat*.

Aequatio *egyenlet*; limes *véghatár*, comma *vonat*; incommensurabile *összemérhetlen*; decimales notæ *tizedes helyek*; expressio *kifejezet*.

Analysis combinatoria, *szedet* 's *rakat vi'sgálat*, permutatio *elrendelet* (röviden *rendelet*), variatio *ismétlet*; ambo, terno etc. *kettős szedet*, *hármas szedet* . . . vagy *kettőzet*, *hármazat* . . .; *kétszeretje*, *háromszoratja* . . . valaminek, dupluma, tripluma . . .

Superficies *terj*, *lep* (az honnan lepedő, lepel), néha kület, corpus geometricum *Ür-test*; *féret*, area ha superficiesről van szó, soliditas ha corpusról van szó (ez lehet

* Ed. II. Tom. I. pag. 121.

Hosted by Google

tely is). Planum *lap*, (horizontale *tér*, vagy *vizirányu* lap). Verticale *függős* vagy *függény*; *linea*, *forma* meghagyatnak; figura *kerités*, sectio *vágat*, recta *egyen*, arcus *ív*, chorda *húr*, radius *sugár*, centrum *középpont*, sphæra *gömb*, Cylinder *henger*, Cubus *köb*, angulus *szög*, triangulum *háromszög*, polygonum *többszög* (regulare *rendes*); circulus *kör*. A' *gömben* kezdve eddig *Dugonits*-ból vétettek. Angulus rectus *negyed szög* (t. i. a' szög tekinteti mennyiség, a' szárai közt lévő ívben), így 60 grad *hatod szög*, 45 *nyoltzad szög* (mind az egész karimára értve) . . . Apex anguli *szöghegy*, anguli verticales *tövi szögek*; anguli alterni *átellenni szögek*, vagy *z* forma szögek; szögnek (vagy conusnak) verticalissa, az ő *tövi társa*. Perpendicularis *rá álló* (vagy röviden *álló*). Diagonalis *átló*, diameter *kettelő* (vagy *kettéző*).

Parallelum *eggyközű* (Dugonits), (tágasabb értelemben *eggyközűi*); parallelogrammum *lap-eggyközény*, prisma *ür-eggyközény*; Rhomboides, Rhombus *dült eggyközény*; (röviden *dűlény*); Rhombus *eggyoldalu dülény*, rhomboides *nemeggyoldalu dülény*, vagy röviden amaz *dülény*, ez *eggyoldalány* (oda értve, hogy *csak* az oldalai egyenlők), quadratum *rendes négy szög* (röviden *négyeg*). Rectangulum oblongum *hosszukó állány* (röviden *állány*); rectilinea figura *egyeni kerités*: figura plana *lapi kerités*, figura sphærica *gömbi kerités*.

Focus *tüz pont*, tangens *érintő*, asymptota *szinte érő*. Abscissæ *fő útak*, ordinatæ *al-útak* (nem ál útak; Lásd az *Arbort* ezen darabban). Az alútak lehetnek 1-ső 's 2-dik *rendűek* . . . Cathetusok *befogók*, hypotenusa *átfogó*. Sinus *végtáv* (az ív' vége távja a' *fő kettézőtől* p. 456)*; cosinus *középpont táv* (röviden *központ táv*); sinus versus *kezdet táv* (az ív kezdete távját értve, 's mind a' két utóbbit a' *sinustól* értve), secans *vágó*, complementum *pótlék-ív*, cosinus *pótlék végtáv* (röviden *pótvégtáv*) 's a' többi. Pyramis *tetény*, conus *tsúp* (az honnan tsupa), vagy *körtetény*; így *három-szög tetény*, *három-szög üreggyközény*; Parallelepipedum *ürlap-eggyközény*, ha rectangulare *ür-állány*, (vagy Dugonittsal *téglány*) Pyramis truncata *elszelt tetény*, (vagy *szelt tetény*), így *szelt tsúp*. Conicæ sectiones *tsúp vágatok*: parabola *eggytávú* (mindenik pontját azon egy ponttól, a' *tűzponttól*, *'s azonegy egyentől* értve); ellypsis *kissebb távu*, hyperbola *nagyobb távu*, (a' ponttól mint az egyentől értve). Vagy az első, *közepetlen tsúp vágat*, a' második *vissza térö*, a' harmadik, középpontos *vissza nem térő*. Vagy az első, *2 karu*, a' 2-dik *vissza térő*, a' 3-dik 4 *karú*, (a' tsúpat az ő tövi társával együtt, vagy p. 101** szerint véve). Eccentricitas *tüz 's középpont táv*; radius vector *tűzpont-sugár*, parameter *tűzpont húr*.

Pes quadratus, cubicus, *terj-láb*, *tely-láb* (a' Pallérok számítása szerint, Arithmet. Eleje p. 128). Simile *hasonló*, homologum *eggyfekvésű*, (néha *megfelelő*).

Propositio *mondatvány*, (sőt röviden *mondat*), *tétel*, *tét*, theorema *okváró tét*, problema *feladat*, *feladó tét*, resolutio *megfejtés*, *végbe vitel*, demonstratio *okmutatás*. Intuitus *ön-látvány*, axioma *ön-igazság*, alap igazság, *önlátványi tét*. Lemma *segéd-tét* 's a' t.

Scientia *tudvány*, *oktudvány* vagy *tanvány*, *okadalom* vagy *okalom*, scientificus *okász*,

* Ed. II. Tom. II. pag. 14.
** Ed. II. Tom. I. pag. 116.

Hosted by Google

a' honnan *okászat* is lehet, mint vadász, vadászat, fényész, fényészet, ditsész, ditszészet 's a' t.

4-*dszer*. A' *Caputak* etc. helyett, akármellyik osztályt lehetne *betü* vagy *számképpel* fejezni ki, (nem külömben a' *plántát* 's sok egyebet is); tsak a' felosztásnak ugyanazon gráditsfogán lévő osztályok, 1-ső, 2-dik . . . , külömben azonegy osztály-névvel külömböztessenek meg: balról az első szám tegye az annyiadik legelső osztályt, 's akármellyik szám tegye az előttevalónak felosztása' első fogán lévő annyiadik osztályt, a' mekkora azon szám; (ha a' szám 9-et meghaladná, a' kétfelől bézártat egy számnak véve). Igy ·34112. vagy ·34112-dik rész lenne az 3-dik főrész 4-dik alrész 1-ső főosztálya első alosztályának 2-dik főszakassza, 's viszont ez úgy iródnék le. Ugyanis ezen osztályokat a' 12-dikig le így lehet nevezni: *főrész*, *alrész*, *főosztály*, *alosztály*, *főszakasz*, *alszakasz*, *főszak*, *alszak*, *főtzikkely*, *altzikkely*, *főtzikk*, *altzikk*; mellyet még tovább is lehet folytatni iz, izetske 's több nevekkel; noha római számokkal 's közönségesekkel, 's más jegyekkel is lehet az alább oda tartozókat megkülömböztetni. Elől is lehetnek még *könyv*, *darab*, sőt *fődarab*, *aldarab* nevek is. A' melly számnak eléadására, a' szükségesek még azon a' helyen nintsenek meg; a' hol már megvannak, kipótlását oda lehet tenni, eleibe irva, mellyik *számnak kipótlása*.

Légyen ezen osztás módjára például az *Ür tudvány*.

·1. *ELSŐ FORÉSZ*: az Ürnek alap-szemlélése: *lep*, (ollykor *kület*) *linea*, *pont*, *forma*, *gömb*; 3 *egyes főmozgás*; *egyen*, *lap*, *kör*, 's egyéb *alap-képzetek* (vagy *képezetek*), és *alap-igazságok*; mellyek ezen első darabnak végén pag. 442-tőn * kezdve találtatnak.

·2. *MÁSODIK FŐ-RÉSZ*: leszállás a' lapra; *lap-tudvány* (planimetria).

·21. *Első alrész*: véges számu, egyenekkel 's két első fő mívvel, (*constructio geom. sensu stricto*).

·211. *Első főosztály*: azon formák, mellyek ennek elsőben szembeötlő származatjainak egymást vágása vagy nem vágása által erednek.

·2111. *Első alosztály*: a' féret vizsgálása nélkül.

·21111. *Első főszakasz*: nem vágása.

Alszakaszok: (1-ső, 2-dik, 3-dik); két egyennek 's többnek, két körnek; egyennek 's körnek.

·21112. *Második főszakasz*: vágás.

·211121. *Első alszakasz*: szöggel való vágás.

·2111211. *Első főszak*: tsupa egyenek egymással.

·21112111. *Első alszak*: két egyen; (4-ed szög, tompa szög, hegyes szög).

·21112112. *Második alszak*: 3 egyen.

·211121121. *Első főtzikkely*: tsak egyik pár nem vágja egymást, kinyujtva is.

* Ed. II. Tom. II. pag. 1.

Hosted by Google

·211121122. *Második főtzikkely*: mindenik vágja egymást; innen a' *háromszögek*.

·2111211221. *Első altzikkely*: a' háromszögek' egyenlőségének feltétei.

·2111211222. *Második altzikkely*: A' háromszög oldalainak 's szembelévő szögeknek költsönös függése: az honnan a' háromszöget meghatározó adatokból, a' meg nem adottakat felszámitni tanit a' *Trig. plana* az ezen számot illető kipótlásban.

·21112113. *Harmadik alszak*: 4 egyen.

·211121131. *Első főtzikkely*: ha nincs olly kettő, melly kinyujtva egymást ne vágja.

·211121132. *Második főtzikkely*: ha van olly kettő, melly egymást ne vágja.

·2111211321. *Első altzikkely*: ha a' más kettő is illyen; tehát mivel vágás van, ezen pártól a' másik vágatik, *(parallelogrammum)*.

·2111211322. *Második altzikkely*: ha tsak egyik pár ollyan; tehát ez vágatik a' másik nem ollyantól, (a' *hasonlatosság alapja*); innen a' háromszögek' hasonlatossága feltétei.

·21112114. *Negyedik alszak*: több akárhány egyenek.

·211121141. *Első főtzikkely*: egyenekből álló (röviden *egyeni*) egyes linea (p. 461).*

·2111211411. *Első altzikkely*: más illyennel való összetételből egy pár egyennek eggyközűségéből származó közönséges képzete az *eggyközűségnek*.

·2111211412. *Második altzikkely*: több oldalú egyeni kerité k.

·211121142. *Második főtzikkely*: valamelly egyeni lineának minden szöghegyeire egyenek azonegy pontból.

2111211421. *Első altzikkely*: az egyeni keritéknek háromszögekre való felosztása.

·2111211422. *Második altzikkely*: mindenik egyennek a' központtól azonegy annyidját véve; a' *hasonlatosság közönséges képzete' magva*.

·2111212. *Második főszak*: egyen a' körrel.

·21112121. *Első alszak*: egy egyen a' kört, csak egy pontban, vagy kettőben vágja.

·21112122. *Második alszak*: több a' kört vágó egyenek.

·211121221. *Első főtzikkely*: azon egyenek vágva egymást.

·2111212211. *Első altzikkely*: azonegy pontban.

A' főtzikkek, (1-ső, 2-dik, 3-dik): azon pont a' karimában, a' karimán belől, vagy kívül.

·2111212212. *Második altzikkely*: ha azon egyenek nem azonegy pontban vágva egymást, egyes visszatérő egyeni lineát formálnak.

·21112122121. *Első főtzikk*: mindenik egyen (úgy a' mint van a' kezdetitől a' végeig) húrja a' karimának; ennek altzikkjei, 3 egyen, 4 's a' többi; sőt ezeknek alsóbb osztályai, ha az egyenek egyenlők vagy nem.

·21112122122. *Második főtzikk*: mindenik egyen érintője a' karimának; mellynek ugyan az imintiek az alsóbb osztályai.

·211121222. *Második főtzikkely*: ha azon egyenek nem vágják egymást.

* Ed. II. Tom. II. pag. 18.

Hosted by Google

·2111213. *Harmadik főszak*: körek egymással.

Első főtzikk: érintési vágat; 2-dik az érintés nélkül való.

·211122. *Második alszakasz*: *a' szögetlen vágás*; melynek alsóbb osztályai, az egyenekből 's körivekből, vagy tsupa körivekből való, 3 's több oldalu formák.

·2112. *Második alosztály*: *férete* az eléhozott keritékeknek; mellynek alsóbb osztályai, az egyeni keritékek, kör, vagy tsupa körívekből, avagy körívekből 's egyenekből valók.

·212. *Második főosztály*: azon formáknak, mellyeknek az első főosztályban tsak magában való lehetsége ötlik szembe (vagy kérdésbe jöhet); véges számu két fő mívvel való lehetsége vagy lehetlensége vi'sgálása.

·22. *Második alrész*: számtalan két fő mívvel (*kettős egyesült mozgása*, az *Idmennyiség tudvány* segítségével).

·221. *Első főosztály*: a' mellyeknek ha nem is minden, de mindenik pontja megadatik véges számú 2 fő mívvel.

·222. *Második főosztály*: a' mellyeknek mindenik pontja sem.

·3. *HARMADIK FŐRÉSZ*: vissza menetel a' lapról az ür mélységébe.

·31. *Első alrész*: a' véges számu egyenekkel 's három fő mívvel származhatók' vi'sgálata (*constructio geom. sensu lato*). Tudniillik az elébbi két fő munkához járul a' tengelyi fordulás.

·311. *Első főszakasz*: *tengelyi fordulása* keritéket nem formáló lineáknak, és lapoknak.

·3111. *Első alszakasz*: lineák' tengelyi fordulása.

·31111. *Első főszak*: keritéket nem formáló egyeni lineák' fordulása.

·311111. *Első alszak*: *egy fordulás*.

·3111111. *Első főtzikkely*: két egymást P lapban vágó egyen megfordul az egyik körül; a' mozgó egyen útja lap, ha a' szög negyed szög, 's tövi tsúpak (azaz tsúp az ő tövi társával), ha a' szög kissebb negyedszögnél.

·3111112. *Második főtzikkely*: Ugyan P-ben A egyennek b, c, . . . pontjairól legyenek B, C, . . . egyenek A-ra ráállok, 's ABC . . . linea forduljon meg A körül; az egyenek útjai *eggyközű lapok*.

·311112. *Második alszak*: *több fordulás*; legyenek P lapban A, B egymást $\mathfrak{p}$ pontban vágó egyenekre α és β rá állók $\mathfrak{p}$-ből, 's forduljon meg A körül α, 's B körül β; a' két út' vágatja a' rááló $\mathfrak{p}$-ből P-re.

·3112. *Második alszakasz*: *lapok fordulása*.

·31121. *Első főszak*: *egy fordulás*; fordúlva P lap, valamely egyenje körül, szüli a' *két lap' szögét*.

·31122. *Második főszak*: *több fordulás*.

·311221. *Első alszak*: mindenik fordulás tengelyének azonegy $\mathfrak{p}$ közös pontja: úgymint értettessék minden, P lapra nézve, azonegy felől, (p. o. fölűl),

Hosted by Google

's minden fordulás $<2R$ legyen, (R negyed szöget tévén). Ezen feltétellel forduljon P lap $\mathfrak{pa}$ egyenje körűl, 's mindenkor újra, a' hová jött, forduljon onnan, valamely $\mathfrak{p}$ pontról vont egyenje körül hajolva, folytatva a' míg tetszik; ered az *angulus solidus* (tely-szög); lehet még azon határozást is tenni, hogy P mindég azon szine felé hajoljon, a' melly elébb alól volt.

·311222. *Második alszak*: *több fordulás*, mindenik fordulás' tengelyje' központja nélkül.

·3112221. *Első főtzikkely*: *tsupán lapok*.

·31122211. *Első altzikkely*: a' fölül két eggyközű lap P és Q közűl egyik forduljon akármelly egyenje körül, míg a' másik lapnak valamelly pontját éri; neveztessék ezen új lap R-nek; vi'sgáltatnak az R-től tsinált átelleni szögek 's a' t.

·31122212. *Második altzikkely*: az eléb bi R forduljon akármelly az P és Q lapokon átmenő α egyenje körül; 's légyen az új lap S; vizsgáltatnak P-vel és Q-val lévő vágatjai az R és S lapokból álló formának.

·31122213. *Harmadik altzikkely*: forduljon S is akármelly, P és Q lapokon átmenő β egyenje körül; vi'sgáltatnak az R, S, T lapokból álló formának P-vel és Q-val lévő vágatjai; mindazon esetben, ha $\alpha \parallel \beta$, mind akkor, ha nem.

.3112222. *Második főtzikkely*: *lapok egyenekkel*.

·31122221. *Első altzikkely*: a' fölebbi P és Q eggyközű lapok közül egyiknek akármelly pontjából a' másiknak akármelly pontjára egyen gondoltassék; vi'sgáltatik az *egyennek lappal való szöge*, az *átelleni szögek* 's a t.

·31122222. *Második altzikkely*: P lapban légyen $\mathfrak{ABC}\ldots$ egyeni kerité k, 's akármelly a' lapon fölül lévő $\mathfrak{a}$ pont legyen, forduljon (mindent egyfelől, p. o. P lapon fölül értve) P lap $\mathfrak{AB}$ egyen körül, míg $\mathfrak{Aa}$ egyen belé esik; és legyen $\mathfrak{Bb} \parallel$ és $=\mathfrak{Aa}$; azután forduljon ugyanaz első P lap $\mathfrak{BC}$ egyen körül, míg $\mathfrak{Bb}$ belé esik. 's legyen $\mathfrak{Cc} \parallel$ és $=\mathfrak{Bb}$, 's így tovább az utolsó oldalig; és ekkor forduljon $\mathfrak{abAB}$ lap $\mathfrak{ab}$ körül, míg $\mathfrak{c}$ pont belé esik Születik az *egyeni ür-eggyközény*, melly *parallelepipedum*, ha $\mathfrak{ABCD}$ *parallelogrammum*.

·31122223. *Harmadik altzikkely*: ha P lapban lévő $\mathfrak{ABC}\ldots$ egyeni kerité knek, minden szöghegyeiről azonegy $\mathfrak{p}$ pontra egyenek gondoltatnak, 's P fordul mindenik oldala körül az említett kerité knek, mig $\mathfrak{p}$ belé esik; születik az *egyeni tetény*, (a' mennyiben a kör-tetény az-az kör talpu tetény 's akármelly más talpu mind tetény).

·312. *Második főszakasz*: *tengelyi fordulása lapi kerité keknek*.

·3121. *Első alszakasz*: negyedszöges háromszögnek megfordulása az egyik *befogó* körül; (*negyed szögü tsup*).

·3122. *Második alszakasz*: lap-állány megfordulása valamelly oldal körül; (*negyedszögü henger*).

Hosted by Google

·3123. *Harmadik alszakasz*: félkör megfordulása a' kettéző körül, (*gömb*).

·3124. *Negyedik alszakasz*: a' mindjárt származandó tsupi vágatok megfordulásával eredő formák.

·313. *Harmadik főszakasz*: tengelyi fordulása a' lapnak az eddig származottaknak valamelly pontja körül.

·3131. *Első alszakasz*: a' tsuppal (*tsupi vágatok*); Ellipsis sőt parabola talpu tsup, (*szelt tsup*).

·3132. *Második alszakasz*: a' hengerrel.

·3133. *Harmadik alszakasz*: az egyeni teténnyel.

·3134. *Negyedik alszakasz*: az egyeni ür eggyközénnyel.

·3135. *Ötödik alszakasz*: a' gömbbel.

·31351. *Első főszak*: ha a' közép ponton mennek által a' lapok; erednek 3 lapból a' gömb' szinén a' *gömbi háromszögek*; mellyeket a' meghatározó darabokból felszámitni tanit a' *Trigonometria sphaerica (gömbi háromszög számitás)*.

·31352. *Második főszak*: ha mind érintik a' lapok a' gömbet, vagy mind vágják, 's ür darabot záró egyes formát tsinálnak; ezek közt erednek a' egészen vagy részszerint *rendes ür-testek*.

·32. *Második alrész*: azon formák, a' mellyek véges számu egyenekkel 's három fő mívvel nem származhatnak; (p. o.) ha valamelly úgy elé nem állítható formának minden pontjairól azonegy pontra egyenek, vagy azonegy egyenhez eggyközüek gondoltatnak; 's annyival inkább, ha azon egyenek' foglalatjának bizonyos formával való vágatja kerestetik 's a' t. Egyáltaljában mindenféle formák, akármelly (akár az *Arborban* három egymásra rá álló egyennel, akár valamelly formában bizonyos törvény szerint lévő) hármas avagy többes egyesült mozgás által származhatnak, mind azokkal egyetemben, a' mellyek ezeknek egybetételével lesznek, ide tartoznak.

5-szer. A' fenn emlitett *Arithm. Elejében* XVIII. lapon javaltatott *egy irás-mód*; mellyben nem tsak összetett betű ne legyen, hanem egy betű se iródjék kétszer egymásután, sőt egy betű felett is, se pont, sem ékezet ne légyen, még is minden hangzónak, még pedig a' rövidnek a' hosszútól megkülömböztetett jele légyen, a' nélkül hogy új betű vétessék fel; ott a' hosszak szintúgy mint a' kétszer irandók, fölül vagy alól (a' mint az irás' folyása kivánja) nyujtott egyenes vonással jelentetnek ki; a' többi egy a' folyó irásra (némelly betűnél vizirányulag vive másnál fölülről szállitva) alkalmas jeggyel tétetik ki: ma is valami illyen formát kivánnék, hogy nyelvünk kimondása meghatározott, 's legalább irásunk' módja, első lenne; de a' *gy* kijelentésére inkább lehetne *d* mint *g* betűt az emlitett jeggyel venni, mivel *adjon* könnyen változik *aggyon*-ra, de vágjon helyett nem mond senki *vággyont*; — 's vagyon még kettő mellynek jegy kell; ezen szókból megtetszik *edzeni*, *findzsia*, (az utolsót egy 6 éves gyermek mon-

Hosted by Google

dotta, hogy egyikkel se lehet le irni, az a' mint *giorno* mondatik): *zs* vólna *z* azon jeggyel, *edzeni* iródnék ugyan *z*-vel, de azon jegy megkettőztetnék a' közepén, ez úgy is ritkán jön elé; valamint a' *giorno* hang, mellyet *g* eleibe tett jeggyel lehetne kitenni.

6-odszor. Egyébaránt ezen lapokon az irás sokban külömbözik az említett könyvetskebelitől; ugyan is itt a' Pesthen 1832-ben nyomtattatott *Magyar Helyesirás főbb szabályai*-haz kivántam' magam alkalmazni; mivel a' midőn a' hányan vagyunk annyiképpen irunk, onnan lehet egyedűl várni, hogy valahára megállítódjék; 's noha kicsit tartóztathatom avagy segíthetem elé, egy pihével sem akarom terhelni a' hazai kimivelődés' kincséért szerencsés széllel feszülő vitorlákkal evező hajót. — Sok van, a' mellyre nézve kissebb az, miként, mint az hogy eldöjtve legyen; 's megegyezve, valahára azon a' nyelven tanuljunk, a' mellyet Anyáinktól tanultunk; ekkor indulhatunk meg a' mély völgyekből fenn az Alpeseken az ég felé emelkedő Nemzetek után.

Ha Őseink deákul akartak tanúltatni, a' leányokat kellett vólna inkább a' Deák oskolákba jártatni, hogy ők tudjanak elébb, 's az anyai téjjel szopva a' magyarral együtt a' deákot, a' *fábába* való megvénülés helyett, belé születtünk vólna — a' hólt nyelvet is az asszonyi eleven nyelv feltámasztotta vólna — 's tsak két nyelvet meg is lehet bírni, (legalább inkább, mint annyit, a' hányat most tanúlni kéntelenek vagyunk), 's a' tudomány nyelve is akkor a' Déák vólt.

Vajha a' tudós Társaságok abban egyeznének meg, hogy a' tudományok óriási növésével, 'a midőn az emberi erő 's idő nem nő, a' mostani sok 's mind több-több helyett egy mathesisi 's musikai lélekkel alkotott vég nélkül tökélyesíthető nyelven nyomtassanak mindent (a' szükségest is le fordítva): nagy részét rövid életünknek, melyben mind a' koltsat keresve, alig lépünk bé a' tudományok' templomába 's a' nap le menyenebben tölthetnők. — Ugyan is a' tudományhoz idő és munka nélkűl jútni, (a' természetet megtsalni) nem lehet: hiába várja valaki a' külömben sok szép felű társalkodástól, hogy a' *Leucipp*' atomjaiból (mint a' tántz-házakbeli találkozásokból) származó világ' módjára, abból tudós legyen; a' gondolatok tántzoló 's párosodó szálája is inkább a' magányban van, 's a' fülemile sem a' seregben énekel. — Lehetne mindazáltal a' társalkodást a' sok rosszat szülő kártya 's egyéb idő-pazérlás helyett, éppen nagy idő nyereségre használni; a' midőn annyi ollyas jön ki mindenfelől, a' mit megkellene olvasni, ha elég idő 's szem vólna réá: sok egynapi olvasást ellehet fél-óra alatt lelkesen mondani; 's tsak 12 ollyan találkozzék össze, felosztva egymást között, mindeniknek tsak egy napba 's hat órába kerűlne, a' mi 12 napba kerűlt vólna mindeniknek — sőt egy nemes rúgója is vólna kinek kinek a' magára vállalt rész' telyesítése, több halgatók' életök' hosszabbítására, 's lelkeik kimivelésére. — Ugyanis a' tanulást is lehet ollyan rúgóval ébreszteni, melly rosszabb a' tudatlanságnál: illyen a' fölül-vágy' világ-égése országokon átfúvó szelekkel; ezzel serkenteni, annyi, mint egy pokoli kiólthatlan (a' testtel elmaradó vétkeket is fölül élhető) tüzet vetni az emberi nem' mejjébe; — mitsoda gonosztévő tenné meg, ha tehetné is, hogy fájdalmat támasszon a' fűbe, hogy nem rozsa bokor, 's ebben hogy nem tölgyfa . . . hogy az egész szép természet munkás álmu csendjéből jajra serkenjen fel. Azt kell fejteni a' mi van, csak főld napfény 's esső kell

Hosted by Google

a' magnak — 's úgy kell nevelni mindent, hogy kiki azzal a' mire teremtetett, 's rendeltetett, megelégedve éljen.

De az említett nyelvre térve vissza; az nem rekeszti a' nemzeti nyelvet ki; minden Magyar meg van azon kedves hangoktól vará'solva, mellyekkel Édes Hazánk' Anyái altatták Nemzetünk' hajdoni hőseit, a' kiknek majd kardvillámjaikkal ropogó mennydörgéseikre vérzápor omlott a' ditsőség' mezején — ha szintén az akkori kardok tollukká, 's a' karok is inkább ezekhez mint az ősi fegyverekhez valókká lettenek is, 's a' ditsőség' mezején is a' hajdoni kőszikla-mejjekből fakasztott vérforrások helyett, fejekből szivárgó tenta patakok kigyóznak mindenfelé.

A' köz nyelv mellett, minden nemzetnek ekkor is mivelni kellene a' magáét; 's két nyelvet megis tanúlhatna mind a' két nem; 's minden nemzet egy nyelven tudván szollani, az egymás' megértése millyen egybefoglaló kötél lenne, (a' melly Hazánkban is olly kivánatos volna); 's melly közelítés lenne ez az emberi nem egyességére.

De mikor hozza fel a' szeretet bús angyala az ezeredek' elpiruló reggelén azt a' napot, mellyen le olvadnak a' csak ön sebét érző kevélység' jégvárai; 's feltámadván kiki, mint megannyi senyvedő halott, külön kriptájából, a' setétben egymás ellen hadazott testvéri karok, megesmérvén egymást köz ölelésre ragadtatnak; 's a' köz Templom kiderülő bóltja alatt minden szívből kivettetvén az Én-bálvány, mindenik egy véghetlen Atyával 's egy világgal telvén meg, egy nyelven zendűl meg a' földről az első *Mi Atyánk*! égi boldogsággal mosolyog vissza a' végetlenség, az örökkévalóság' szeretetgyürüje rogyog a' föld körűl — a' belső teremtés' első hajnalát öröm könnyek gyöngyözik — 's az angyalok oda fenn ditséretet énekelnek.

Ekkor lesznek egybegyűlve az örökösök az Uj Testamentom telyesítésére — arra az osztályra, a' hol tsak mindennek juthat minden — a' köz szeretet' mennyei kintse az.

De mikor értjük meg, hogy mindnyájon elesünk ezen tulajdon magunk ellen dühösködő háboruban? 's mikor záródik bé *Janus*-nak az első *Kain*-tól fogva mind nyílva álló ajtaja? Egymást szaggató fenevadok' ordító pusztája az, mellynek az Égre az Isten' képeivel kellene vissza rogyogni; elszakadt az odakötő szeretet szent lántza, 's az elsetétűlt tsillag számkivetve bujdosik — azon kevesen a' kik keresik egymást, sem találhatják fel — 's a' legmelegebb szivek is magánoson vernek a' mindenfelől kizáró jégfalak közt — egy zivataros éjjben fut kiki külön lámpásoknál haza, félve mindentől, leginkább egymástól — mikor lessz az a' mennyei *szó*, melyre a' magát emésztő rivó zürzavar' sötétségében *világosság légyen*? ha nem csak szájjal, hanem egymáshoz közeledő szívvel kérnők, eljőne az Isten' Országa — 's e' kősziklás szigeten való útunkat, a' helyett hogy nehezítsük egymásnak megkönnyitve, vigan érkeznénk a' tengerhez további útunkra. — Akármely kitsi is ez élet, nem megvetni való; mikor felsőbb kötelesség kéri is, nagy árrára mútat, a' mellyért eladó is; nem végtzél ugyan, de a' mint eszköz egyfelől a' továbbira, tzél másfelől magában is. — 'S oh! a' mit most úgy megrútitunk, melly széppé tehetnők; hogy nemcsak a' jelen nyerődnék meg, hanem szebben nevekednék a' belső ember is, 's a' halált is úgy néznők, mint egy még szebb világ' bábáját — midőn ez a' föld alól a' napra útat nyitván, a' megnőtt szárnyu új angyalt

Hosted by Google

leszállott kedvessei repitik a' menyre ki — 's a' felsőbb Természet mint egy anya a' fájdalom után mosolyog az újan szülöttnek. — Csak új életre mútat az új domb is, mellyel az anyaföld méhébe fogadván, virágokkal szött zöld leplét reményszivárványok alatt kapja vissza. — Sőt mikor a' sohajtások a' szemekre fellegezvén, a' sirhalmok' nefelejtseit könnyekkel öntözik, a' sirattak a' menny' tornáttziból néznek alá — 's mikor elalutt képeik felett a' pá'sint hánykodik a' nyögő szélben — mulandóság 's örökkévalóság' tenger habjai — honvágy — (semmi emberi szó ki nem mondhatja, 's a' mu-'sika is csak inkább sebesiti az édes fájdalomtól sajgó szívet —), azt súgják lelkeinkbe: *Ne szomorkodjatok! ah! hogy nem mondhatjuk meg, melly idvesség az Istenhez közelebb — türjetek békével, 's higgyetek! — a' végtelenség mennyei mágnesse, a' mi a' nemes lelkeket vonja, itt van.*

Hosted by Google

MEGIGÉRT JELENTÉS.

(NUNTIUM PROMISSUM.)

Háládatos köszönettel jegyzem ide azoknak neveiket, a kik az első darabban fel irttakon kivül előfizetvén, ezen munka kiadására segitségül vóltanak, még pedig kéretlenül.

G. Bethlen Ádám	8	példányra
T. Ertsei János, Sz. Udvarhelyi professor	1	«
T. Intze Ferentz, Nevelő	1	«
B. Kemény Diénes	4	«
B. Kemény Domokos	4	«
B. Kemény István	4	«
B. Kemény György	4	«
Krassai András R. Tab. Cancellista	1	«
Locodi György Fiscalis Procurator	1	«

Ezen kívül Bolyai János P. J. Kapitány az Első darab' Appendixének, mint tulajdon munkájának kinyomattatására, részint példányokra, adott *száz négy* váltó rft. 's 54 xrt.

Az üresen maradott hely az igéreteké.

Hosted by Google

ADNOTATIONES EDITORUM.

Hosted by Google

Hosted by Google

Pag. XI. Arbor hic in Ed. I. chartæ maximæ initio Tomi I. agglutinatæ in folio ut dicitur typis impressus est.

Pag. XVIII. ℣. 4—7 a calce ad laevam. Verba «ubi tamen sive functionem constituentia, sive functionis qualitas quantitasve quæri possunt.» inseruimus ex Erratis Tomi I. pag. XXXVI.

Pag. XXI. Hunc «indicem rerum» parvis solum momentis correctum recepimus, tamen in margine ascripsimus numeros paginarum Editionis II. Quæ vero Bolyai animadvertit, ut Errata emendatiora fierent, penitus omisimus.

Pag. XXIII—XXXVI. In Ed. I. asterisco * apposito designati sunt loci, quos Bolyai Tyronibus in lectione secunda discendos commendavit.

Pag. XXIX. ℣. 15 a calce. Quæ uncis [ ] inclusa sunt, nos inseruimus. Eadem repetita recurrunt posterius in indice rerum hac ipsa significatione.

Pag. XXXIV. ℣. 8 a calce «variabilis» scriptum est pro «logarithmus».

Pag. XLIII. ℣. 4 a calce. «Si unum parallelum per alterum non parallelum secetur» scripsimus. In Ed. I. errore quodam hæc leguntur: «Si duo paria fuerint parallela» . . .

Pag. 1, ℣. 3. «Conspectus Geometriæ Generalis» posuimus pro «Generalis Conspectus Geometriæ» restituto verborum ordine, quo Bolyai in Conspectu Arithmeticæ generali usus est.

Hosted by Google

Pag. 3, ℣. *4* «via lineæ» subintelligitur *rigidae*.
Ibidem ℣. *12—7 a calce*. Cf. pag. 12, sub 3.

Pag. 4, ℣. *5 a calce* loco *T* in Ed. I. errore typographi *M* legitur.

Pag. 5, ℣. *5—4 a calce* verba «*quarumvis binarum*» et «*eadem*» in Ed. I. non leguntur. Hunc locum ipse Bolyai in Erratis Tomi I. pag. LIII, ℣. 5 a calce emendandum designat his verbis: «post *sectio* adde *singulis tribus communis*». Item in iisdem Erratis pag. XC: «sectio *quarumvis binarum eadem* intelligatur». Ex emendatione auctoris posteriore varietatem lectionis a nobis constructam evidentissimam æstimantes in textum inseruimus.

Post hanc emendationem ibidem pag. XC Bolyai sic orditur: «*Superficies* est, in qua punctum undevis innumeras vias habet, nec portio spatii inest: hicque talis supponitur, cuius nulla portio cum reliquo punctum solum commune habet; quæ *planum* fit, si in ea quævis *linea rediens* sphæræ communis portionem se facie utraque tegentem claudat.»

Pag. 7, ℣. *11 a calce* post «sphæra» verbum «duplex» inseri voluit Bolyai in «Recensione per auctorem ipsum facta«.
Ibidem ℣. *6 a calce* verba «quæ revolutione» in Ed. I. ordine inverso leguntur.

Pag. 8, ℣. *12 punctum spatiale* in Ed. I. *punctum spatii* legitur. De hoc loco ipse Bolyai in «Recensione per auctorem ipsum facta» scripsit «pro *puncti spatii* lege *puncti spatialis*». Cum ipse pro *punctum* errore quodam *puncti* scripsisset, recte nominativum restituimus.

Pag. 10 distinctio §. 8. in Ed. I. deest.
Ibidem ℣. *4* post «quadam» inseruimus literam *f*.
Ibidem ℣. *6* «formæ *f*», in Ed. I. legitur «formæ alicuius».
Ibidem ℣. *8* post verba «Hinc porro», in Ed. I. versui præcedenti ascripta, alinea nova sic incipit: «1. Rectarum istarum . . .», quam

Hosted by Google

alineam sustulimus, ne numerus 1. in alinea ℣. 18 recurrens lectorem turbaret.

Pag. 12, ℣. 7—6 a calce. In Erratis Tomi I. pag. LIII Bolyai hanc emendationem præcipit: «post *parallelogrammi* adde: *nisi quadratum fuerit*». Cum præter quadratum etiam alia parallelogramma inveniri queant, quæ excipienda sunt, melius putavimus ℣. sequenti verbum «generaliter» inserere.

Pag. 13. ℣. 7 usque 2 a calce alineam ex Erratis Tomi II. pag. 373 (sive Tomi I. pag. LIII) inseruimus.

Pag. 14, ℣. 11 a calce. Definitionem «tang. *v* et sec. *v pro radio r*» vide pag. 128.

Pag. 15, ℣. 13. Verba «non in illo plano sitæ» inseruimus ex Erratis lucubratiunculæ «Recensio per auctorem ipsum facta». Aliter emendare voluit Bolyai hunc locum in Erratis Tomi I. pag. XC: «nil aliud cum plano illo utvis producto commune habenti». Nos autem emendationem tempore posteriorem Recensionis, cum etiam brevior esset, inserere melius putavimus.

Pag. 17, ℣. 13. Bolyai *perpendicularem* signo «∟» significat; nos melius putavimus signo usitatiore «⊥» uti, quamquam signum Bolyaianum naturæ anguli recti a semirectis inclusi nempe casui perpendicularium simplicissimo magis conveniat.

Pag. 20, ℣. 5—7. Partes Figg. 5. et 6. literis *a* et *b* distinctæ, nec non pars *c* Fig. 5. in Ed. I. hanc inscriptionem habent: «Aut si non ponatur distantia eadem».

Pag. 21, ℣. 10 a calce «admissa operatione tertia quoque» inseruimus ex Erratis Tomi I. pag. XXX.

Hosted by Google

Ibidem ℣. *3 a calce* «potest iis, quæ» in Ed. I. sic legitur: «potest; iis vero quæ».

Pag. 22. ℣. *8.* «Arbor inferius» de quo hic agitur paginis 408—412 continetur, atque idem est, qui legitur pagg. LIX—LXIII.

Pag. 23, ℣. *14—15* «si punctum motum b fuerit» inseruimus ex Erratis Tomi I. pag. XXXVI.

Pag. 27, ℣. *18* «ininterrupte» pro «in interruptæ» Editionis I.

Pag. 28, ℣. *7 a calce.* In Erratis pag. XC leguntur hæc: «Annulus e centro f aliter determinandus: moveatur nempe superficies sphærica *S'* in se circa f: punctum aliquod ipsum f includens, lineam uniformem redeuntem describet». Et: «Notandum autem, rectam planumque brevius quoque deduci posse».

Ibidem ℣. *2 a calce* literam «o» nos inseruimus.

Pag. 29, ℣. *1* pro litera «o» in Ed. I. «c» legitur.

Pag. 31, ℣. *12 a calce* «c * C» correximus ex «c * p», errore manifesto calami in Ed. I. scripto.

Ibidem ℣. *2 a calce* «annuli concentrici» scripsimus pro «circuli concentrici», cum nondum demonstratum esset lineam circulum esse.

Pag. 36, ℣. *12 a calce* post «huius» indicationem paginæ 26, quam Bolyai uncinis inclusam ibi apposuit, omisimus.

Pag. 37, ℣. *3.* «(Fig. 14.)» a nobis insertum est.

Ibidem ultimo versu «cd» posuimus pro «ab» Editionis I.

Pag. 41 ultimo versu. Post «essent» indicationem Bolyaianam paginæ 39, ut minus accuratam, omittendam censuimus.

Hosted by Google

Pag. 42, ℣. 13 «crescentibus» et *℣. 2 a calce* «descripta» inseruimus ex Erratis pag. LIV.

Pag. 44, ℣. 3. «a'b, ab æqualem» scripsimus pro «a' a b æqualem».
Ibidem ℣. 3 a calce «suppositive» pro «supposititie».

Pag. 56, ℣. penultimo post «in *Appendice*» in Ed. I. «sequente» legitur.

Pag. 58, ℣. 5 a calce et *pag. 60,* ·211121122 *℣. 1 et 2* pro «sufficiente» melius esset «quantalibet».

Pag. 59. §. 2. ℣. 1. «$v = u > u'$» positum est pro «$u = u'$», item «$\overline{\mathfrak{AB}}$» pro «$\overline{\mathfrak{AB}}$» ex Erratis Tomi II. pag. 375.

Pag. 60, ℣. 5. «sectione prima» scripsimus pro «tomo primo».
Ibidem §. 1. Nulla mentio facta est casus illius, duo triangula æqualia esse, cum duo latera et angulus maiori oppositus æqualia sint.

Pag. 61. ℣. 12. «ac̄ in $\overline{\mathfrak{AC}}$» scripsimus pro «$\overline{\mathfrak{ab}}$ in $\overline{\mathfrak{AB}}$».
Ibidem ante ℣. 6 a calce in Ed. I. distinctio «§. 2.» legitur, quam delevimus, cum duo versus ita distincti simpliciter ex Casu tertio sequerentur.
Ibidem ℣. 4 a calce «§. 2.» positum est pro «§. 3.»

Pag. 63, ℣. 1. «quamvis» scripsimus pro «quarumvis», secundum Errata Tomi II. pag. 375.
Ibidem ℣. 2 a calce «adiacentes æquales» scripsimus pro «interceptum æqualem», ut loco laudato Bolyai præcepit.

Pag. 64, ℣. 2. De hac re Bolyai pag. 375 Tomi II. Ed. I. hæc annotavit: «*Interim eaedem trianguli aequicruri proprietates, e statim postea ab hoc independenter demonstrato, quod angulo maiori latus maius,*

Hosted by Google

et lateri maiori angulus maior opponatur, manifesto immediate sequuntur». Demonstratio, cuius hic mentio facta est, pag. 66 huius Tomi et in annotatione ad illum locum exposita est.

Pag. 65, ℣. 16 «maiorem» in Ed. I. «minorem».

Pag. 66, ℣. 16. Ad hunc locum in Erratis Tomi II. pag. 385 nota sequens legitur:

«P. 18. non error quidem proprie est, verum si in triangulo æquicruro angulorum ad basim et crurum æqualitatem se mutuo ponere, non iuxta p. 16. 1[1], sed e laterum angulorumque mutua dependentia demonstrare libeat, ut p. 375[2] dictum est: tum conversa ad finem paginæ 18[3] aliter demonstranda erit; nempe si $u > v$, erit u aut rectus vel obtusus, aut non; prius e parte priore patet; in casu posteriore autem erit u et v uterque acutus; nam si v rectus vel obtusus, et simul $u > v$ esset, summa duorum angulorum trianguli 2 rectos excederet.

Pro acutis u et v et $u > v$ autem demissa (uti Fig. 23[4]) perpendiculari, patet angulos u ad dextram lævamque æquales, et v ulterius ad dextram cadere; quia nec tegere angulum u, nec interius ad lævam cadere potest, nam in casu priore $u = v$, in posteriore $v > u$ esset. Tum vero $b > (a' = a)$ est.

Hinc si $u = v$, erit $a = b$, quia pro $a > b$ esset $v > u$, et pro $a < b$ esset $v < u$. Ita si $a = b$, est etiam $u = v$; quia pro $u > v$ esset $b > a$, et pro $u < v$ esset $b < a$.

Sed idem et alioquin ex ipsa Fig. 23[4] facile liquet; imo etiam alio modo patet; nempe *pro cruribus aequalibus*

[1] In hac ed. pag. 63, 1.
[2] « « pag. 424, al. 1.
[3] « « pag. 66.
[4] « « Fig. 60.

Hosted by Google

recta ex apice ad meditullium baseos ducta, fient triangula æqualia (per tria latera), *si angula ad basim fuerint aequales*, perpendicularis e meditullio baseos, formas utrinque æquales faciet, exibitque e triangulo, quod nisi per apicem fiat, fiet triangulum æquale non triangulo.»

Pag. 67, in fine ℣. 2 delevimus hæc: «Atque post hoc numero».

Ibidem ℣. 4—5 a calce pauca correximus, ut Bolyai in Erratis Tomi II. pag. 375 corrigenda voluit.

Pag. 68, ℣. 7—8. «Quadrati, rhombique alia constructio e (Fig. 91 *a*, *b*, *c*, *d*) patet» ex Erratis Tomi II. pag. 375 insertum est.

Pag. 69, ℣. 12 «*λ*» scriptum est pro «*v*».

Ibidem §. 2. Inter conditiones similitudinis triangulorum omissus est casus, si in duobus triangulis duorum laterum proportio angulique horum maioribus oppositi æquales sint.

Pag. 77, ℣. 14 «in» ante «divisione» in Ed. I. deest.

Pag. 79. ℣. 5—2 a calce. Locus, quem Bolyai hic designat, Editionis libri Christiani Wolfii, qui inscribitur «Elementa matheseos universæ» Genevæ anno 1793 in publicum datæ Pagina 98. sic legitur:

Definitio VII. 17. *Linea recta AB* est, cuius pars quæcunque est toti similis.

Definitio similitudinis ibidem pag. 18 hæc est:

Definitio XII. 24. *Similia* sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ a se invicem discerni debebant. *Dissimilia* sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ a se invicem discerni debent. Atque adeo *Similitudo* est identitas; *Dissimilitudo* diversitas eorum, per quæ res a se invicem discerni debent.

Pag. 81, §. 5. Figuræ 79*, in qua demonstratur constructio *tangentis ex y*, solum in indice rerum mentio facta est.

Hosted by Google

Pag. 82. Distinctio «§. 1.» in Ed. I. deest.

Pag. 83. ℣. 4. In Fig. 82. pro literis c, d, e in Ed. I. hæc inæqualitates scripti sunt: $c < a$, $d > a$, $e > b$.

Ibidem ℣. 11. Pro «$\frac{\gamma}{2}$», «$\frac{\delta}{2}$» in Ed. I. legitur «γ», «δ», errore manifesto calami.

Pag. 85, ℣. 3. Vocabulum «Est» a nobis insertum est.

Pag. 86. §. 1. De Fig. 88. in Erratis Tomi II. pag. 386 leguntur hæc:

> «Notandum etiam centrum circuli inscripti cum centro circumscripti, in Fig. ob triangulum æquilaterum coincidere: secus perpendiculares e duorum laterum trianguli meditulliis, et rectæ duos angulos bisecantes diversas sectiones præbent.»

Ibidem ℣. 3 a calce. In Ed. I. «$\frac{p}{m}$» legitur pro «$\frac{p}{n}$», errore typothetæ.

Pag. 87, §. 3., ℣. 7—8. «propter hypotenusam cathetosque æqualia (pag. 64)». In Ed. I. sic: «(propter pb commune et angulos adiacentes æquales)». Correximus ex Erratis Tomi II. pag. 386. Ubi etiam hæc leguntur:

> «Fig. 52.* etiam u nonnisi extremitatibus rectæ ab adscribi debuisset, quum initium a perpendicularibus e laterum ab et bc meditulliis fiat. Potuissent quidem ad eundem finem duo anguli ad b, c bisecari, et e rectarum bisecantium sectione p rectæ ad apices omnes duci: etenim totidem triangula, quot latera polygoni, patet per duo latera et angulum interceptum æqualia esse; nempe tum pb = pc, et △ pbc = pba, itaque angulus ad a pariter bisecatur, idemque porro continuatur; et manifesto perpendiculares

* In hac ed. Fig. 89.

Hosted by Google

etiam ex p apice triangulorum æquicrurorum æqualium communi æquales erunt, centrumque circuli circumscripti inscriptique in figura regulari idem erit.»

Pag. 88. Pro «§. 5.» et «§. 6.» in Ed. I. erronee «§. 4.» et «§. 5.» scriptum est. Quantitatem anguli Bolyai in §. 5. gradibus exprimit, quamquam divisionem circuli in gradus nondum pertractavit. Denotationem tamen reapse retinendam putavimus.

Pag. 89, ℣. 4 a calce. In Ed. I. Fig. nostra 91. deest, sed inveniuntur quatuor Figuræ, quæ potius ad pag. 68 pertinent. Infra duas earum, quas nos literis *a* et *b* denotavimus, «Rhombus», infra tertiam, litera *c* denotatam «Rhombus vel quadratum», infra quartam, litera *d* denotatam «Quadratum» scriptum est.

Pag. 93, ℣. 1 in Ed. I. sic incipit: «Quantitas anguli quam esse eadem potest, anguli quem . . .» Correximus iussu Erratorum Tomi II. pag. 375.

Pag. 94, ℣. 13 «ap» correximus ex «aq» Editionis I.
Ibidem ℣. 14 a calce «*H*» scripsimus pro «*A*» Ed. I.

Pag. 97 pro «§. 4.» et *Pag. 98* «§. 5.» in Ed. I. erronee «§. 3.» et «§. 4.» scriptæ sunt.

Pag. 98, ℣. 13 a calce «eBf» scriptum est pro «ebf» Editionis I.
Ibidem ℣. 3 a calce «talis» insertum ex Erratis Tom. II. pag. 375.

Pag. 101. Ante «§. 2.» numerus «I.» in Ed. I. iterum inscriptus est. Delevimus.
Ibidem ℣. 14 «dEC» scriptum est pro «dEf». Litera d significatur punctum rectæ Eg, pro quo Ed = BC.

Hosted by Google

Ibidem ℣. *6—7 a calce.* In figura allata Tomi I. Ed. I. demonstratio etiam æqualitatis triangulorum quoad portiones terminatæ indicata est. Confer etiam pag. 109.

Pag. 103. Ad §. 7. Bolyai «in gratiam Tyronum» hæc addidit (Tomi II. pag. 377):

> «Pro imperitis asserentibus, trapezii aream æqualem esse facto ex β et semisumma laterum non parallelorum (nempe l et lateris ei oppositi), imo quadrilateri cuiusvis aream prodire, si semisumma laterum oppositorum per semisummam reliquorum multiplicetur: sit l æquale lateri opposito, et construatur rectangulum pro basi β et altitudine l: atque ponderentur trapezium rectangulumque in bilance.»

Pag. 110. «§. 3.» in Ed. I. inscripta est «§. 2.», distinctio «§. 3.» vero ante alineam tertiam huius paragraphi scripta est, quam nos hic omittere debebamus.

Pag. 112, §. 3. ℣. *1.* insertum est «similium».

Pag. 116. Pro numero «IV.» in Ed. I. «V.» legitur.

Pag. 125, ℣. *2.* «laterum» scripsimus pro «angulorum» iussu auctoris in Erratis Ed. I. Tomi II. pag. 376.

Ibidem pro linea 10 in Ed. I. hæc leguntur: «$\cos u^2 = r^2 - \sin u^2$ (per $\cos u^2$, 2-dam potentiam non arcus u, sed ipsius $\cos u$, ita per $\sin u^2$, 2-dam potentiam sinus u intelligendo)». Ubi nos, ut et in locis similibus ratione scribendi consueta $\cos^2 u$, $\sin^2 u$, scripsimus.

Pag. 128, ℣. *3 a calce* «monitum» scriptum est pro «motum».

Pag. 129, ℣. *6 a calce.* Post «tang. α» in Ed. I. scriptum est «pro radio r», quod nos omisimus, insertis verbis «et tangente» ℣. antecedenti.

Hosted by Google

Pag. 133. Lineis Figuræ Editionis I., quam nos numero 137. denotavimus, inscriptæ sunt denominationes functionum trigonometricarum. Nos omissis inscriptionibus literas punctis Figuræ apposuimus, easque textui inseruimus.

Pag. 146. «Scholion 8.» in Ed. I. numero «6.» erronee denotatum est.

Pag. 147, ℣. 2 a calce «additum est aliquid in Tomi I. pagg. 512—520, 569—581.» In Ed. I. legitur «addetur aliquid inferius. Atque nunc sequitur» (nempe ·22). Verbum «sequitur» ad initium ·22 transtulimus.

Pag. 148. In Ed. I. finis sectionis II. et initium sectionis III. sic coniuncta sunt: «Atque nunc sequitur

·22 MOTUS GEOMETRICUS COMPOSITUS: nempe . . .»

Ibidem ·22 *℣. 2.* De «Arbore» confer adnotationem ad Pag. 22.

Pag. 149, ℣. 3. In Erratis Tomi II. Pag. 401 vel LXXV adnotata sunt hæc:

> «Si punctum ex A linea abscissarum in B sursum moveatur, via accipiatur positiva, si deorsum, negativa; atque hic conditio C esse potest, ut quæratur resultatum, quod fieret, si motus puncti deorsum e fine viæ sursum factæ poneretur.»

Ibidem ℣. 7—8. In Ed. I. $(\alpha)x$ et $(\beta)y$ scriptum est pro $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$.

Ibidem ℣. 4 a calce. Post «constare» in Ed. I. legitur «inferius», pro «patet» vero «patebit».

Pag. 151, ℣. 7 a calce. In Ed. I. legitur y pro y'.

Ibidem ℣. 5 a calce. In Ed. I. æquationi alteri præscriptum est $\vdash\!\dashv$.

Pag. 152, ℣. 18. «bisecant» in Ed. I. erronee «bisecat» scriptum est.

Hosted by Google

Pag. 156, ℣. 11 a calce. Alinea in Ed. I. errore typographi numero 6. denotata est.

Pag. 157, ℣. 13 a calce «distantiæ ab $\mathfrak{f}$ et *D aequales* erunt» in Ed. I. sic legitur: «distantia ab $\mathfrak{f}$ et *D aequalis* erit».

Pag. 161, ℣. 14 a calce. De designatione hic applicata vide Tom. I. Pagg. 113 et 628.

Pag. 164, ultimo versu et Pag. 165, ℣. 1. Ipsa res declarat restrictionem «si $\beta > \sqrt{a}$» præter necessitatem esse, sed duo valores ipsius x, dum reales sint, simul $\geqq 0$ fieri. Ex duobus radicibus x, si $\beta > \frac{\sqrt{a}}{2}$, uni solum y' positivum ita convenit ut $z - y' = \beta$ sit. In exemplo Bolyaiano etiam pro $x = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ est $y' = \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0$.

Pag. 175, ℣. 3. In Ed. I. post «cadat» errore quodam hæc leguntur: «demittatur ex $\mathfrak{q}'$ perpendicularis ad axem; gaudebit hyperbola in hac puncto $\mathfrak{p}$».

Ibidem ℣. 5—4 a calce. «Sit (Fig. 158.) ad axem parabolæ» scripsimus pro «Si (Fig. 120) ad axem parabolæ sit» Editionis I.

Pag. 179. ℣. 8—7 a calce. «Atque et parabola ut ellipsis foci in axe in infinitum remoti consideretur.» Inseruimus ex Erratis Tom. II. Pag. 387.

Ibidem ℣. 2. a calce. Verbum «priore» Auctor ipse scribi voluit in Erratis Tom. II. Pag. 387 pro «ipso» Editionis I.

Pag. 185, ℣. 2—4. Punctum $\mathfrak{q}$ tunc solum in centro hyperbolæ erit, si pro punctis duobus $\mathfrak{d}$ ei respondentibus utrisque $u = R$ est. Si pro uno $\mathfrak{d}$ solum $u = R$ est, punctum $\mathfrak{q}$ in asymptoto $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$ erit.

Pag. 192, ℣. 3—4. Bolyai hic solum de rectis parabolam secantibus tractat.

Hosted by Google

Pag. 204. in fine ℣. 11 a calce «$\beta^2 + p\alpha = 0$» ut mendosum delevimus.

Ibidem ℣. 10 a calce post «$p = 0$» æquationem «$\alpha = 0$» ut mendosam delevimus.

Pag. 205, ℣. 3—8. Quæ uncinis inclusimus, ex Erratis Tom. II. Pag. 376 sumpta sunt. Ex lineis secundi ordinis tamen oblivione quadam excidit æquatio duarum rectarum parallelarum, $y^2 = c$.

Ibidem ℣. 15. Rectius demonstrandum fuisset aptiore coordinatarum systemate adhibito casum $a = 0$ evitari posse.

Pag. 206, ℣. 10. Oblivione quadam omissus est casus $b = c = 0$.

Pag. 209, ℣. 14—17 non sufficiunt ad demonstrandum problema Delium insolubile esse.

Pag. 210, ℣. 12 «et tum &» inseruimus ex Erratis Tom. II. Pag. 387.

Pag. 211. In Erratis Tom. II. Pag. 387 legitur annotatio Auctoris: «Linea ima autem iuxta pag. 5* sub numerum ·222 nonnisi ea venire debuissent, *quorum nec quodvis punctum construi geometrice sensu stricto potest*».

Pag. 212, ℣. 9—10. Fig. 191. casum $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = 2\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ illustrat.

Pag. 217, ℣. 6—4 a calce. De hoc theoremate positio singularis punctorum exceptionis causa esse potest iam in casu, si $n = 3$.

Pag. 218, ℣. 5 a calce post «æquationem» delevimus «$(F)(x, y) = (f)(x, y)$».

* In hac ed. pag. LXI.

Hosted by Google

Pag. 219—307. Subdivisio Sectionis IV. in calce repetita novum est editorum ac præsertim optabile, cum in subdivisione contextus huius sectionis essentialiter expleatur; definitiones nonnullæ vero in ea solum reperiuntur.

Pag. 219. In fine ℣. 8 in Ed. I. affertur Index rerum Tomi I. Delevimus.

Ibidem ℣. *9* «(in calce)» scripsimus. In Ed. I. legitur «pag. 3».

Pag. 220, ℣. *5 a calce* «*P, Q,* . . .» addiderunt editores.

Pag. 223, ℣. *1* post «est» delevimus «1-mo».

Ibidem ℣. *2—1 a calce.* Sententiam postremam addidimus ex Erratis Tom. II. Pag. 401.

Pag. 225, ℣. *6—7.* Ordinem vocabulorum immutavimus; in Ed. I. enim «parallelæ» ℣. 6 post vocabula inclusa legitur.

Pag. 228, ℣. *6 a calce* «in calce» scripsimus pro «(p. 7)».

Pag. 230, ℣. *10 a calce* «Ꝟ'» nos inseruimus.

Pag. 231, ℣. *12 a calce* «sub conditione (pag. 230) dicta» inseruimus ex Erratis Tom. II. Pag. 376.

Pag. 234, ℣. *7.* Pro »ED'C» in Ed. I. legitur «EDC».

Pag. 239, §. 2 ℣. *2.* Vocabulum «perpendicularis» insertum est ex Erratis Tom. II. Pag. 376.

Pag. 243, ℣. *13—14.* In Ed. I. propositio vitiose terminatur sic: «e catheto aa' et hypotenusa Ala'».

Ibidem ℣. *16* «etiam Alq» in Ed. I. legitur «Alq et a'q».

Hosted by Google

Pag. 248, ℣. 14 &. In Fig. 224. etiam in originali circulus pro ellipsi delineatus est, probabiliter quia pars contextus ad hunc casum limitalem spectat.

Pag. 258, ℣. contextus ultimo «$4^\circ\, 4'$» correximus in «$4^\circ\, 2'$».

Pag. 265, ℣. 4. Post «Appendicis» delevimus «in tomo primo», ante «in» vero delevimus «ibidem».

Ibidem ℣. 8—9. Diametri hic intelligantur *L* formes. Theorema hoc casus specialis est formulæ, quæ ad *segmentum Z sphaerae* attinet (Pag. 384), nempe $Z = \pi . \mathfrak{fc} . \mathfrak{fc}$.

Ibidem ℣. 13. «*P*» legitur pro «*p*» Editionis I. ex Erratis (Tom. II. pag. 387).

Ibidem ℣. 16. In Erratis (Tom. II. Pag. 387) legitur de Fig. 237.: «Notandumque est, quod *P* circa 𝔄𝔓 motum quoque ‖ 𝔣𝔅 maneat, atque tum ordinata in semicirculo ad angulum obliquum reducenda sit (pag. 165*)»

Pag. 283. ℣. 15. In Ed. I. Figuræ 240. suprascripta sunt hæc: «Sectio nulla, si $r < \pm(R-d)$ vel $> R+d$. Sectio in puncto, si $r = \pm(R-d)$ vel $R+d$. Sectio in 2 punctis, si $r < R+d$, sed non $<$ nec $= \pm(R-d)$».

Pag. 284, ℣. 13 a calce «§. 5.» in Ed. I. «§. 4.» inscripta est.

Pag. 288, ℣. 1. «§. 6.» in Ed. I. «§. 5.» inscripta est.

Pag. 291 sqq. Significationes Figurarum 252—254. commutavimus, ut partes triangulorum oppositæ similibus literis denotentur.

Pag. 303, ℣. 9—10. Literæ 𝔞𝔨𝔡, 𝔪𝔨𝔣 et 𝔪𝔞𝔟𝔓 hic additæ sunt, ne in Figuris nomina circulorum adscribi debeant, ut in Ed. I. Puncta duo horizontis, australe et boreale in Ed. I. literis insignita non sunt.

* In hac editione pag. 214.

Hosted by Google

Pag. 309, ℣. 14—16 et *Pag. 309, a ℣. ultimo usque ad Pag. 310, ℣. 3* correximus ex Erratis Tom. II. Pag. 387.

Pag. 310. ℣. 5 a calce. In Ed. I. Figuræ 261. nomina singulorum punctorum, linearum etc. ascripta sunt.

Ibidem ℣. 6 a calce «§. 2.» in Ed. I. «§. 3.» inscripta est.

Pag. 311, ℣. 13 a calce post «fuerit» delevimus «puncti $\mathfrak{P}$».

Pag. 312, ante ℣. 6 a calce delevimus «§. 2.»

Pag. 313, ℣. 14 «et altitudines $\mathfrak{P}''\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q}''\mathfrak{A}'$ punctorum $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$;» ex Erratis Tom II. Pag. 376 insertum est.

Pag. 326. ℣. 3. Post «Scholion» in Ed. I. deest «2.»

Pag. 328, ℣. 6. Literas dies denotantes Bolyai ubique parvos (*abc...*) scribit.

Pag. 331, ℣. 7—8 correximus ex Erratis Tom. II. Pagg. 387—8.

Pag. 333, ℣. 10. Duo circuli Figuræ 276 in Ed. I. literis magnis (C, C') insigniti sunt. Ibidem circulus superior Figuræ charta separata fictus et in centro filo tabulæ affixus est.

Pag. 335, ℣. 1—6. Cyclus solis Gregorianus quatuor tantum sæculorum vere est. — Errores in chronologia alii etiam inveniuntur sed minimi momenti, ut neque emendatione neque mentione in annotationibus egeant.

Pag. 343, ℣. 9 et 11 a calce et *Pag. 350, ℣. 1* correximus ex Erratis Ed. I. Tom. I. Pag. XC: «Pro N non >18, dum residuum >13, tunc est addendum 1». In contextu Ed. I. legitur «pro $N<18$», «residuum >17», «addatur 1».

Hosted by Google

Pag. 344, ℣. 11 «et erit» scriptum est pro «=».

Pagg. 357—358. Post Recensionem per auctorem ipsum factam in Ed. I. Errata et Supplementa Tomorum I. et II. leguntur. Nos, postquam hæc omnia in opere edendo adhibueramus et in adnotationibus ad locos emendatos attuleramus, cuncta ordine repetere noluimus.

Pag. 361. In Ed. I. Appendicis literæ singulares puncta denotantes literis quæ dicuntur *cursivis* impressæ sunt, sed in libellis nobis relictis manu Ioannis Bolyai scriptis puncta literis qu. d. *fractur* denotantur, quibus etiam pater eius usus est.

Ibidem post ℣. 15. in Ed. I. legitur:

∟ denotet perpendiculare
∧ « angulum.

Nos hæc delevimus, quia pro signo ∟ usitatiore ⊥ utimur, vocabulum «angulum» autem ubique integrum scribimus.

Pag. 368. ℣. ultimo «frs» correximus in «hrs», ut et ipse auctor correxit in libello manu scripto, quo Appendicem lingua Germanica denuo pertractavit.

Pag. 370. ℣. ultimo §. 18. «○ ha» emendavimus ex «○ hf».

Pag. 374. extremae §. 26. auctor ascripsit exemplari in bibliotheca Academiæ Hungaricæ asservato «cos. quoque necessarium». Videtur in editione quadam altera propositionem de cosinu demonstraturus fuisse, quamquam nihil hic maioris momenti vere desideratur. Revera considerationes, quibus in «Supplemento numeri ·31351» Tom. II. Tentaminis ex

$$\sin. H : \sin. A = 1 : \sin. a$$

trigonometria sphærica integra deducitur, et in geometria absoluta valent.

Hosted by Google

Hosted by Google